目　　录

第 一 章

基本解与 Cauchy 问题

引言 考虑热传导方程

$$(0.1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

对于每一固定的 (ξ, τ)，函数

$$(0.2)\qquad \Gamma(x, t; \xi, \tau)=\frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n}(t-\tau)^{-n/2} \times \exp\left[-\frac{\sum(x_i-\xi_i)^2}{4(t-\tau)}\right]\ (t>\tau)$$

满足 (0.1)．此外，对任何一个对于某个 $h>0$ 以 $0\{\exp[h\Sigma x_i^2]\}$ 为界的连续函数 $f(x)$，积分

$$(0.3)\qquad u(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(x, t; \xi, 0)f(\xi)d\xi_1\cdots d\xi_n$$

当 $T<1/4h$，$0<t\leqslant T$ 时存在，且当 $t\to 0$ 时

$$(0.4)\qquad u(x,t)\to f(x).$$

$\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 称为热传导方程的基本解． 函数 $u(x, t)$ 是 Cauchy 问题的解，即对 $0<t\leqslant T$ 求(0.1)的满足初始条件 $u(x,0)=f(x)$ 的问题的解．

热传导方程的伴随方程定义为

$$(0.5)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}+\frac{\partial v}{\partial t}=0.$$

容易验证，对于每一固定的 (x, t)，$\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 作为 (ξ,τ) 的函数满足(0.5)．这可用来证明 (0.1) 的 Cauchy 问题，对于某个 $k>0$，在条件

$$(0.6)\qquad u(x, t)=0\{\exp[k\sum x_i^2]\}$$

之下解的唯一性.

在这一章中我们将对有 Hölder 连续系数的二阶抛物型方程构造基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$，然后用于解 Cauchy 问题. 在对方程系数作某些可微性的补充假定下，对伴随方程构造基本解 $\Gamma^*(x, t; \xi, \tau)$，使得 $\Gamma(x, t; \xi, \tau) = \Gamma^*(\xi, \tau; x, t)$. 我们将利用这一关系去证明在条件 (0.6) 之下 Cauchy 问题解的唯一性.

1. 定义

我们以 R^n 记实 n 维欧氏空间. 以 $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$ 定义 R^n 的点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 到原点的距离 (即 x 的模). 对于在 R^n 的某个有界闭集 S 上定义的函数 $f(x)$，如果存在某个常数 A，使对 S 中所有的 x，y 都有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|^\alpha, \tag{1.1}$$

就说 $f(x)$ 是在 S 中指数为 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的 Hölder 连续函数. 使 (1.1)成立的最小的 A 称为 Hölder 系数. 如果 S 是一个无界集，它与每一个有界闭集 B 的交是闭的，如果对于每一有界闭集 B，在 $S\cap B$ 中 (1.1) 成立，这里系数 A 可以与 B 有关，就说 $f(x)$ 是 S 中指数为 α 的 Hölder 连续函数. 如果可取 A 与 B 无关，就说 $f(x)$ 是一致 Hölder 连续的(指数为 α).

如果 S 是一个开集，而(1.1)关于每一有界闭集 $B\subset S$ 成立，这里系数 A 可以依赖于 B，就说 $f(x)$ 在 S 中是局部 Hölder 连续的(指数为 α). 如果 A 不依赖于 B，就说 $f(x)$ 为一致 Hölder 连续的(指数为 α).

如果 $f(x)$ 依赖于参数 λ，即 $f = f(x, \lambda)$，又 Hölder 系数不依赖于 λ，就说 $f(x, \lambda)$ 对于 x 是 Hölder 连续的，对于 λ 是一致的.

有时对于不同的模 $|x|$ 定义 Hölder 连续性是方便的. 例如见下面的 (1.4) 及第四、五章.

读者不难验证：如果 $f_1, \cdots, f_m$ 都是 Hölder 连续的 (指数为 α)，则 $f_1, \cdots, f_m$ 的 (分母不为零的) 任何有理函数也是 Hölder 连续的 (指数为 α).

如果在(1.1)中 $\alpha=1$，就说 $f(x)$ 是 Lipschitz 连续的.

考虑微分方程

$$
(1.2)\qquad L_u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,
$$

其中系数 a_{ij}, b_i 和 c 均定义在柱体

$$
\Omega \equiv \overline{D} \times [T_0, T] \equiv \{(x,t);\ x\in\overline{D},\ T_0 \leqslant t \leqslant T_1\}
$$

中,而 $\overline{D}$ 是有界区域 $D\subset R^n$ 的闭包. 我们总认为 $(a_{ij}(x,t))$ 是对称矩阵,即 $a_{ij}=a_{ji}$. 如果矩阵 $(a_{ij}(x,t))$ 为正定,即对每一实向量 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\neq 0$, 有 $\sum a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j>0$, 就说算子 L 在点 (x,t) 是抛物型的(或者说 L 是抛物的). 如果 L 在 Ω 的一切点都是抛物的，就说 L 在 Ω 中是抛物的. 如果存在正的常数 $\bar{\lambda}_0$ 和 $\bar{\lambda}_1$, 使对任意实向量 ξ 及一切 $(x,t)\in\Omega$ 都有

$$
(1.3)\qquad \bar{\lambda}_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \bar{\lambda}_1|\xi|^2,
$$

就说 L 在 Ω 中是一致抛物的.

本章将处处假定:

(A_1) L 在 Ω 中是抛物的;

(A_2) L 的系数都是 Ω 中的连续函数,且对所有的 $(x,t)\in\Omega$ 及 $(x^\circ,t^\circ)\in\Omega$ 都有

$$
(1.4)\qquad |a_{ij}(x,t)-a_{ij}(x^\circ,t^\circ)| \leqslant A(|x-x^\circ|^\alpha + |t-t^\circ|^{\alpha/2}),
$$

$$
(1.5)\qquad |b_i(x,t)-b_i(x^\circ,t)| \leqslant A|x-x^\circ|^\alpha,
$$

$$
(1.6)\qquad |c(x,t)-c(x^\circ,t)| \leqslant A|x-x^\circ|^\alpha.
$$

因为 $a_{ij}(x,t)$ 是有界集合 Ω 中的连续函数,(A_1) 就意味着 L 在 Ω 中也是一致抛物的,即(1.3)对不依赖于 $(x,t)\in\Omega$ 的正常数 $\bar{\lambda}_0$, $\bar{\lambda}_1$ 成立.

定义 我们说 $u(x,t)$ 是 $Lu=0$ 在某个区域 Δ 中的解，如果所有在 L_u 中出现的 u 的导数(即 $\partial u/\partial x_i$, $\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j$, $\partial u/\partial t$)

都是Δ中的连续函数，且在Δ的每点(x, t)有$Lu(x, t) = 0$. 类似的定义对任意微分算子L也适用.

定义 $Lu=0$（在Ω中）的基本解是一个对一切$(x, t)\in\Omega$, $(\xi, \tau)\in\Omega$, $t > \tau$都有定义的函数$\Gamma(x, t; \xi, \tau)$，它满足如下条件:

(i) 对固定的$(\xi, \tau)\in\Omega$，作为(x, t) $(x\in D, \tau < t \leqslant T_1)$的函数它满足方程$Lu = 0$;

(ii) 对于在$\overline{D}$中的每一连续函数$f(x)$，当$x\in D$时有

$$\lim_{t\searrow\tau}\int_D \Gamma(x, t; \xi, \tau)f(\xi)d\xi = f(x), \tag{1.7}$$

其中$d\xi = d\xi_1\cdots d\xi_n$. 我们总假定区域$D$是 Lebesgue 可测的，因为这是一个很自然的假定，往后我们就不提它了.

第 2—4 节用于构造基本解. 在第 5 节将研究它的某些性质. 第 6 节把第 2—5 节的结果推广到区域D为无界的情形.

2. 拟基本解方法

设$(a^{ij}(x, t))$为$(a_{ij}(x, t))$的逆矩阵. 令

$$\vartheta^{y,\sigma}(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(y,\sigma)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j), \tag{2.1}$$

其中$y = (y_1, \cdots, y_n)$. 由 (1.3), (1.4) 推出

$$\lambda_0|x-\xi|^2 \leqslant \vartheta^{y,\sigma}(x,\xi) \leqslant \lambda_1|x-\xi|^2, \tag{2.2}$$

$$|a^{ij}(x,t) - a^{ij}(x^\circ,t^\circ)| \leqslant A'(|x-x^\circ|^\alpha + |t-t^\circ|^{\alpha/2}), \tag{2.3}$$

其中λ_0, λ_1及A'都是仅依赖于$\bar\lambda_0$, $\bar\lambda_1$及A的正的常数.

对于$t > \tau$，我们引进函数

$$w^{y,\sigma}(x, t; \xi, \tau) = (t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\sigma}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right], \tag{2.4}$$

$$Z(x, t; \xi, \tau) = C(\xi, \tau)w^{\xi,\tau}(x, t; \xi, \tau), \tag{2.5}$$

其中

$$C(x, t) = (2\sqrt{\pi})^{-n}[\det(a^{ij}(x, t))]^{1/2}. \tag{2.6}$$

对每一固定的(ξ, τ)，函数$Z(x, t; \xi, \tau)$满足常系数方程

$$L_0u(x, t) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\xi, \tau)\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0. \tag{2.7}$$

由下面的定理 1 还可推出，对于 $\Gamma = Z$，(1.7) 也得到满足．于是 $Z(x, t; \xi, \tau)$ 是 $L_0u = 0$ 的基本解．为了构造 $Lu = 0$ 的基本解，我们把 L_0 看作是 L 的"首次近似"，而视 Z 为 $Lu = 0$ 的基本解 Γ 的"主要部分"．然后，我们试图找如下形式的 Γ：

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) = Z(x, t; \xi, \tau) + \int_\tau^t \int_D Z(x, t; \eta, \sigma) \times \Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta d\sigma, \tag{2.8}$$

其中 Φ 由 Γ 满足方程 $Lu = 0$ 这一条件来确定．

这一过程称为 (E. E. Levi 的) 拟基本解方法．Z 称为拟基本解．在第九章我们还将把这一方法用于构造任意阶抛物型方程组的基本解．

定理 1. 设 $f(x, t)$ 为 Ω 中的连续函数，则

$$J(x, t, \tau) \equiv \int_D Z(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi \tag{2.9}$$

为 (x, t, τ) $(x \in \overline{D},\ T_0 \leqslant \tau < t \leqslant T_1)$ 的连续函数，且对 (x, t) $(x \in S,\ T_0 < t \leqslant T_1)$ 一致地有

$$\lim_{\tau \to t} J(x, t, \tau) = f(x, t), \tag{2.10}$$

其中 S 为 D 的任意闭子集．

证明　首先考虑 f 和 a_{ij} 都是常数的情形．假定 $P^*P = (a^{ij})$，其中 P^* 为矩阵 P 的转置．线性代换 $\zeta = P(x - \xi)$ 把 $\sum a^{ij} \cdot (x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)$ 化为 $\Sigma \zeta_i^2$．以 D^* 记上述代换下 D 的象，注意到

$$\frac{\partial(\xi_1, \cdots, \xi_n)}{\partial(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)} = \frac{1}{\det P} [\det(a^{ij})]^{-1/2},$$

我们就得到

$$J(x, t, \tau) = \int_{D^*} \frac{f}{(2\sqrt{\pi})^n} (t - \tau)^{-n/2} \times \exp\left[-\frac{|\zeta|^2}{4(t - \tau)}\right] d\zeta \equiv J_R + J_R^0, \tag{2.11}$$

其中 J_R 为在球 $|\zeta| \leqslant R$ 上所取的积分部分，这个球的半径 R 充分

小(使得球含于 D^* 中),而 J_R^0 为其余部分.

引进极坐标,我们得到

$$(2.12)\qquad J_R=\frac{f}{(2\sqrt{\pi})^n}\omega_n(t-\tau)^{-n/2}\times\int_0^R\exp\left[-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right]r^{n-1}dr=\frac{f}{(2\sqrt{\pi})^n}2^{n-1}\omega_n\int_0^{R^2/4(t-\tau)}\sigma^{(n/2)-1}e^{-\sigma}d\sigma,$$

其中

$$\omega_n=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

是单位超球面的面积. 由此推出

$$(2.13)\qquad \lim_{\tau\to t}J_R=f.$$

因为 R 是固定的,所以 J_R^0 的被积函数当 $\tau\to t$ 时趋于零. 因此当 $\tau\to t$ 时 $J_R^0\to 0$. 把这与(2.13)结合起来,再据(2.11)就推知,当 $\tau\to t$ 时,$J(x,t,\tau)\to f$.

现在考虑 f 与 a_{ij} 都不是常数的一般情形. 写为

$$(2.14)\qquad \begin{aligned}J(x,t,\tau)&=f(x,\tau)\int_D C(x,t)w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)d\xi\\&+f(x,\tau)\int_D[C(\xi,\tau)w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)-C(x,t)\\&\times w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)]d\xi+\int_D C(\xi,\tau)w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)\\&\times[f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]d\xi\equiv J_1+J_2+J_3,\end{aligned}$$

可以象前面处理常系数情形的 J 那样来处理 J_1 的积分,于是

$$(2.15)\qquad \lim_{\tau\to t}J_1=f(x,t).$$

至于 J_2, 我们有

$$|w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)-w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)|\leqslant n^2|x-\xi|^2\times(t-\tau)^{-(n+2)/2}\max_{i,j}|a^{ij}(\xi,\tau)-a^{ij}(x,t)|$$

$$\times \exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right].$$

把 J_2 的被积函数写成如下形式

$$I = [C(\xi,\tau)-C(x,t)]w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau) + C(x,t)[w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)-w^{x,t}(x,t;\xi,\tau)]$$

再利用前面的不等式即可得知,对任意 $\varepsilon>0$, 存在充分小的 R 和 δ, 且使得当 $|\xi-x|\leqslant R$, $t-\tau<\delta$ 时,表达式 I 以

$$\varepsilon(t-\tau)^{-n/2}[1+|x-\xi|^2(t-\tau)^{-1}] \times \exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] \tag{2.16}$$

为界. 现将积分 J_2 分成两部分, 设为 I_1+I_2, 其中积分 I_1 是在 $|\xi-x|\leqslant R$ 上取的. 用 I_1 的被积函数的界(2.16)来估计 I_1, 然后象在 (2.12) 那样使用极坐标,并作代换 $\sigma=r^2/(t-\tau)$, 就发现,如果 $t-\tau<\delta$ 就有 $|I_1|\leqslant C\varepsilon$, 其中 C 为与 ε 无关的常数. 现在如固定 R 而让 $\tau\to t$, 则 $I_2\to 0$,因为 I_2 的被积函数趋于零. 由此推出,当 τ 充分接近于 t 时, 则 $|J_2|<C'\varepsilon$, 其中 C' 为与 ε 和 τ 无关的常数. 因此

$$\lim_{\tau\to t} J_2 = 0. \tag{2.17}$$

可用类似方法处理 J_3. 我们把它拆成和 $J_{31}+J_{32}$. 其中积分 J_{31} 是在球 $|\xi-x|\leqslant R$ 上取的. 因为 $f(x,t)$ 是连续函数,所以当 R 和 $t-\tau$ 都充分小时, 对任意的 $\varepsilon>0$, J_{31} 的被积函数以

$$\varepsilon(t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]$$

为界. 象在 (2.12) 那样引进极坐标并作代换 $\sigma=r^2/(t-\tau)$, 就得到 $|J_{31}|\leqslant C\varepsilon$, C 为与 ε 无关的常数. 因为 R 是固定的, 所以当 $\tau\to t$ 时 $J_{32}\to 0$. 于是得到: 当 $\tau\to t$ 时 $J_3\to 0$. 把这与 (2.17), (2.15) 结合起来,且考虑到 (2.14), 就得到 (2.10).

由前面的证明可推出有关一致收敛的断言.

3. 体位势

在 Ω 中给定了一个函数 $f(x,t)$, 考虑函数

$$(3.1) \qquad V(x,t)=\int_{T_0}^{t}\int_D Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

并把它称为(对于拟基本解 Z 的) f 的**体位势**. 本节将研究 V 的某些可微性质. 这些性质将在下节基本解的构造中要用到.

注意, 体位势是一个被积函数在 $\xi=x$, $\tau=t$ 处有奇性的广义积分, 不过这种奇异性是可积的. 事实上, 把 $w^{y,\tau}$ 写成如下形式

$$(3.2) \qquad w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)=(t-\tau)^{-\mu}(\theta^{y,\tau})^{\mu-\frac{n}{2}} \times\left[\frac{\vartheta^{y,\tau}}{t-\tau}\right]^{(n/2)-\mu}\exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}}{4(t-\tau)}\right]$$

其中 $\vartheta^{y,\tau}=\vartheta^{y,\tau}(x,\xi)$, 我们得到

$$(3.3) \qquad |w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{n-2\mu}} \quad (0<\mu<1),$$

而右边是可积的.

在实际研究 V 之前,先给出一条有用的初等引理.

引理 1 设当 x, y 在 R^n 的某个紧区域 S 中变动且 $x\neq y$ 时, $f(x,y)$ 为 (x,y) 的连续函数,又设当 $\varepsilon\to 0$ 时,对 S 中的 x 一致地有

$$\int_{S(x,\varepsilon)}|f(x,y)|dy\to 0,$$

其中 $S(x,\varepsilon)$ 是 S 与中心在 x 半径为 ε 的球的交,则对 S 中的任意有界可测函数 $g(y)$, (广义)积分

$$\varphi(x)=\int_S f(x,y)g(y)dy$$

为 S 中的连续函数.

证明 对于给定的 $\varepsilon>0$, 选取 δ_1 使对所有的 $x\in S$, $\delta\leqslant\delta_1$ 有

$$\int_{S(x,\delta)}|f(x,y)g(y)|dy<\varepsilon.$$

因为当 $x\in S$, $y\in S$, $|x-y|\geqslant\delta_1/2$ 时, $f(x,y)$ 是 (x,y) 的一致

连续函数(因而是有界的)，于是存在 $\delta_2 < \delta_1/4$，使对一切 $x \in S$，$z \in S$ 有

$$(3.4) \qquad \int_{S(z,\delta_2)} |f(x, y)g(y)|dy < \varepsilon.$$

以 $S_2(z)$ 记 $S(z, \delta_2)$ 对于 S 的补，由 (3.4)，我们得到

$$(3.5) \qquad \left|\int_{S_2(z)} f(x, y)g(y)dy - \int_{S_2(z^0)} f(x, y)g(y)dy\right| < 2\varepsilon.$$

利用 $f(x, y)$ 对于 $x \in S$, $y \in S$, $|x-y| \geqslant \delta_2/2$ 的一致连续性，当对某个充分小的 $\delta(\delta < \delta_2/2)$，有 $|x'-x''| < \delta$ 时，我们有

$$\left|\int_{S_2(x')} f(x', y)g(y)dy - \int_{S_2(x')} f(x'', y)g(y)dy\right| < \varepsilon.$$

因此连同(关于 $z = x'$, $z^\circ = x''$, $x = x''$ 的)(3.5)，我们得到

$$\left|\int_{S_2(x')} f(x', y)g(y)dy - \int_{S_2(x'')} f(x'', y)g(y)dy\right| < 3\varepsilon.$$

把它与(关于 $z = x = x'$，且 $z = x = x''$ 的)(3.4)一起考虑，就导出不等式 $|\varphi(x') - \varphi(x'')| < 5\varepsilon$. 证明完毕.

若对于 $t < \tau$ 我们定义 $Z(x, t; \xi, \tau) = 0$，则可把引理 1 应用于体位势，于是得结论为：

定理 2 如果 $f(x, t)$ 为 Ω 中的有界可测函数，则体位势 $V(x, t)$ 为 Ω 中的连续函数.

下面我们证明：

定理 3 如果 $f(x, t)$ 为 Ω 中的连续函数，则 $V(x, t)$ 当 $x \in D$, $T_0 < t \leqslant T_1$ 时有对 x 的一阶连续偏导数，且

$$(3.6) \qquad \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_i} = \int_{T_0}^t \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} Z(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

证明 把 $\partial w^{y,\tau}(x, t; \xi, \tau)/\partial x_i$ 写成类似于 (3.2) 的形式，我们得到

$$(3.7) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_i} w^{y,\tau}(x, t; \xi, \tau)\right| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu |x-\xi|^{n+1-2\mu}}$$

$$\left(\frac{1}{2} < \mu < 1\right).$$

于是，(3.6) 中被积函数的奇异性是可积的. 如果对于 $t < \tau$，定

义 $\partial Z(x, t; \xi, \tau)/\partial x_i = 0$，则可应用引理1，从而断定 (3.6) 的积分是连续函数. 剩下要验证 (3.6). 令

$$(3.8) \qquad J(x, t, \tau) = \int_D Z(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi,$$

则

$$(3.9) \qquad V(x, t) = \int_{T_0}^t J(x, t, \tau) d\tau.$$

由第 2 节定理 1，当 $x \in D$，$T_0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_1$ 时，只要我们定义

$$(3.10) \qquad J(x, t, t) = \lim_{\tau \to t} J(x, t, \tau),$$

则 $J(x, t, \tau)$ 是 (x, t, τ) 的连续函数. 显然，当 $t > \tau$ 时，

$$(3.11) \qquad \frac{\partial J(x, t, \tau)}{\partial x_i} = \int_D \frac{\partial}{\partial x_i} Z(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi.$$

利用 (3.7) 可推出

$$(3.12) \qquad \left|\frac{\partial J(x, t, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu} \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < 1\right).$$

因此，广义积分

$$(3.13) \qquad \widetilde{V}_i(x, t) = \int_{T_0}^t \frac{\partial}{\partial x_i} J(x, t, \tau) d\tau$$

是绝对且一致收敛的.

设 $x^h = (x_1, \cdots x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ 并考虑

$$(3.14) \qquad \begin{aligned} I &= \frac{V(x^h, t) - V(x, t)}{h} - \widetilde{V}_i(x, t) \\ &= \int_{T_0}^t \left[\frac{J(x^h, t, \tau) - J(x, t, \tau)}{h} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial x_i} J(x, t, \tau)\right] d\tau \\ &= \int_{T_0}^t \left[\frac{\partial}{\partial x_i} J(x^*, t, \tau) - \frac{\partial}{\partial x_i} J(x, t, \tau)\right] d\tau, \end{aligned}$$

其中 x^* 为把 x^h 和 x 连接起来的区间中的某个点. 利用(3.12)推出，对任意 $\varepsilon > 0$ 以及一切 $x \in D$，当 $t - t_\varepsilon$ 充分小(与 x 无关)

时，有

$$(3.15)\qquad \int_{t_\varepsilon}^{t}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)\right|d\tau<\varepsilon.$$

一旦固定了 $t_\varepsilon(t_\varepsilon<t)$，就能找到 $\delta=\delta(t_\varepsilon,\varepsilon)$，使当 $\tau<t_\varepsilon$，$x\in D$，$|h|<\delta$ 时有

$$(3.16)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_i}J(x^*,t,\tau,)-\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)\right|<\frac{\varepsilon}{T_1-T_0}.$$

把 I 写成如下形式

$$\begin{aligned}I=&\int_{T_0}^{t_\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}J(x^*,t,\tau)-\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)\right]d\tau\\&+\int_{t_\varepsilon}^{t}\frac{\partial}{\partial x_i}J(x^*,t,\tau)d\tau\\&-\int_{t_\varepsilon}^{t}\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)d\tau\end{aligned}$$

并利用(3.15)，(3.16)就得出，当 $|h|<\delta$ 时 $|I|<3\varepsilon$. 于是 $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ 存在且等于 $\widetilde{V}_i$，即 (3.6) 成立.

定理 4 设 $f(x,t)$ 为 Ω 中的连续函数，且关于 $x\in D$ 为局部 Hölder 连续的(指数 β)，而对 t 是一致的，则 $V(x,t)$ 对 $x\in D$，$T_0<t\leqslant T_1$ 有对 x 的二阶连续偏导数，并且

$$(3.17)\qquad \frac{\partial^2V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}=\int_{T_0}^{t}d\tau\int_D\frac{\partial^2Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}f(\xi,\tau)d\xi.$$

注意到在 (3.6) 中积分的次序是无关紧要的，因为 (据 (3.7)) 被积函数的奇异性分别对各个变量是绝对可积的，(3.17) 中的积分为累次积分，于是仅需视对 τ 的积分为广义积分. 和(3.7)大不相同，我们现在有不等式(其证明类似于 (3.7))

$$(3.18)\qquad \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{n+2-2\mu}},$$

因而我们不能断定 (3.17) 的被积函数的奇性在 Ω 中是绝对可积的.

证明　　由定理 3，

(3.19)
$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i}=\int_{T_0}^{t}\frac{\partial}{\partial x_i}J(x,t,\tau)d\tau,$$
其中 J 由 (3.8) 定义. 把 $\partial J/\partial x_i$ 写成如下形式

(3.20)
$$\begin{aligned}\frac{\partial J(x,t,\tau)}{\partial x_i}&=f(y,\tau)C(y,\tau)\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)d\xi\\&+f(y,\tau)\int_D\Big[C(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)\\&-C(y,\tau)\frac{\partial}{\partial x_i}w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\Big]d\xi\\&+\int_D\frac{\partial}{\partial x_i}Z(x,t;\xi,\tau)[f(\xi,\tau)-f(y,\tau)]d\xi\end{aligned}$$
其中 y 为固定的点. 设 K 为一包含在 D 中的固定的球，以 ∂K 记 K 的边界，K^* 记 K 对 D 的补. 把(3.20)右边的第一个积分拆成两个积分，即 $\int_D=\int_K+\int_{K^*}$，把散度定理用于第一个积分，我们得到

(3.21)
$$\begin{aligned}&\int_{\partial K}w^{y,\tau}(x,t;\eta,\tau)\cos(\nu,\eta_i)dS_\eta\\&+\int_{K^*}\frac{\partial}{\partial x_i}w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)d\xi,\end{aligned}$$
其中 ν 为 ∂K 的外法向，dS_η 为 ∂K 的曲面元素. 把 (3.12) 代入 (3.20)然后把(3.20)对 x_j 微分一次，并选取 $y=x$，我们就得到

(3.22)
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 J(x,t,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}&=f(x,\tau)C(x,\tau)\Big[\int_{\partial K}\frac{\partial}{\partial x_j}w^{y,\tau}(x,t;\eta,\tau)\\&\times\cos(\nu,\eta_i)dS_\eta\Big]_{y=x}+f(x,\tau)C(x,\tau)\\&\times\Big[\int_{K^*}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)d\xi\Big]_{y=x}\\&+f(x,\tau)\int_D\Big[C(\xi,\tau)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)\\&-C(x,\tau)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\Big]_{y=x}d\xi\\&+\int_D\Big[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}Z(x,t;\xi,\tau)\Big][f(\xi,\tau)-f(x,\tau)]d\xi.\end{aligned}$$

设 x 为K内的一个固定的点，于是(3.22)右边的前两个积分都是其变元的有界函数，且当 $\tau\to t$ 时一致地趋于零. 为了估计(3.22)右边最后一个积分 I_4，我们利用(3.18)和 f 的 Hölder 连续性. 假定 x 限于D的某个闭子集，则当 $1-(\beta/2)<\mu<1$ 时有

$$|I_4|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}}\int_D\frac{d\xi}{|x-\xi|^{n+2-2\mu-\beta}}\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}},$$

其中常数与(x,t,τ)无关.

为了估计(3.22)右边第三个积分 I_3，我们需要明显的公式

$$\begin{aligned}(3.23)\qquad &\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\\ &=\frac{1}{4}(t-\tau)^{-2-n/2}\exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]\\ &\left[-2(t-\tau)a^{ij}(y,\tau)+\sum_{h=1}^{n}a^{ih}(y,\tau)(x_h-\xi_h)\right.\\ &\left.\times\sum_{k=1}^{n}a^{jk}(y,\tau)(x_k-\xi_k)\right].\end{aligned}$$

利用(2.2)，(2.3)和中值定理，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]-\exp\left[-\frac{\vartheta^{x,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]\right|\\ &\leqslant\frac{\text{const.}}{t-\tau}\exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]|x-\xi|^{2+\alpha}.\end{aligned}$$

利用这个不等式并再次使用(2.2)，(2.3)，从公式(3.23)得到，对任意的 $\lambda_0^*<\lambda_0$ 有

$$\begin{aligned}(3.24)\qquad H=&\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}w^{\xi,\tau}(x,t;\xi,\tau)\right.\\ &\left.-\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}w^{y,\tau}(x,t;\xi,\tau)\right]_{y=x}\right|\\ &\leqslant\text{const.}(t-\tau)^{-(n/2)-1}\\ &\times\exp\left[-\frac{\lambda_0|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]\left[1+\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{|x-\xi|^4}{(t-\tau)^2}\Bigg]|x-\xi|^\alpha \leqslant \text{const.}(t-\tau)^{-(n/2)-1}$$

$$\times \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]|x-\xi|^\alpha;$$

由此推出(象在(3.3),(3.7)的证明中那样)

$$H \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu}\frac{1}{|x-\xi|^{n+2-2\mu-\alpha}} \quad (1-(\alpha/2)<\mu<1). \tag{3.25}$$

由于 $|C(x,\tau)-C(\xi,\tau)| \leqslant \text{const.}|x-\xi|^\alpha$, 利用(3.18)我们断定 I_3 的被积函数也不超过(3.25)的右边(有不同的常数).因此当 $1-(\alpha/2)<\mu<1$ 时, $|I_3| \leqslant \text{const.}|t-\tau|^{-\mu}$. 既然对 I_4 已确立同一的界,又因为(如已注意到的那样)(3.22)右边的前两项都是 (t,τ) 的有界函数,我们断定

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}J(x,t,\tau)\right| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu} \quad \left(1-\frac{\delta}{2}<\mu<1\right) \tag{3.26}$$

其中 $\delta=\min(\alpha,\beta)$.

现在,象在定理 3 的证明中那样,令

$$\tilde{V}_{ij}(x,t)=\int_{T_0}^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}J(x,t,\tau)d\tau$$

并证明积分(3.19)满足

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)=\tilde{V}_{ij},$$

即(3.17)成立. 把引理 1 的证明方法用于(3.17)的右端即可推出 $\partial^2 V/\partial x_i \partial x_j$ 的连续性.

定理 5 设 $f(x,t)$ 如定理 4 中所述,则 $\partial V(x,t)/\partial t$ 存在,且对 $x\in D$, $T_0<t\leqslant T_1$ 是连续的,并有

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}=f(x,t)+\int_{T_0}^t d\tau \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi,\tau) \times \frac{\partial^2 Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i \partial x_j}f(\xi,\tau)d\xi. \tag{3.27}$$

证明　因为 $Z(x,t;\xi,\tau)$ 是(2.7)的解，所以当 $t>\tau$ 时有

$$(3.28)\quad \frac{\partial}{\partial t}J(x,t,\tau)=\int_D \frac{\partial}{\partial t}Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int_D a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}Z(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi.$$

可类似于在定理 4 的证明中处理 $\partial^2 J/\partial x_i\partial x_j$ 那样来处理右边各项．因此得到(对照(3.26))

$$(3.29)\quad \left|\frac{\partial}{\partial t}J(x,t,\tau)\right|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}}\quad\left(1-\frac{\delta}{2}<\mu<1\right).$$

我们将证明 $\partial V(x,t)/\partial t$ 存在，且

$$(3.30)\quad \frac{\partial V(x,t)}{\partial t}=J(x,t,t)+\int_{T_0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}J(x,t,\tau)d\tau.$$

取 $h>0$，我们考虑有限差分

$$(3.31)\quad \frac{V(x,t+h)-V(x,t)}{h}=\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h}J(x,t+h,\tau)d\tau$$
$$+\int_{T_0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}J(x,t^{*},\tau)d\tau$$

其中 $t<t^{*}<t+h$．当 $h\to 0$ 时，右边第一项收敛于 $J(x,t,t)$．为了估计第二项，考虑

$$(3.32)\quad H\equiv\int_{T_0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}J(x,t^{*},\tau)d\tau-\int_{T_0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}J(x,t,\tau)d\tau.$$

利用(3.29)推知，任给 $\varepsilon>0$，当 h 充分小，如 $h<\delta_1$ 时，对所有的 $t\leqslant\bar{t}<t+h$ 和某个 $t_\varepsilon<t$，有

$$(3.33)\quad \int_{t_\varepsilon}^{t}\left|\frac{\partial}{\partial\bar{t}}J(x,\bar{t},\tau)\right|d\tau<\varepsilon.$$

因为 $\partial J(x,\bar{t},\tau)/\partial\bar{t}$ 当 $\bar{t}-\tau\geqslant t-t_\varepsilon$ 时为连续函数，故存在这样的 $\delta\leqslant\delta_1$，使当 $h<\delta$ 时，对一切 $\tau<t_\varepsilon$ 有

$$(3.34)\quad \left|\frac{\partial}{\partial t}J(x,t^{*},\tau)-\frac{\partial}{\partial t}J(x,t,\tau)\right|<\frac{\varepsilon}{T_1-T_0}.$$

把(3.22)中的各个积分拆成两个积分：$\int_{T_0}^{t}=\int_{T_0}^{t_\varepsilon}+\int_{t_\varepsilon}^{t}$，再用(3.33)，(3.34)就推出，当 $h<\delta$ 时 $|H|<3\varepsilon$．在(3.31)中利

用这一结果，我们就得到右边对 t 求导数的(3.30). 对于 $h<0$ 的情形,可作类似的讨论.

鉴于(2.10)以及 $J(x,t,\tau)$ 为(2.7)的解,(3.30)就化为(3.27). 应用引理1的证明方法可推出 $\partial V(x,t)/\partial t$ 的连续性.

综合定理4、5，我们得到:

定理 6 设 $f(x,t)$ 如定理4中所述，则 $V(x,t)$ 满足方程 $(x\in D,\ T_0<t\leqslant T_1)$

$$(3.35)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}$$
$$=-f(x,t)+\int_{T_0}^{t}\int_D\sum_{i,j=1}^{n}[a_{ij}(x,t)$$
$$-a_{ij}(\xi,\tau)]\frac{\partial^2 Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}f(\xi,\tau)^{*}d\xi d\tau.$$

注意,(3.35)右边被积函数的奇性分别对 ξ 和 τ 是绝对可积的.

4. 基本解的构造

我们将要构造 $Lu=0$ 的形如(2.8)的基本解 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$. 如果对 $f(x,t)=\Phi(x,t;\xi,\tau)$ 应用定理6，那时方程 $L\Gamma=0$ 变为

$$(4.1)\qquad \Phi(x,t;\xi,\tau)=LZ(x,t;\xi,\tau)$$
$$+\int_{\tau}^{t}\int_D LZ(x,t;y,\sigma)\Phi(y,\sigma;\xi,\tau)dyd\sigma.$$

于是，对每一固定的 (ξ,τ), $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ 为具奇异核 $LZ(x,t;y,\sigma)$ 的 Volterra 积分方程的解.

由

$$(4.2)\qquad LZ(x,t;y,\sigma)$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n}[a_{ij}(x,t)-a_{ij}(y,\sigma)]\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}Z(x,t;y,\sigma)$$
$$+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}Z(x,t;y,\sigma)+c(x,t)Z(x,t;y,\sigma),$$

---

* 原文漏掉 $f(\xi,\tau)$.——译者注

我们得到不等式

$$(4.3)\qquad |LZ(x,t;y,\sigma)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\sigma)^{\mu}} \frac{1}{|x-y|^{n+2-2\mu-\alpha}},$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}<\mu<1\right)$$

因此,奇性是可积的.

我们将证明(4.1)存在形如

$$(4.4)\qquad \Phi(x,t;\xi,\tau)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(LZ)_{\nu}(x,t;\xi,\tau)$$

的解 Φ, 其中 $(LZ)_1=LZ$, 且

$$(4.5)\qquad (LZ)_{\nu+1}(x,t;\xi,\tau)=\int_{\tau}^{t}\int_{D}[LZ(x,t;y,\sigma)] \times (LZ)_{\nu}(y,\sigma;\xi,\tau)dyd\sigma.$$

我们来证明(4.4)中级数的收敛性,但需要下面初等引理.

引理 2 如果 G 为 R^n 的有界区域,而 $0<\alpha<n$, $0<\beta<n$, 则对任意 $x\in G$, $z\in G$, $x\neq z$ 有

$$\int_G \frac{dy}{|x-y|^{\alpha}|y-z|^{\beta}} \leqslant \begin{cases}\text{const.}|x-z|^{n-\alpha-\beta} & \text{当 } \alpha+\beta>n \text{ 时},\\ \text{const.} & \text{当 } \alpha+\beta<n \text{ 时}.\end{cases}$$

把 G 拆成对应于 $|y-z|<|x-z|/2$, $|y-x|<|x-z|/2$ 及其余集的三个集合,并分别估计相应的积分,就可得到证明.

利用引理 2 和(4.3)得到, 当 $2\mu<1$, 而 $2(n+2-2\mu-\alpha)<n$ 时,

$$|(LZ)_2(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu+(\mu-1)}} \times \frac{1}{|x-\xi|^{n+2-2\mu-\alpha+(2-2\mu-\alpha)}}.$$

因为 $\mu<1$, $2<2\mu+\alpha$, 所以 $(LZ)_2$ 的奇性较 LZ 弱. 类似地继续对 $(LZ)_3$, $(LZ)_4$ 等等进行估计, 就得出某个 ν_0, 对这个 ν_0 有

$$(4.6) \qquad |(LZ)_{\nu_0}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \text{const}.$$

继而，对 m 用归纳法来证明

$$(4.7) \qquad |(LZ)_{m+\nu_0}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant K_0 \frac{[K(t-\tau)^{1-\mu}]^m}{\Gamma((1-\mu)m+1)},$$

其中 K_0, K 为某些常数，$\Gamma(t)$为伽玛函数．对于 $m=0$，这个不等式可从(4.6)推出．现在假定 (4.7) 对于某个整数 $m \geqslant 0$ 成立，再利用(4.3)就得出

$$|(LZ)_{m+1+\nu_0}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \text{const}.\, K_0 \frac{K^m}{\Gamma((1-\mu)m+1)}$$

$$\times \int_\tau^t (t-\sigma)^{-\mu}(\sigma-\tau)^{(1-\mu)m} d\sigma.$$

作代换 $\rho = (\sigma-\tau)/(t-\tau)$ 并利用公式

$$\int_0^1 (1-\rho)^{a-1}\rho^{b-1}d\rho = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

如适当选取常数 K，就推出关于 $m+1$ 的 (4.7).

由(4.7)推知，$\Phi(x,t;\xi,\tau)$ 的级数展开式是收敛的，且(4.1)中的积分等于

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_D LZ(x,t;y,\sigma) \cdot (LZ)_\nu(y,\sigma;\xi,\tau)\, dy\, d\sigma.$$

因此 Φ 为(4.1)的解．我们还有

$$(4.8) \qquad |\Phi(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{|x-\xi|^{n+2-2\mu-\alpha}}$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{2} < \mu < 1\right).$$

为了更仔细地研究 Φ，需要如下的引理

引理 3 如果 $-\infty < \alpha < \frac{n}{2}+1$，$-\infty < \beta < \frac{n}{2}+1$，则

$$\int_\sigma^t \int_{R^n} (t-\tau)^{-\alpha} \exp\left[-\frac{h|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]$$

$$\times (\tau-\sigma)^{-\beta} \exp\left[-\frac{h|\xi-y|^2}{4(\tau-\sigma)}\right] d\xi d\tau$$

$$= \left(\frac{4\pi}{h}\right)^{n/2} B\left(\frac{n}{2} - \alpha + 1, \frac{n}{2} - \beta + 1\right)$$

$$\times (t - \sigma)^{(n/2)+1-\alpha-\beta} \quad \exp\left[-\frac{h|x - y|^2}{4(t - \sigma)}\right].$$

证明　　作代换

$$z_i = \left(h\frac{t - \sigma}{t - \tau}\right)^{1/2} \frac{\xi_i - y_i}{2(\tau - \sigma)^{1/2}} + \left(h\frac{\tau - \sigma}{t - \tau}\right)^{1/2} \frac{y_i - x_i}{2(t - \sigma)^{1/2}}$$

且注意

$$\frac{h(x_i - \xi_i)^2}{4(t - \tau)} + \frac{h(\xi_i - y_i)^2}{4(\tau - \sigma)} = \frac{h(x_i - y_i)^2}{4(t - \sigma)} + z_i^2.$$

象在(3.2)那样做,但此时写成

$$\exp\left[-\frac{\vartheta^{y,\tau}}{4(t - \tau)}\right] = \exp\left[-\varepsilon\frac{\vartheta^{y,\tau}}{4(t - \tau)}\right]$$

$$\times \exp\left[-(1 - \varepsilon)\frac{\vartheta^{y,\tau}}{4(t - \tau)}\right] \qquad (\varepsilon > 0)$$

当 $0 \leqslant \sigma < \infty$时，利用不等式 $\sigma^{n/2-\mu}e^{-\varepsilon\sigma} \leqslant \text{const.}$ 就得到一个界，由它推出,对任意 $\lambda_0^* < \lambda_0$, $0 \leqslant \mu \leqslant n/2$ 有下列关于Z的不等式:

$$(4.9) \qquad |Z(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t - \tau)^{\mu}|x - \xi|^{n-2\mu}} \times \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}\right].$$

用类似的方法可以证明,对任意 $\lambda_0^* < \lambda_0$ 有

$$(4.10) \qquad \sum_i \left|\frac{\partial Z(x, t; \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t - \tau)^{\mu}|x - \xi|^{n+1-2\mu}} \times \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}\right],$$

$$(4.11) \qquad \left|\frac{\partial Z(x, t; \xi, \tau)}{\partial t}\right| + \sum_{i,j}\left|\frac{\partial^2 Z(x, t; \xi, \tau)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t - \tau)^{\mu}|x - \xi|^{n+2-2\mu}} \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}\right],$$

$$(4.12) \qquad \left|\frac{\partial^3 Z(x, t; \xi, \tau)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_h}\right| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t - \tau)^{(n+3)/2}} \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}\right],$$

$$(4.13)\qquad |LZ(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{n+2-2\mu-\alpha}} \times \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right],$$

在(4.10)中 $0\leqslant\mu\leqslant(n+1)/2$，在(4.11)中 $0\leqslant\mu\leqslant(n+2)/2$，而在(4.13)中 $0\leqslant\mu\leqslant(n+2-\alpha)/2$。

利用 $\mu=(n+2-\alpha)/2$ 的(4.13)，并应用引理 3 得到

$$|(LZ)_2(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+2-2\alpha)/2}} \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right].$$

按照归纳法继续进行下去，借助于引理 3，容易得出不等式

$$(4.14)\qquad |(LZ)_m(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{H_0H^m}{\Gamma(m\alpha)}(t-\tau)^{m\alpha-(n/2)-1} \times \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]$$

其中 H_0, H 都是某些正的常数. 由 Φ 的定义，即可断定

$$(4.15)\qquad |\Phi(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+2-\alpha)/2}} \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right].$$

由此不等式还可推出(比较(4.9)的推导)，对 $0\leqslant\mu\leqslant(n+2-\alpha)/2$ 有

$$(4.16)\qquad |\Phi(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}|x-\xi|^{n+2-2\mu-\alpha}} \times \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]$$

其中 λ_0^* 是任何一个比在(4.13)中的 λ_0^* 小的数，因此可取它为小于 λ_0 的任何一个数. (4.16)是(4.8)的改进.

应用(4.14)和第 3 节定理 1 的证明方法，可以证明 $(LZ)_\nu(x,t;\xi,\tau)$ 是 (x,t) 的连续函数；当 $t-\tau\geqslant\text{const.}>0$ 时，它对于 (ξ,τ) 是一致连续的，因而是 (ξ,τ) 的连续函数，而当 $t-\tau\geqslant\text{const.}>0$ 时，对于 (x,t) 是一致连续的. 由此推出，$(LZ)_\nu(x,t;\xi,\tau)$ 是 $(x,t;\xi,\tau)$ 的连续函数. 此时由(4.4)，(4.14)即可断定，$\Phi(x,t;\xi,\tau)$ 也是 $(x,t;\xi,\tau)$ 的连续函数.

定理 7 $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ 关于 x 是 Hölder 连续的，更明确地说，对任何 $0<\beta<\alpha$ 有

$$
(4.17)\quad |\Phi(x,t;\xi,\tau)-\Phi(y,t;\xi,\tau)|\leqslant \frac{\text{const.}|x-y|^{\beta}}{(t-\tau)^{(n+2-\gamma)/2}} \times\left\{\exp\left[-\frac{\lambda^*|x-\xi|^2}{t-\tau}\right]+\exp\left[-\frac{\lambda^*|y-\xi|^2}{t-\tau}\right]\right\}
$$

其中 $\gamma=\alpha-\beta$，而 λ^* 是某个正的常数.

证明　首先证明不等式

$$
(4.18)\quad |LZ(x,t;\xi,\tau)-LZ(y,t;\xi,\tau)|\leqslant \frac{\text{const.}|x-y|^{\beta}}{(t-\tau)^{(n+2-\gamma)/2}} \times\left\{\exp\left[-\frac{k|x-\xi|^2}{t-\tau}\right]+\exp\left[-\frac{k|y-\xi|^2}{t-\tau}\right]\right\},
$$

其中 k 是某个正的常数. 考虑

$$
(4.19)\quad |x-y|^2<t-\tau
$$

的情形. 取 $LZ(x,t;\xi,\tau)$ 的项(见(4.2))

$$
(4.20)\quad F(x,t;\xi,\tau)=[a_{ij}(x,t)-a_{ij}(\xi,\tau)] \times\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}Z(x,t;\xi,\tau).
$$

我们有

$$
\begin{aligned}
(4.21)\quad & F(x,t;\xi,\tau)-F(y,t;\xi,\tau)\\
&=[a_{ij}(x,t)-a_{ij}(y,t)]\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}Z(x,t;\xi,\tau)\\
&\quad+\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}Z(x,t;\xi,\tau)-\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}Z(y,t;\xi,\tau)\right]\\
&\quad\times[a_{ij}(y,t)-a_{ij}(\xi,\tau)]\equiv F_1+F_2.
\end{aligned}
$$

利用(4.11)，并取 $\mu=(n+2)/2$，我们得到

$$
(4.22)\quad |F_1|\leqslant\frac{\text{const.}|x-y|^{\alpha}}{(t-\tau)^{(n+2)/2}}\exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right].
$$

根据中值定理和(4.12)，再注意到因为(4.14)对于 (x,y) 区间中任何一点 ζ，有

$$\exp\left[-c\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}\right]\leqslant \text{const.}\exp\left[-c'\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}\right]$$

（对任何 $0<c'<c$），

我们就得到

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}Z(x,t;\xi,\tau)-\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}Z(y,t;\xi,\tau)\right| \tag{4.23}$$

$$\leqslant\frac{\text{const.}|x-y|}{(t-\tau)^{(n+3)/2}}\exp\left[-k_1\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}\right],$$

其中 k_i 表示某个适当的正常数．因此

$$|F_2|\leqslant\frac{\text{const.}|x-y|}{(t-\tau)^{(n+3-\alpha)/2}}\exp\left[-k_2\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}\right]. \tag{4.24}$$

综合(4.24)，(4.22)并利用(4.19)，我们得到

$$|F(x,t;\xi,\tau)-F(y,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{\text{const.}|x-y|^\beta}{(t-\tau)^{(n+2-\gamma)/2}}$$

$$\times\exp\left[-k_3\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}\right].$$

对 LZ 中低阶项的系数及 Hölder 指数的估计式是和对 F 的估计式类似的．综合这些估计，便得到不等式(4.18)．

如果(4.19)不满足，则由(4.13)(取 $\mu=(n+2-\alpha)/2$)，有

$$|LZ(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{\text{const.}(t-\tau)^{\beta/2}}{(t-\tau)^{(n+2-\gamma)/2}}\exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right].$$

对 $LZ(y,t;\xi,\tau)$ 有类似的不等式成立．因为 $(t-\tau)^{\beta/2}\leqslant|x-y|^\beta$，于是推出(4.18)．

把(4.1)右边的积分记作 $\Psi(x,t;\xi,\tau)$，剩下只须证明以 Ψ 代 LZ 时(可能有不同的 k)(4.18)成立．为此写成

$$\Psi(x,t;\xi,\tau)-\Psi(y,t;\xi,\tau)$$

$$=\int_\tau^t\int_D[LZ(x,t;\zeta,\sigma)-LZ(y,t;\zeta,\sigma)]\Phi(\zeta,\sigma;\xi,\tau)d\zeta d\sigma$$

并利用(4.18)，(4.15)，我们得到

$$|\Psi(x,t;\xi,\tau)-\Psi(y,t;\xi,\tau)|\leqslant\text{const.}|x-y|^\beta[I(x,t;\xi,\tau)+I(y,t;\xi,\tau)], \tag{4.25}$$

其中

$$I(x, t; \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_D \frac{1}{(t-\sigma)^{(n+2-\gamma)/2}} \exp\left[-\frac{k|x-\zeta|^2}{t-\sigma}\right] \times \frac{1}{(\sigma-\tau)^{(n+2-\alpha)/2}} \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|\zeta-\xi|^2}{4(\sigma-\tau)}\right] d\zeta d\sigma.$$

由引理 3，有

$$I(x, t; \xi, \tau) \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+2-\gamma-\alpha)/2}} \exp\left[-k_4 \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right].$$

对 $I(y, t; \xi, \tau)$ 有类似的不等式成立．把这些不等式代入 (4.25) 就发现，当以 Ψ 代 LZ，以 k_4 代 k 时，(4.18)得到满足．定理 7 证毕．

细心地阅读定理 7 的证明，可得出：

推论　对任何 $\lambda^* < \lambda_0/4$，不等式(4.17)成立．

定理 8　用(2.8)定义的函数 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 是 $Lu = 0$ 在 Ω 中的基本解．

证明　我们首先证明，对每一固定的 (ξ, τ)，$L\Gamma = 0$．现将 Γ 写成如下形式

$$(4.26)\quad \Gamma(x, t; \xi, \tau) = Z(x, t; \xi, \tau) + \int_\tau^{t_0}\int_D Z(x, t; \eta, \sigma)\Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta d\sigma + \int_{t_0}^t \int_D Z(x, t; \eta, \sigma)\Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta d\sigma,$$

其中 t_0 为满足 $\tau < t_0 < t$ 的固定的数．对于第一个积分，$Z(x, t; \eta, \sigma)$ 对 x 的前两阶导数是 $(x, t; \eta, \sigma)$ 的连续函数，而 $\Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau)$ 对于 (η, σ) 是绝对可积的(由(4.8)或(4.16))．因此，由通常的微积分定理，第一个积分对 x 的前两阶导数存在，且可以交换对 x 的各阶(直到二阶)微分以及积分的次序．

至于(4.26)右边第二个积分，$\Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau)$ ((ξ, τ) 是固定的)如定理 7 推出的那样，是关于 η 的一致 Hölder 连续的，其中指数为任何小于 α 的数．由第 3 节定理 3，4 可推出，这个积分对 x 的前两阶导数存在，且可改变对 x 的任意阶(直到二阶)微分的以及积分的次序．于是可知 Γ 关于 x 的前两阶导数存在，并且

$$\frac{\partial^2 \Gamma(x, t; \xi, \tau)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 Z(x, t; \xi, \tau)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$+ \int_\tau^{t_0} \int_D \frac{\partial^2 Z(x, t; \eta, \sigma)}{\partial x_i \partial x_j} \Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta d\sigma$$

$$(4.27) \qquad + \int_{t_0}^t d\sigma \int_D \frac{\partial^2 Z(x, t; \eta, \sigma)}{\partial x_i \partial x_j} \Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta.$$

对于 $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}$ 有类似的公式成立.

利用第 3 节定理 5，如同对于 $\partial \Gamma / \partial x_i$，$\partial^2 \Gamma / \partial x_i \partial x_j$ 的考虑一样，可以肯定 $\partial \Gamma(x, t; \xi, \tau) / \partial t$ 存在，且公式

$$(4.28) \qquad \frac{\partial \Gamma(x, t; \xi, \tau)}{\partial t} = \frac{\partial Z(x, t; \xi, \tau)}{\partial t}$$

$$+ \int_\tau^{t_0} \int_D \frac{\partial Z(x, t; \eta, \sigma)}{\partial t} \Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta d\sigma - \Phi(x, t; \xi, \tau)$$

$$+ \int_{t_0}^t d\sigma \int_D \frac{\partial Z(x, t; \eta, \sigma)}{\partial t} \Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta$$

成立.

综合(4.28)，(4.27)以及 $\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}$ 的类似于 (4.27) 的公式，我们得到

$$L\Gamma(x, t; \xi, \tau) = LZ(x, t; \xi, \tau) - \Phi(x, t; \xi, \tau)$$
$$+ \int_\tau^t \int_D LZ(x, t; \eta, \sigma) \Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta d\sigma.$$

因为 Φ 满足积分方程(4.1)，所以 $L\Gamma = 0$.

利用(2.8)和第 3 节引理 1 的证明方法，可以证明 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 是 (x, t) 的连续函数；如果 $t - \tau \geqslant \text{const.} > 0$，它关于 (ξ, τ) 是一致连续的；它也是 (ξ, τ) 的连续函数；如果 $t - \tau > \text{const.}$，它关于 (x, t) 是一致连续的. 因此，$\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 是 $(x, t; \xi, \tau)$ 的连续函数. 这里的 x, ξ 在 $\overline{D}$ 中变化，而 $T_0 \leqslant \tau < t \leqslant T_1$.

利用(4.28)，(4.27)以及对于 $\partial \Gamma / \partial x_i$ 的类似于(4.27)的公式，

可以类似地证明

$$\frac{\partial \Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i},\quad \frac{\partial^2 \Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i \partial x_j},\quad \frac{\partial \Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial t}$$

都是 $(x,t;\xi,\tau)$ 的连续函数,其中 x,ξ 在 D 中变化,而 $T_0 \leqslant \tau < t \leqslant T_0$. 不过在本章中并不需要它们.

剩下还须证明,对 $\bar{D}$ 中任意的连续函数和 $x \in D$,有

$$\lim_{t \to \tau} \int_D \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi) d\xi = f(x). \tag{4.29}$$

由于第 2 节定理1,只要证明当 $t \to \tau$ 时有

$$I = \int_D \int_\tau^t \int_D |Z(x,t;\zeta,\sigma)\Phi(\zeta,\sigma;\xi,\tau)| d\zeta d\sigma d\xi \to 0 \tag{4.30}$$

就够了. 利用 (4.9) ($\mu = n/2$), (4.15) 以及引理 3, 我们得到

$$I \leqslant \text{const.} \int_D (t-\tau)^{(\alpha-n)/2} \exp\left[-\frac{\lambda_0^* |x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi.$$

作代换 $\rho = |x-\xi|(t-\tau)^{-1/2}$, 即得

$$I \leqslant \text{const.}(t-\tau)^{\alpha/2},$$

由此推出 (4.30).

5. 基本解的性质

在第 3 节我们引进了关于拟基本解 $Z(x,t;\xi,\tau)$ 的体积位势的概念,并证明了它的若干可微性质(定理 2—6). 本节的目的是对基本解 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 的体位势作类似的研究. 于是考虑形如

$$W(x,t) = \int_{T_0}^t \int_D \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau \tag{5.1}$$

的函数. 为简单起见, 总假定 f 在 $\Omega = \bar{D} \times [T_0, T_1]$ 中是连续的.

如将 Γ 代之以它的表达式(2.8),则得到

$$W(x,t) = V(x,t) + U(x,t), \tag{5.2}$$

其中 $V(x,t)$ 是位势 (3.1), 而 $U(x,t)$ (经改变积分次序后)可写为

$$U(x,t) = \int_{T_0}^t \int_D Z(x,t;\xi,\tau) \hat{f}(\xi,\tau) d\xi d\tau, \tag{5.3}$$

其中

$$(5.4) \qquad \hat{f}(x, t) = \int_{T_0}^{t}\int_D \Phi(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

当 $t < \tau$ 时，如果定义 $\Phi(x, t; \xi, \tau) = 0$，再顾及 (4.8) 就推知，第 3 节引理 1 可用于 (5.4) 的右边．因此 $\hat{f}(x, t)$ 是一连续函数．$\hat{f}$ 对 x 还是任意指数 $\beta < \alpha$ 的一致 Hölder 连续函数．事实上，利用(4.17)，我们得到

$$(5.5) \quad |\hat{f}(x, t) - \hat{f}(y, t)| \leqslant \text{const.}|x-y|^{\beta}[A(x, t) + A(y, t)],$$

其中

$$A(x, t) = \int_{t_0}^{t}\int_D (t-\tau)^{-(n+2-\gamma)/2} \exp\left[-\frac{\lambda^*|x-\xi|^2}{t-\tau}\right] d\xi d\tau.$$

(对于固定的 τ) 作代换 $\rho = |x-\xi|(t-\tau)^{-1/2}$，我们得到

$$A(x, t) \leqslant \text{const.}\int_{T_0}^{t} (t-\tau)^{(\gamma-2)/2} d\tau \leqslant \text{const.}$$

对 $A(y, t)$ 有类似的不等式成立．把这些不等式代入(5.5)就可推出，$\hat{f}(x, t)$ 对 x 的一致 Hölder 连续性(指数为 β)．

定理 9　如果 $f(x, t)$ 是 Ω 中的连续函数，那么 $W(x, t)$ 是 Ω 中的连续函数，且当 $x \in D$, $T_0 < t \leqslant T_1$ 时 $\partial W/\partial x_i$ 是连续函数．如果 $f(x, t)$ 对 $x \in D$ 是局部 Hölder 连续的，而对 t 是一致的，那么，当 $x \in D$, $T_0 < t \leqslant T_1$ 时，$\partial^2 W/\partial x_i \partial y_j$ 和 $\partial W/\partial t$ 都是连续函数，且

$$(5.6) \qquad LW(x,t) = -f(x,t).$$

证明　此定理的一切结论 (除 (5.6) 外) 都可以应用第 3 节的定理 2—5 从公式(5.2)—(5.4)以及 $\hat{f}(x, t)$ 对 x 的 Hölder 连续性直接推出．

(5.6)是第 3 节定理 6 和(4.1)的推论．事实上

$$LW(x, t) = -f(x, t) - \hat{f}(x, t) + \int_{T_0}^{t}\int_D LZ(x, t; \xi, \tau)$$
$$\times f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{T_0}^{t}\int_D LZ(x, t; \eta, \sigma)\hat{f}(\eta, \sigma) d\eta d\sigma$$
$$= -f(x, t) + \int_{T_0}^{t}\int_D f(\xi, \tau)\Big\{-\Phi(x, t; \xi, \tau)$$

$$+ LZ(x, t; \xi, \tau) + \int_\tau^t \int_D LZ(x, t; \eta, \sigma)$$

$$\times \Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau) d\eta d\sigma \Big\} d\xi d\tau = -f(x, t).$$

6. 无界区域的基本解

本节将把 1—5 节的结果推广到D为 R^n 中某一无界区域的情形. 特殊情形 $D = R^n$ 尤为重要. 因为大多数讨论与D为有界的情形相类似,所以我们仅叙述那些必要的修改.

当D为无界时，本章总是认为L满足如下假定（D为有界时这些假定与第 1 节的 (A_1), (A_2) 是相符合的):

$(A_1)'$ 在 $\Omega = \bar{D} \times [T_0, T_1]$ 中L是一致抛物的;

$(A_2)'$ L的系数都是Ω中的有界连续函数，且 (1.4), (1.5), (1.6)在整个Ω中成立.

基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 的定义如同第 1 节,只是在 (ii) 中我们要求 $f(x)$ 对某个正常数 h, 满足不等式

$$|f(x)| \leqslant \text{const.} \exp[h|x|^2]. \tag{6.1}$$

在(1.7)中的积分仅当 $4h(t - \tau) < \lambda_0$. 时存在(其中 λ_0 与(2.2)中的相同). 如果

$$h < \frac{\lambda_0}{4(T_1 - T_0)}, \tag{6.2}$$

那么对于一切 $T_0 \leqslant \tau < t \leqslant T_1$ (1.7) 中的积分存在.

不等式 (4.9)—(4.13) 对于D为无界的情形显然也是正确的. 不等式 (4.14)—(4.16) 和 (4.17)的证明,无需作任何改动,也是正确的. 只要第 2、3 节的定理 2—6 对D为无界时仍然有效,第 4 节定理 8 的证明作明显的修改即可推广. 为了在D为无界的情况证明这些定理，我们把积分区域分为两个区域而把积分 $\int g(x, t; \xi, \tau) d\xi$ 拆成两部分. 第一个区域 D_0 是有界的且包含 x, 而它的余区域 D_1 是无界的. 第一个积分可以象在第 2、3 节中那样处理,由于第二个积分并不含奇性,可根据微积分的一般定理来处理.

在第 2 节定理 1 的证明中,我们写成 $J = J' + J''$, 其中 J' 是取在含有 x 的有界区域 D_0 上的对 ξ 的积分，使得当 $\xi \notin D_0$.时 $|\xi$

$-x|\geqslant 1$. 于是，就完全可以象在定理 1 的证明中处理 J 那样来处理 J'. 至于 J'', 假定

$$(6.3)\qquad |f(x,t)|\leqslant \text{const.}\exp[h|x|^2]$$

其中 h 满足(6.2)，并注意到积分

$$I\equiv\int_{|\xi-x|\geqslant 1}\exp[h|\xi|^2]\exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]d\xi$$

当 λ_0^* 充分接近 λ_0 时对一切 $T_0<\tau<t\leqslant T_1$ 是收敛的，此外当 $t-\tau<\dfrac{\lambda_0^*}{8h}$ 时，

$$I\leqslant \text{const.}\exp\left[-\frac{\lambda_0^*}{8(t-\tau)}\right],$$

我们就可断言，对一切 $T_0\leqslant\tau<t\leqslant T_1$，$J''$ 存在且连续，并当 $\tau\to t$ 时 $J''\to 0$. 从而得出定理 1 的结论.

我们来推广第 3 节的结果. 由于(6.3)，(6.2)，(4.9)，积分 (3.1) 存在. 把沿 D 的积分拆成两部分并分别处理，就可推出 $V(x,t)$ 的连续性. 由一般的微积分定理就可推出相应于 D 的无界部分 D_1 (x 离开 D_1 为有界) 的积分的连续性，而应用第 3 节引理 1 可得出相应于 D 的有界部分 D_0 的那个积分的连续性.

为了推广第 3 节定理 3，我们又把 V 拆成两个积分 $V'+V''$. V' 相应于 D_0，且可象在第 3 节中那样来处理. 至于 V''，因为被积函数并无奇性，所以由一般的微积分定理即可推出 $\partial V''/\partial x_i$ 存在且等于被积函数对 x_i 的导数的积分. $\partial V/\partial x_i$ 的连续性可由 $\partial V'/\partial x_i$，$\partial V''/\partial x_i$ 的连续性推出.

由同样的考虑，我们可推广第 3 节的定理 4，5.

把第 2—4 节的结果推广到 D 为无界的情形之后，其证明无需作任何改动就可将第 5 节的结果也推广到这一情形. 为今后查阅方便，我们把这些(关于任意区域 D 的)结果总结成如下定理:

定理 10 设 D 为 R^n 中任一区域，并假定$(A_1)'$，$(A_2)'$成立，则 $Lu=0$ 的基本解 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 存在，且由 (2.8) 和(4.1)给出. 如果 $f(x,t)$ 为 Ω 中满足(6.3)的任意连续函数，其中 h 满足(6.2)，

那么由(5.1)定义的函数 $W(x, t)$ 是 Ω 中的一致连续函数. 如果 $f(x, t)$ 关于 $x\in D$ 是局部 Hölder 连续的，而关于 t 是一致 Hölder 连续的，那么 $\partial W/\partial x_i$, $\partial^2 W/\partial x_i\partial x_j$, $\partial W/\partial t$ 都存在，而且当 $x\in D, T_0 < t \leqslant T_1$ 时是连续函数，且 $LW(x, t) = -f(x, t)$.

设 $(A_1)'$, $(A_2)'$ 关于 $D = R^n$ 成立，并考虑函数

$$(6.4)\qquad \widetilde{W}(x, t) = \int_{R^n} \Gamma(x, t; \xi, T_0)\varphi(\xi)d\xi$$

其中 $\varphi(x)$ 为 R^n 中满足

$$(6.5)\qquad |\varphi(x)| \leqslant \text{const.}\exp[h|x|^2] \qquad \left(h < \frac{\lambda_0}{4(T_1 - T_0)}\right)$$

的连续函数. 我们可以将 $\widetilde{W}$ 作类似于(5.1)那样的分解: $\widetilde{W} = \widetilde{V} + \widetilde{U}$, 其中

$$(6.6)\qquad \widetilde{V}(x, t) = \int_{R^n} Z(x, t; \xi, T_0)\varphi(\xi)d\xi,$$

$$(6.7)\qquad \widetilde{U}(x, t) = \int_{T_0}^{t}\int_{R^n} Z(x, t; y, \sigma)\hat{\varphi}(y, \sigma)\, dy\, d\sigma$$

其中

$$(6.8)\qquad \hat{\varphi}(x, t) = \int_{R^n} \Phi(x, t; \xi, T_0)\varphi(\xi)d\xi.$$

利用(6.5)和(4.17)(据定理 7 的推论, (4.17)对任意 $\lambda^* < \frac{\lambda_0}{4}$ 成立)可知 $\hat{\varphi}(x, t)$ 关于 x 是局部 Hölder 连续的，而对于区间 $T_0 + \varepsilon \leqslant t \leqslant T_1$, $\varepsilon > 0$ 中的 t 是一致 Hölder 连续的. 由此推出

$$(6.9)\qquad L\widetilde{W} = \int_{R^n} LZ(x, t; \xi, T_0)\varphi(\xi)d\xi + \int_{T_0}^{t} d\sigma \int_{R^n} LZ(x, t; y, \sigma)\hat{\varphi}(y, \sigma)\, dy - \hat{\varphi}(x, t).$$

用(6.8)代替 $\hat{\varphi}$ 并改变积分次序，我们得到

$$L\widetilde{W} = \int_{R^n} \Big\{ LZ(x, t; \xi, T_0) + \int_{T_0}^{t} d\sigma \int_{R^n} LZ(x, t; y, \sigma)\Phi(y, \sigma; \xi, T_0)\, dy$$

$$-\Phi(x, t; \xi, T_0)\Big\}\varphi(\xi)d\xi = 0$$

于是我们有:

定理 11 若当 $D = R^n$ 时 (A_1') 和 (A_2') 的假定是满足的，又设 $\varphi(x)$ 为 R^n 中满足(6.5)的连续函数，则由 (6.4) 定义的函数 $\widetilde{W}$ 在 $T_0 < t \leqslant T_1$ 中存在，且对于 $T_0 < t \leqslant T_1$ 满足

$$L\widetilde{W}(x, t) = 0, \tag{6.10}$$

当 $t \to T_0$ 时，有

$$\widetilde{W}(x, t) \to \varphi(x). \tag{6.11}$$

往后我们需要下面的不等式：对任意 $\lambda_0^* < \lambda_0$ 有

$$|\Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \text{const.}(t-\tau)^{-n/2} \times \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right], \tag{6.12}$$

$$\left|\frac{\partial \Gamma(x, t; \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant \text{const.}\ (t-\tau)^{-(n+1)/2} \times \exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right]. \tag{6.13}$$

为了证明 (6.12)，我们应用 (4.9) $\left(取\ \mu = \dfrac{n}{2}\right)$和(4.15)，再借助于第 4 节引理 3，就得到 (2.8)右边那个积分的界. 把这个界和 (4.9) ($\mu = n/2$) 结合起来，再回顾 (2.8)，就推出不等式 (6.12). 应用(4.10) (取 $\mu = (n+1)/2$) 就可以类似的方法推出(6.13).

我们以关于条件(1.4)的记注来结束本节. 在第九章中，我们将对任意阶的抛物型方程组构造基本解，假如限制这些结果仅仅是关于抛物型方程(1.2)的，那么我们就发现只要用较弱的条件

$$|a_{ij}(x, t) - a_{ij}(x^0, t)| \leqslant A|x - x^0|^\alpha \tag{6.14}$$

代替 (1.4)，第 2—6 节的所有结果仍然有效.

在这一较弱条件下我们仍能得到同样的结果的原因，在于第九章中我们把系数依赖于 t 的抛物型方程的基本解 Z 作为拟基本解. Z 是不以显式给出的，这需要作一些补充解释，但在本章中却不会遇到.

7. Cauchy 问题

在 $\Omega \equiv R^n \times [0, T]$ 中给定了函数 $f(x, t)$，在 R^n 中给定了函数 $\varphi(x)$，要求一个函数 $u(x, t)$，在 $\Omega_0 \equiv R^n \times (0, T]$ 中满足抛物型方程

$$Lu(x, t) = f(x, t), \tag{7.1}$$

在 R^n 上满足初始条件

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{7.2}$$

的问题称为(在带形 $0 \leqslant t \leqslant T$ 中的) Cauchy 问题，其中 L 由(1.2)定义. 我们总要求问题的解在 Ω 中是连续的.

假定 $f(x, t)$ 和 $\varphi(x)$ 满足有界性条件

$$|f(x, t)| \leqslant \text{const.}\exp[h|x|^2], \tag{7.3}$$

$$|\varphi(x)| \leqslant \text{const.}\exp[h|x|^2], \tag{7.4}$$

其中 h 为满足

$$h < \lambda_0/4T \tag{7.5}$$

的任意正常数.

定理 12 假定 L 满足 $(A_1)'$, $(A_2)'$ (对 $D = R^n$, $T_0 = 0$, $T_1 = T$)，以及 $f(x, t)$, $\varphi(x)$ 分别是 Ω 和 R^n 中满足(7.3)，(7.4)的连续函数，并设 $f(x, t)$ 对 $x \in R^n$ 是局部 Hölder 连续的(指数 α)，而对于 t 是一致的，那么函数

$$u(x, t) = \int_{R^n} \Gamma(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi)d\xi - \int_0^t \int_{R^n} \Gamma(x, t; \xi, \tau)f(\xi, \tau)d\xi d\tau \tag{7.6}$$

是 Cauchy 问题(7.1)，(7.2)的解，并且对于 $(x, t) \in \Omega$ 有

$$|u(x, t)| \leqslant \text{const.}[k|x|^2], \tag{7.7}$$

其中 k 为仅依赖于 h, λ_0 和 T 的常数.

证明 鉴于第 6 节的定理 10 和 11，剩下只须证明(7.7). 为此需要下面的引理.

引理 4 对任意的 $h > 0$, $\varepsilon > 0$，存在某个 $C = C(h, \varepsilon)$，使得对于一切 $x \in R^n$, $\xi \in R^n$，不等式

$$h|x - \xi|^2 - (h + \varepsilon)|\xi|^2 \leqslant C|x|^2 \tag{7.8}$$

成立.

证明　　若$\xi=0$，则(7.8)对任意$C\geqslant h$成立. 若$\xi\neq 0$，令$y=x/|\xi|$，$e=\xi/|\xi|$，则(7.8)有如下形式:

$$h|y-e|^2-(h+\varepsilon)\leqslant C|y|^2. \tag{7.9}$$

现在如果$|y-e|^2\leqslant(h+\varepsilon)/h$，于是左边$\leqslant 0$，因而(7.9)成立. 另一方面，如果$|y-e|^2>(h+\varepsilon)/h$，那么

$$|y|>[(h+\varepsilon)/h]^{1/2}-1\equiv\vartheta>0,$$

因而当C仅依赖于h，ϑ且充分大时(7.9)显然成立.

回来证明(7.7). 首先利用假定(7.5)从(6.12)，对某个充分小的$\varepsilon>0$，我们得到不等式

$$|\Gamma(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{n/2}}\exp\left[-\frac{\varepsilon|x-\xi|^2}{t-\tau}\right]\times\exp[-(h+\varepsilon)|x-\xi|^2].$$

用这个不等式和(7.3)去估计(7.6)右边的第二个积分，并以ξ代换$x-\xi$，我们得到估计界

$$\text{const.}\left\{\int_0^t\int_{R^n}\frac{\exp[-\varepsilon|\xi|^2/(t-\tau)]}{(t-\tau)^{n/2}}\right\}\sup_{\xi}\{\exp[h|x-\xi|^2-(h+\varepsilon)|\xi|^2]\}\leqslant\text{const.}\exp[C|x|^2],$$

这里已使用了(7.8). 用同样的方法可估计(7.6)右边的第一个积分.

8. 伴随方程

由定义，(1.2)的伴随方程是方程

$$L^*v=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i^*(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i}+C^*(x,t)v+\frac{\partial v}{\partial t}=0, \tag{8.1}$$

其中

$$b_i^*=-b_i+2\sum_{j=1}^n\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}, \tag{8.2}$$

$$C^* = c - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

于是我们也可写成

$$(8.3)\qquad L^* v = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij} v) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv + \frac{\partial v}{\partial t}.$$

当谈到 L^* 时,我们总假定 $\partial a_{ij}/\partial x_h$, $\partial^2 a_{ij}/\partial x_h \partial x_K$, $\partial b_i/\partial x_h$ 都存在,且设它们都是连续函数.

如果 u 和 v 都是 Ω 中的光滑函数(在上下文中"光滑性"是指对 x 的前两阶导数和对 t 的一阶导数存在并且连续),那么容易验证

$$(8.4)\qquad vLu - uL^*v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(v a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} - uv \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right) + b_i uv\right] - \frac{\partial}{\partial t}(uv).$$

这一恒等式称为关于算子 L 的 **Green 恒等式**.

如果 u 和 v 在 Ω 边界的某个邻域中为零, 那么, 我们对 (8.4) 的两边积分,得到

$$(8.5)\qquad \int_{\Omega} (vLu - uL^*v)\, dxdt = 0.$$

定义 一个(关于自变量 $x_1, \cdots, x_m$ 的)**线性偏微分算子**是指形如

$$\sum a_{K_1 \cdots K_m}(x) \frac{\partial^{K_1 + \cdots + K_m}}{\partial x_1^{K_1} \cdots \partial x_m^{K_m}}$$

的有限和. $a_{K_1 \cdots K_m}(x)$ 称为这个算子的**系数**.

定理 13 设 L^* 存在,又设 $\hat{L}$ 是关于变量 (x, t) 的线性偏微分算子,且其系数是连续的,并对所有光滑的在 Ω 边界的某个邻域内为零的 u, v 满足

$$(8.6)\qquad \int_{\Omega} (vLu - u\hat{L}v) dxdt = 0,$$

则 $\hat{L} = L^*$, 即 $\hat{L}$ 的系数与 L^* 的系数恰好全同.

事实上,由(8.5),(8.6)推出,对一切如(8.6)中所述的 u, v, 有

$$\int_{\Omega} u(L^* - \hat{L})v dx dt = 0.$$

因此 $(L^* - \hat{L})v = 0$. 我们可以使用下面的定理,其证明留给读者(见问题 2).

定理 14 如果M是关于变量 $x_1 \cdots x_m$ 的线性偏微分算子,其系数定义在区域G中,且对一切在G中有紧支柱的无穷可微函数有 $Mv = 0$,那么 $M = 0$,即M的系数恒为零.

由定理 13 得知,L的伴随算子 L^* 也可以等价地由条件(8.5)来定义. 把(8.5)写成如下形式

$$\int_{\Omega} (uL^*v - vLu) dx dt = 0,$$

我们就能断定

$$(L^*)^* = L. \tag{8.7}$$

定义 $L^*v = 0$ 的基本解是一个对所有 $(x, t) \in \Omega$, $(\xi, \tau) \in \Omega$, $t < \tau$ 都有定义的函数 $\Gamma^*(x, t; \xi, \tau)$, 它满足以下条件:

(i) 对每一固定的 (ξ, τ), 作为 (x, t) 的函数 $(x \in D, T_0 \leqslant t < \tau)$ 满足方程 $L^*v = 0$.

(ii) 对 $\overline{D}$ 中每一连续函数 $f(x)$ (如D为无界, $f(x)$ 满足(6.1))有

$$\lim_{t \nearrow \tau} \int_D \Gamma^*(x, t; \xi, \tau) f(\xi) d\xi = f(x). \tag{8.8}$$

现在我们仅就 $D = R^n$ 的情形而论, 而且除第 6 节的 $(A_1)'$ 外,还假定有如下条件:

$(A_3)'$ 函数

$$a_{ij}, \frac{\partial}{\partial x_h} a_{ij}, \frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_K} a_{ij}; b_i, \frac{\partial}{\partial x_h} b_i; c \tag{8.9}$$

都是 $\Omega = R^n \times [T_0, T_1]$ 中的有界连续函数;对于 $x \in R^n$ 它们满足一致的 Hölder 条件(指数 α), 关于 t 是一致的,且(1.4)在整个区域Ω上成立.

于是,可以用构造Γ的方法来构造 $L^*v = 0$ 的基本解Γ^*. 我

们取

$$Z^*(x,t;\xi,\tau)=C(\xi,\tau)(\tau-t)^{-n/2}\times\exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(\tau-t)}\right]\quad(t<\tau)\tag{8.10}$$

作为拟基本解．Z^* 满足方程 $L_0^*v=0$，其中 L_0 由(2.7)定义．现在以

$$\Gamma^*(x,t;\xi,\tau)=Z^*(x,t;\xi,\tau)+\int_\tau^t\int_D Z^*(x,t;\eta,\sigma)\Phi^*(\eta,\sigma;\xi,\tau)d\eta d\sigma\tag{8.11}$$

代替(2.8)，其中 Φ^* 是积分方程

$$\Phi^*(x,t;\xi,\tau)=L^*Z^*(x,t;\xi,\tau)+\int_t^\tau\int_D L^*Z^*(x,t;\eta,\sigma)\Phi^*(\eta,\sigma;\xi,\tau)d\eta d\sigma\tag{8.12}$$

的解．

类似于第 6 节定理 10 的结果是成立的，且有类似于(6.12)与(6.13)的不等式：

$$|\Gamma^*(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\text{const.}\ (\tau-t)^{-n/2}\times\exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(\tau-t)}\right],\tag{8.13}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^*(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant\text{const.}\ (\tau-t)^{-(n+1)/2}\times\exp\left[-\frac{\lambda_0^*|x-\xi|^2}{4(\tau-t)}\right].\tag{8.14}$$

定理 15　在假定 $(A_1)'$，$(A_3)'$ 下，$L^*v=0$ 的基本解 Γ^* 存在，且

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=\Gamma^*(\xi,\tau;x,t)\quad(t>\tau).\tag{8.15}$$

证明　Γ^* 的存在性已讨论过，剩下只须证明(8.15)．考虑函数

$$u(y,\sigma)=\Gamma(y,\sigma;\xi,\tau),$$
$$v(y,\sigma)=\Gamma^*(y,\sigma;x,t),$$

其中 $y\in R^n$，$\tau<\sigma<t$。

在区域 $|y| < R$，$\tau + \varepsilon < \sigma < t - \varepsilon$ $(R > 0,\ \varepsilon > 0)$ 上积分 Green 恒等式(8.4)，并利用 $Lu = 0$，$L^*v = 0$，就得到

$$
(8.16)\qquad \int_{|y|<R} u(y, t-\varepsilon)v(y, t-\varepsilon)\,dy - \int_{|y|<R} u(y, \tau+\varepsilon)v(y, \tau+\varepsilon)\,dy = I_{\varepsilon,R},
$$

其中

$$
I_{\varepsilon,R} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\tau+\varepsilon}^{t-\varepsilon} \int_{|y|=R} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(v a_{ij} \frac{\partial u}{\partial y_j} - u a_{ij} \frac{\partial v}{\partial y_j} - uv \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_j} \right) + b_i uv \right] \cos(\nu, y_i)\, dS_y\, d\sigma,
$$

ν 是 $|y| = R$ 的外向法线，dS_y 是 $|y| = R$ 上的曲面元素． 利用(6.12)，(6.13) 与 (8.13)，(8.14) 得到，当 $R \to \infty$ 时，$I_{\varepsilon,R} \to 0$. 因此

$$
\int_{R^n} u(y, t-\varepsilon)\Gamma^*(y; t-\varepsilon; x, t)\,dy = \int_{R^n} v(y, \tau+\varepsilon)\Gamma(y, \tau+\varepsilon; \xi, \tau)\,dy
$$

取 $\varepsilon \to 0$，并利用基本解定义中的第二个性质，就得到 $u(x, t) = v(\xi, \tau)$，即(8.15)成立.

9. Cauchy 问题的唯一性

在第 7 节我们曾证明满足(7.7)的 Cauchy 问题(7.1)和(7.2)解的存在性．现在我们证明唯一性定理.

定理 16 设 L 在 $\Omega = R^n \times [0, T]$ 中适合条件 $(A_1)'$，$(A_3)'$，则 Cauchy 问题 (7.1)，(7.2) 最多存在一个满足有界性条件

$$
(9.1)\qquad \int_0^T \int_{R^n} |u(x, t)| \exp[-k|x|^2]\, dx dt < \infty
$$

的解，其中 k 为某个正数.

由此可以推知，在补充假定 $(A_3)'$ 和第 7 节定理 12 的条件下，满足 (7.7) 的 Cauchy 问题 (7.1)，(7.2) 存在唯一的解.

证明　我们必须证明，如果 $Lu(x, t) = 0$，$u(x, 0) = 0$，那么 $u(x, t) = 0$. 首先将证明对于某个充分小的 δ，当 $0 \leqslant t < \delta$

时，有 $u(x, t) \equiv 0$. 设 $(\bar{x}, \bar{t})$ 为一任意固定的点，其中 $0<\bar{t}<\delta$. 我们来证明 $u(\bar{x}, \bar{t})=0$. 以 B_R 表示 R^n 中以 $\bar{x}$ 为心，R 为半径的球，设 B'_R 为 B_R 关于 B_{R+1} 的余集.

在 R^n 中存在一个两次连续可微的函数 $h(\xi)$，它有如下的性质（见问题 4）：

$$h(\xi)=\begin{cases}1 & \text{当 } \xi\in B_R \text{ 时},\\ 0 & \text{当 } \xi\notin B_{R+1} \text{ 时},\end{cases} \tag{9.2}$$

$$0\leqslant h(\xi)\leqslant 1,\ \sum_i\left|\frac{\partial h(\xi)}{\partial \xi_i}\right| + \sum_{i,j}\left|\frac{\partial^2 h(\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\right|\leqslant H \qquad (\xi\in R^n), \tag{9.3}$$

其中 H 是与 R 无关的常数.

对于 $u=u(\xi,\tau)$, $v=h(\xi)\Gamma(\bar{x},\bar{t};\xi,\tau)$，把 Green 恒等式 (8.4) 在区域 $\xi\in B_{R+1}$, $0<\tau<\bar{t}-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ 上积分，并利用 $u(x,0)\equiv 0$，我们就得到，当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\lim_{\tau\nearrow\bar{t}}\int_{B_{R+1}} h(\xi)\Gamma(\bar{x},\bar{t};\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi = \int_0^{\bar{t}}\int_{B_{R+1}} uL^*v\,d\xi d\tau, \tag{9.4}$$

因为在 B_{R+1} 之外 $h(\xi)\equiv 0$，所以在 B_{R+1} 边界上的积分不出现. (9.4) 的左边等于 $h(\bar{x})u(\bar{x},\bar{t})=u(\bar{x},\bar{t})$. 利用 (9.2) 和 $L^*\Gamma(\bar{x},\bar{t};\xi,\tau)=0$（它可由 (8.15) 推出），我们得到，如 $\xi\in B_R$，则 $L^*v=0$. 因此，

$$u(\bar{x},\bar{t})=\int_0^{\bar{t}}\int_{B'_R} u\left[2\sum a_{ij}\frac{\partial h}{\partial\xi_i}\frac{\partial\Gamma}{\partial\xi_j}+\sum a_{ij}\frac{\partial^2 h}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\Gamma + \sum b_i\frac{\partial h}{\partial\xi_i}\Gamma\right]d\xi d\tau. \tag{9.5}$$

现在，从(8.15)和(8.13)，(8.14)推出

$$|\Gamma(\bar{x},\bar{t};\xi,\tau)|+\sum_i\left|\frac{\partial}{\partial\xi_i}\Gamma(\bar{x},\bar{t};\xi,\tau)\right| \leqslant \text{const.}\ (\bar{t}-\tau)^{-(n+1)/2}\exp\left[-\frac{\lambda_0^*|\bar{x}-\xi|^2}{4(\bar{t}-\tau)}\right].$$

把它代入(9.5)，我们得到

$$(9.6)\quad |u(\bar{x}, \bar{t})| \leqslant \text{const.} \exp\left[-\frac{\lambda_0^* R^2}{4\delta}\right]\int_0^{\bar{t}}\int_{B_R'} |u(\xi, \tau)| d\xi d\tau.$$

我们利用条件(9.1). 它意味着

$$\int_0^{\bar{t}}\int_{R^n} |u(\xi, \tau)| \exp[-2k|\bar{x}-\xi|^2] d\xi d\tau < \infty.$$

因此，当 $R\to\infty$ 时有

$$(9.7)\qquad \int_0^{\bar{t}}\int_{B_R'} |u(\xi, \tau)| \exp[-2k|\bar{x}-\xi|^2] d\xi d\tau \to 0.$$

比较(9.6)的右边和积分 (9.7)，我们看出，如果 $\delta < \lambda_0^*/8k$，那么当 $R\to\infty$ 时，(9.6)的右边也趋于零. 于是当 $\bar{x}\in R^n$，$0\leqslant \bar{t} < \delta$，且 $\delta = \lambda_0^*/9k$ 时，有 $u(\bar{x}, \bar{t}) = 0$.

用同样的方法，我们可以继续证明在 $\delta\leqslant t<2\delta$，$2\delta\leqslant t<3\delta$ 等等带形中 $u(x, t)=0$. 于是证明完毕.

我们用下面的例子来结束本节. 热传导方程 $(n=1)$

$$u_{xx} - u_t = 0 \qquad (-\infty < x < \infty,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$$

满足初始条件

$$u(x, 0) = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

及有界性条件

$$(9.8)\qquad \int_0^1\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)| \exp[-K|x|^{2+\varepsilon}]\, dxdt < \infty$$

(其中 ε 为任意给定的正数)的解 $u(x, t)\not\equiv 0$ 不恒为零.

大家知道(见[80])对任意 $\delta>0$，存在无穷可微函数 $f(t)\not\equiv 0$ $(-\infty < t < \infty)$，它满足条件：当 $t<0$ 和 $t>1$ 时 $f(t)=0$，而对于 $0\leqslant t\leqslant 1$ 有

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant C^m m^{(1+\delta)m} \qquad (m=1, 2, \cdots),$$

其中 C 是常数. 现在取

$$(9.9)\qquad u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(t)}{(2m)!} x^{2m}.$$

假如 $\delta<1$，则这个级数和它的前二阶导数在 (x, t) 的有界集合中都是一致收敛的. 因为

$$|u(x,t)| \leqslant C_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_2^m x^{2m}}{m^{2m-(1+\delta)m}} \leqslant C_3 \exp[C_4|x|^\eta],$$

其中 C_i 都是常数，而 $\eta = 2/(1-\delta)$，所以我们可以取 δ 充分小，使 $\eta < 2 + \varepsilon$，因而 (9.8) 得到满足.

上述例子表明，若在条件 (9.1) 中用 $\exp[-k|x|^{2+\varepsilon}]$，$\varepsilon > 0$ 代替 $\exp[-k|x|^2]$，则定理16不复为真.

问　　题

1．设 A, B 是 R^n 中两个不相交的闭集，并设 A 有界，试证明在 R^n 中存在这样的无穷可微函数 $h(x)$：当 $x \in A$ 时，$h(x)=1$，当 $x \in B$ 时 $h(x)=0$，而对一切 $x \in R^n$，$0 \leqslant h(x) \leqslant 1$.

[提示：设 $\delta = \text{dist.}(A,B)$，以 A_0 记所有到 A 的距离不超过 $\delta/2$ 的点所组成的集合．取

$$h(x) = \int_{A_0} \rho_\varepsilon(x-y)dy \qquad (\varepsilon = \delta/3)$$

其中

$$\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } |x| \geqslant \varepsilon \text{ 时}, \\ \dfrac{k}{\varepsilon^n} \exp\left[-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right] & \text{当 } |x| < \varepsilon \text{ 时}.] \end{cases}$$

2．证明第 8 节定理 14.

[提示：（由问题 1）对任意的 $x^0 \in G$，取一个在 G 中有紧支集的无穷可微函数 h，使满足 $h(x^0) \neq 0$．利用关系 $M(h\exp[\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n]) = 0$.]

3．对于在区域 G 内有充分光滑系数的任意线性微分算子

$$Lu = \sum a_{K_1 \cdots K_n}(x) \frac{\partial^{K_1+\cdots+K_n} u}{\partial x_1^{K_1} \cdots \partial x_n^{K_n}},$$

由

$$L^* v = \sum (-1)^{K_1+\cdots+K_n} \frac{\partial^{K_1+\cdots+K_n}}{\partial x_1^{K_1} \cdots \partial x_n^{K_n}} [a_{K_1 \cdots K_n}(x) v]$$

定义它的伴随算子．如果 $L^* = L$，我们就说 L 是自伴的．试证明伴随算子的这一定义与下述定义等价：L^* 是这样的线性微分算子，它对于在 G 内有紧支集的所有无穷可微函数 u, v 都有

$$\int_G (vLu - uL^*v)dx = 0.$$

4．试证明满足(9.2),(9.3)的函数 $h(\xi)$ 存在．

[提示：利用问题 1 中的 h，让 $A_0 = B_{R+(1/2)}$，$\varepsilon = 1/4$．]

5．设 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 为 $R^n\times[T_0,T_1]$ 内 $Lu=0$ 的基本解（在条件 $(A_1)'$，$(A_2)'$ 下），试证明：

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=\int_{R^n}\Gamma(x,t;y,\sigma)\Gamma(y,\sigma;\xi,\tau)dy \qquad (\tau<\sigma<t).$$

6．试证明定理 12 中所作的假定 $h<\lambda_0/4T$ 不能放宽．

[提示：取 $u_{xx}-u_t=0$，$u(x,t)=(1-4ht)^{-1/2}\exp[hx^2/(1-4ht)]$．]

7．试验证如果条件(1.5),(1.6)由如下较弱的条件代替，则第一章的一切结果仍然为真：对 D 的每一紧子集 K，存在依赖于 K 的常数 A'，使得对一切 $x\in K$，$x^0\in K$，$T_0\leqslant t\leqslant T_1$，有

$$|b_i(x,t)-b_i(x^0,t)|\leqslant A'|x-x^0|^\alpha,$$

$$|c(x,t)-c(x^0,t)|\leqslant A'|x-x^0|^\alpha.$$

再验证 b_i，c 为整个 Ω 上的连续函数的假定可以换成 b_i，c 为 $D\times(T_0,T_1]$ 内的有界连续函数的假定．

第　二　章

极大值原理及其若干应用

引言　设D是以 $t=0$ 上的开区间 B，$t=T$ 上的开区间 B_T 和在 $0<t\leqslant T$ 上都有定义的两条连续曲线 C_i: $x=\gamma_i(t)$ $(i=1, 2)$ 为界限的二维区域．设u为在(D的闭包) $\bar{D}$ 上连续的函数且在 $D+B_T$ 内满足 $\partial^2u/\partial x^2-\partial u/\partial t\geqslant 0$．(热传导算子的)弱极值原理断言$u$在$\bar{D}$上的最大值必在$D$的边界部分 $\bar{B}+C_1+C_2$ 上达到．强极值原理断言，除非 $u\equiv\text{const}$．u在$\bar{D}$中的极大值不可能在 $D+B_T$ 的任何一点上达到*．

考虑第一初值边值问题:

$$u_{xx}-u_t=f \quad 在D中,$$
$$(0.1) \qquad u=h \quad 在 B+C_1+C_2 上,$$

其中 f 和 h 都是任意给定的函数．由弱极值原理可知，这个问题最多有一个解．第二初值边值问题是求

$$u_{xx}-u_t=f \quad 在D中,$$
$$(0.2) \qquad u=\varphi \quad 在B上,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+\beta u=g \quad 在 C_1+C_2 上$$

的解的问题，其中β是一确定的函数，ν是内向法线，而f，φ，g都是任意给定的函数．如果$\beta\leqslant 0$，则在C_1，C_2的某些假定下，据极值原理可证明解的唯一性．

---

* 更确切的含义是：若在点 $(x_0, t_0)\in B_T$ 达到u的最大值，则 $u\equiv\text{const}$，$(x, t)\in B_T\cap\{t\leqslant t_0\}$．考虑函数

$$u=\begin{cases}0 & 0\leqslant t<\tau\\ -(t-\tau)^2 & \tau\leqslant t\leqslant T\end{cases}\qquad (0<\tau<T)$$

——校者注

本章将证明一般二阶抛物型方程和上述热传导算子有类似的结果. 此外,还给出对于 Cauchy 问题的某些应用; 我们将证明唯一性定理和某些“正值性定理,”即断言当 $u(x, 0) \geqslant 0$ 时有 $u(x, t) \geqslant 0$ 的定理. 在最后一节将把某些结果推广到二阶椭圆型方程.

在本章的大多数定理中，我们都假定微分方程的系数是连续函数. 读者也许会注意到,如果仅假定系数为有界函数,且算子是局部一致抛物的(椭圆的,在第 7 节),则一切结论仍为真.

1. 极大值原理

在 $(n+1)$ 维区域 D 内考虑算子

$$
(1.1)\qquad Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u - \frac{\partial u}{\partial t}.
$$

我们列出往后需要的某些假定:

(A) L 在 D 内是抛物的,即对每一 $(x, t) \in D$ 和任何实向量 $\xi \neq 0$ 有 $\sum a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j > 0$;

(B) L 的系数都是 D 中的连续函数;

(C) 在 D 内 $c(x, t) \leqslant 0$.

我们总是假定(1.1)中的函数 u 在 D 内对 x 有二阶连续导数,对 t 有一阶连续导数.

记号 对于 D 中任意的点 $P^0 = (x^0, t^0)$, 我们以 $S(P^0)$ 记 D 中所有这样的点 Q 的集合，从 Q 点可用 D 内的一条简单连续曲线和 P^0 连接起来，而且沿此曲线从 Q 到 P^0 时，其 t 坐标不减小. 我们以 $C(P^0)$ 记包含 P^0 的 $D \cap \{t = t^0\}$ (在 $t = t_0$ 中) 的组成部分. 注意: $S(P^0) \supset C(P^0)$.

强极值原理断言:

定理 1 设 (A), (B), (C) 成立. 如果在 D 中 $Lu \geqslant 0$ ($Lu \leqslant 0$), 而且 u 在 D 中的某点 $P^0(x^0, t^0)$ 达到正的极大(负的极小)值,那么对于一切的 $P \in S(P^0)$ 都有 $u(P) = u(P^0)$.

在第2节中我们将给出定理1的某些推广.

只要对正极大值的情形证明本定理就够了，因为负极小值的情形可由前一情形用于 $-u$ 而推出. 为清楚起见，我们首先(在 (A)，(B)，(C) 的假定下)建立若干引理.

引理1 假定或者在整个 D 内 $Lu > 0$，或者在整个区域 D 内 $Lu \geqslant 0$ 而 $c(x, t) < 0$，那么 u 在 D 内不可能有正的极大值.

证明 假设 u 在 D 内有正的极大值，我们将导出矛盾. 设 $P^0 = (x^0, t^0)$ 是取得极大值的点. 我们应有

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0, t^0) \frac{\partial^2 u(x^0, t^0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0. \tag{1.2}$$

事实上，由线性变换 $y = Cx$，D 变成区域 D^*，不等式(1.2)变为

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \frac{\partial^2 v(y^0, t^0)}{\partial y_i \partial y_j} \leqslant 0, \tag{1.3}$$

其中 $v(y, t) = u(x, t)$，$y_0 = Cx_0$，$(b_{ij}) = C(a_{ij})C^*$(C^* 为 C 的转置). 取 C 使 (b_{ij}) 变为单位矩阵，再注意到 $v(y^0, t^0)$ 是 v 在 D^* 内的正极大值，故 $\partial^2 v(y^0, t^0)/\partial y_i^2 \leqslant 0$ 成立，我们就看出(1.3)得到满足，因而(1.2)也满足.

为了完成引理的证明，只要注意到在点 (x^0, t^0) 处有 $\partial u/\partial x_i = 0$，$\partial u/\partial t = 0$[1]. 因此

$$Lu(x^0, t^0) \leqslant c(x^0, t^0)u(x^0, t^0).$$

又因为 $u(x^0, t^0) > 0$，所以对于 $Lu > 0$，$c \leqslant 0$ 和 $Lu \geqslant 0$，$c<0$ 的每一种情形我们都得出矛盾.

引理2 设在 D 内 $Lu \geqslant 0$，且 u 在 D 内有正的极大值 M. 如果 D 包含一闭的实心椭球 E:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2 \leqslant R^2 \qquad (\lambda_j > 0,\ R > 0)$$

且在 E 的内部 $u < M$，而在 E 的边界 ∂E 上某点 $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{t})$ 处有 $u(\bar{x}, \bar{t}) = M$，那么 $\bar{x} = x^*$，其中 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$.

---

1) 在 (x^0, t^0) 点，$\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$. ——校者注

证明　我们可以假定 $\bar{P}$ 是 ∂E 上使 $u=M$ 的唯一的点，否则我们可以限于 E 中的与 ∂E 仅有唯一公共点 $\bar{P}$ 的较小的闭椭球来讨论．假定 $\bar{x}\neq x^*$，又设 C 为含于 D 中的中心在 $\bar{P}$，半径 $<|\bar{x}-x^*|$ 的 $(n+1)$ 维闭球．于是对所有的 $(x,t)\in C$ 有

$$|x-x^*|\geqslant \text{const.}>0, \tag{1.4}$$

C 的边界由在 E 中的部分 ∂C_1 和在 E 外的部分 ∂C_2 组成．显然，在 ∂C_1 上，对某个 $\delta>0$，有

$$u<M-\delta. \tag{1.5}$$

引入函数

$$h(x,t)=\exp\left\{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-x_i^*)^2+\lambda_0(t-t^*)^2\right]\right\} - \exp\{-\alpha R^2\}\qquad(\alpha>0). \tag{1.6}$$

在 E 的内部 $h>0$，在 ∂E 上 $h=0$，而在 E 之外 $h<0$．此外，

$$\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-x_i^*)^2+\lambda_0(t-t^*)^2\right]\right\}Lh(x,t)$$
$$=\left\{4\alpha^2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\lambda_i\lambda_j(x_i-x_i^*)(x_j-x_j^*)\ -2\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\lambda_i\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{i=1}^{n}b_i\lambda_i(x_i-x_i^*)-\lambda_0(t-t^0)\right]+c\right\}$$
$$-c\exp\{-\alpha R^2\}\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-x_i^*)^2+\lambda_0(t-t^*)^2\right]\right\}.$$

利用 (1.4) 我们看到，当 α 充分大时，右边第一个大括号里的表达式在 C 内是正的．因为 $c\leqslant 0$，最后的一项 $\geqslant 0$．因而在 C 内有

$$Lh>0. \tag{1.7}$$

在 C 内考虑函数 $v=u+\varepsilon h$ $(\varepsilon>0)$．若 ε 充分小，则由 (1.5) 知在 ∂C_1 上有 $v<M$．在 ∂C_2 上有 $u\leqslant M$ 和 $h<0$；因此在 ∂C_2 上有 $v<M$．于是在 C 的边界上 $v<M$，且 $v(\bar{P})=u(\bar{P})=M$．由此推出在 C 的内部 v 取正的极大值．因为 (1.7) 得到满足，于是我们得到与引理 1 矛盾的结论．因此 $\bar{x}=x^*$．

引理 3 如果在D内 $Lu\geqslant 0$，且u在D内的点 $P^0=(x^0, t^0)$处取得正的极大值，那么对所有的$P\in C(P^0)$，有 $u(P)=u(P^0)$.

证明 设引理不真，于是在 $C(P^0)$ 内存在一点 $P^1=(x^1, t^0)$，使 $u(P^1)<u(P^0)$. 用 $C(P^0)$ 中的一条简单连续曲线γ把P^1和P^0联接起来. 在γ上存在有 $u(P^*)=u(P^0)$ 的某点 $P^*=(x^*, t^0)$，使得对于γ上的介于P^1和P^*间的所有点 $\bar{P}=(\bar{x}, t^0)$，都有 $u(\bar{P})<u(P^0)$. 在P^1和P^*之间取γ上某点 $\bar{P}$，使得由 $\bar{P}$ 到D的边界的距离 $\geqslant 2\overline{\bar{P}P^*}$.

因为 $u(\bar{P})<u(P^*)$，所以存在一充分小的区间 $\sigma: x=\bar{x}$, $t^0-\epsilon\leqslant t\leqslant t^0+\epsilon$，使得对于所有的$P\in\sigma$有

$$u(P)<u(P^*). \tag{1.8}$$

考虑椭球族 E_λ:

$$|x-\bar{x}|^2+\lambda(t-t^0)^2\leqslant R^2 \qquad (\lambda>0).$$

取 $R^2=\lambda\epsilon^2$，使得σ的端点在 E_λ 的边界上. 当 $\lambda\to 0$ 时 $E_\lambda\to\sigma$. 当λ增加时; $E_\lambda\cap\{t=t^0\}$ 无限增加，又由于(1.8)，存在λ的第一个值，设为 $\lambda=\lambda_0$，使得在 E_{λ_0} 的内部有 $u<u(P^*)$，并且在 E_{λ_0} 的某个边界点 $Q=(y, t^0)$ 处 $u=u(P^*)$. 据(1.8)，因为Q不在σ上，即 $y\neq\bar{x}$，于是与引理 2 矛盾.

引理 4 设R为含于D内的矩形

$$x_i^0-a_i\leqslant x_i\leqslant x_i^0+a_i \quad (i=1,\cdots,n), \quad t^0-a_0\leqslant t\leqslant t_0,$$

又设在D内 $Lu\geqslant 0$. 如果u在R内有正的极大值，且在点 $P^0=(x^0, t^0)$处达到，其中 $x^0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$，则对于所有的 $P\in R$ 有 $u(P)=u(P^0)$.

证明 设引理不真，于是在R内存在点Q使 $u(Q)<u(P^0)$. 因为在Q的某个邻域内也有 $u<u(P^0)$，所以我们可以假定Q不在 $t=t^0$ 上. 在联接Q和P^0的直线段γ上存在点P^1，使 $u(P^1)=u(P^0)$，且使对于Q和P^1之间的γ所有的点 $\bar{P}$ 都有$u(\bar{P})<u(P^1)$. 我们可以假定 $P^1=P^0$，且Q在 $t=t^0-a_0$上，否则我们可以限于某个较小的矩形来讨论.

设 R_0 记集合 R 减去顶面 $t=t_0$ 的集合，因为对于 R_0 的每一点 Q'，$C(Q')$ 包含 γ 的某个点，以及在 γ 上 $u<u(P^0)$，所以由引理 3 推知 $u(Q')<u(P^0)$.

引入函数

$$h(x,t)=t^0-t-K|x-x^0|^2 \qquad (K>0). \tag{1.9}$$

在抛物面 M：$t^0-t=K|x-x^0|^2$ 上，$h=0$；在 M 的上部，$h<0$；而在 M 的下部，$h>0$. 设在 R 内 K 满足 $4K\sum a_{ii}\leqslant 1$，如果矩形 R 充分小(我们可以这样假定)，则在 R 内还有

$$Lh=-2K\sum_{i=1}^{n}a_{ii}-2K\sum_{i=1}^{n}b_i(x_i-x_i^0)$$
$$+c[t^0-t-K|x-x^0|^2]+1>0.$$

M 把 R 分成两个区域. 以 R' 表示下部区域. R' 的上边界 B' 仅在点 P^0 处与 $t=t^0$ 接触. 因此，在 R' 边界的其余部分 B'' 上，对某个 $\delta>0$ (由于在 R_0 内 $u<u(P^0)$)，有 $u\leqslant u(P^0)-\delta$. 由此推出，对任何正的充分小的 ε，在 B'' 上有 $v=u+\varepsilon h<u(P^0)$. 其次，对 B' 的所有的点，除 P^0 以外，都有 $v=u<u(P^0)$，且 $v(P^0)=u(P^0)$. 因为在 R' 内 $Lv=Lu+\varepsilon Lh>0$，于是由引理 1 推出，v 在 R' 的边界上取其在 R' 内正的极大值. 由以前的附注，于是 v 在点 P^0 处取得极大值.

由此推出 $\partial v(P^0)/\partial t\geqslant 0$. 因为$\partial h(P^0)/\partial t=-1<0$，所以

$$\frac{\partial u(P^0)}{\partial t}>0. \tag{1.10}$$

另一方面，由假设 u 在 P^0 取得正极大值可知，(1.2) 成立，且 $\partial u(P^0)/\partial x_i=0$，$C(P^0)u(P^0)\leqslant 0$. 因此在 P^0 处 $0\leqslant Lu\leqslant -\partial u/\partial t$，即$\partial u(P^0)/\partial t\leqslant 0$；这与(1.10)矛盾.

我们现在容易完成定理 1 的证明.

定理 1 的证明 假定在 $S(P^0)$ 内 $u\neq u(P^0)$. 于是有某点 $Q\in S(P^0)$ 使 $u(Q)<u(P^0)$. 以 $S(P^0)$ 内的简单连续曲线 γ 把 Q 和 P^0 联接起来，使从 Q 到 P^0 其 t 坐标不减小. 在 γ 上存在点 P^1 使得 $u(P^1)=u(P^0)$，并对 γ 上介于 Q 和 P^1 间的所有的点 $\bar{P}$ 有

$u(\bar{P}) < u(P')$. 以 γ_0 记 γ 的介于 Q 和 P^1 间的那部分子弧. 构造一个矩形:

$$x_i^1 - a \leqslant x_i \leqslant x_i^1 + a \quad (i = 1, \cdots, n), \quad t^1 - a < t \leqslant t^1,$$

其中 $P^1 = (x_1^1, \cdots, x_n^1, t^1)$, 而 a 充分小, 使矩形在 D 内. 应用引理 4 推出,在这个矩形内 $u \equiv u(P^1)$. 因此, 在这个矩形内的 γ_0 的那个线段上也有 $u \equiv u(P^1)$. 可是这与 P^1 的定义相矛盾.

2. 极大值原理的推广

考虑在 $(n + m)$ 维区域 D 内系数为连续的微分算子:

$$(2.1) \quad Mu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial t_i} + c(x, t)u,$$

其中 $(x, t) = (x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_m)$. 假定对所有的 $(x, t) \in D$, $(a_{ij}(x, t))$ 为正定矩阵, $(b_{ij}(x, t))$ 为正半定矩阵. 设在 D 内 $c(x, t) \leqslant 0$.

定理 2 在上述关于 M 的假定下, 如果在 D 内 $Mu \geqslant 0$ ($Mu \leqslant 0$), u 在 D 内有正的极大值(负的极小值)且在点 $P^0 = (x^0, t^0)$ 处达到, 则对所有的 $P \in C(P^0)$ 有 $u(P) = u(P^0)$.

证明 首先我们注意到引理 1 及其证明可推广到算子 M. 引理 2 也可推广到算子 M, 这里椭球是

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (t_i - t_i^*) \leqslant R^2.$$

其余证明可以类似于引理 3 那样进行下去.

定理 3 设 M 如定理 2 中所述, 但省掉 $c \leqslant 0$. 如果 u 在 D 内是非正的(非负的), 而在 D 的点 P^0 处为零, 若在 D 内 $Mu \geqslant 0$ ($Mu \leqslant 0$), 则在 $C(P^0)$ 内 $u \equiv 0$.

证明 考虑 $u \leqslant 0$ 的情形就够了. 函数 $v = u\exp[-\alpha x_1]$ 满足不等式

$$(2.2) \quad \widetilde{M}v \equiv (M - c)v + 2\alpha \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$\geqslant -(a_{11}\alpha^2 + a_1\alpha + c)v.$$

因为 $v \leqslant 0$，所以对 P^0 的任何邻域 $N(N\subset D)$ 存在充分大的 α，使在 N 内有 $\widetilde{M}v \geqslant 0$. 由于在 $\widetilde{M}v$ 中 v 的系数为零，我们可以应用定理 2（设应用于 $v+1$），从而断定在 $N\cap C(P^0)$ 内 $v\equiv 0$，因此在 $N\cap C(P^0)$ 内也有 $u\equiv 0$. 于是 $C(P^0)$ 中使 $u=0$ 的一切点所组成的集合为一开集. 因为它又是闭的，而 $C(P^0)$ 为一连通集，于是推出在 $C(P^0)$ 内 $u\equiv 0$.

下述定理是第 1 节定理 1 较强的说法.

定理 4 设 (A), (B), (C) 成立. 假定 u 在 D 的某点 P^0 处有在集合 $S(P^0)$ 中的正的极大值（负的极小值），且在 P^0 处取得. 此外再假定在 $S(P^0)$ 内 $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$，则对所有的 $P\in S(P^0)$ 有 $u(P)=u(P^0)$.

其证明是和定理 1 的证明一样的，因为在证明定理 1 时我们仅用了 $u(P^0)$ 是 u 在 $S(P^0)$ 中的极大值（不必是 D 中的极大值）这样的事实.

设 F 为超平面 $t=t_1$ 上的一个开区域，并假定 F 为 D 的边界的一部分，而且 D 的在 F 的某个 (x, t) 邻域内的所有的点都属于半空间 $t<t_1$. 假定 $u(x, t)$ 连同它对 x 的前二阶导数和对 t 的一阶导数都在 $D+F$ 内连续. 如果 $P^0\in F$，只要在 $S(P^0)$ 内有 $Lu\geqslant 0$，则定理 4 的证明仍为真，其中 $S(P^0)$ 是对 $D+F$ 定义的（因而当 $P^0\in F$ 时，$S(P^0)$ 包含 F）. 我们把这一附注表为如下定理.

定理 4′ 设在 $D+F$ 内 (A), (B), (C) 成立. 假定在 $D+F$ 的某点 P^0 处 u 有在集合 $S(P^0)$ 中的正的极大值（负的极小值），且在 P^0 处取得. 此外假定在 $S(P^0)$ 内 $Lu \geqslant 0$ $(Lu\leqslant 0)$，则对所有的 $P\in S(P^0)$ 有 $u(P)=u(P^0)$.

把定理 3 及其证明中的推导和第 1 节的定理 1 的证明（从引理 3 起）综合起来，我们得到如下结果.

定理 5 设 (A), (B) 成立. 如果在 $S(P^0)$ 内 $u\leqslant 0$ $(u\geqslant 0)$，$Lu\geqslant 0(Lu\leqslant 0)$ 且 $u(P^0)=0$，则在 $S(P^0)$ 内 $u\equiv 0$.

象定理 4 那样，定理 5 也可推广到 $D+F$.

最后我们给出定理 4 的一个有用的推论，并称之为弱极值原理：

定理 6 设 (A), (B), (C) 成立，D 为有界. 假定 u 为 $\bar{D}$ 上的连续函数，且在 D 内 $Lu \geqslant 0$ ($Lu \leqslant 0$)，则对于每一个 u 在 $\overline{S(P)}$ 中有正的极大(负的极小)值的点 $P \in D$，极大值(极小值)在 $S(P)$ 的余集内的某点上达到.

注意，定理 6 并未断定极大值(极小值)也不能在 $S(P)$ 的点上取得. 关于定理 6 的一个直接证明见问题 1.

附注 如果在定理 1, 2, 4, 4′, 6 中 $c(x, t) \equiv 0$，则对任何常数 A 有 $L(u+A) = Lu$. 因此，如果不假定 u 的极大(极小)值为正的(负的)，所有的论断仍为真.

3. 第一初值边值问题

设 D 为 R^{n+1} 中的一个有界的 $(n+1)$ 维区域，而 $(x, t) = (x_1, \cdots, x_n, t)$ 为 R^{n+1} 中的变点. 设 D 的边界 ∂D 由位于 $t = 0$ 上的区域 B 的闭包，$t = T(T > 0)$ 上的区域 B_T 和位于带形区域 $0 < t \leqslant T$ 中的流形 S (不必为连通的)组成. 对任何集合 G，以 $\bar{G}$ 记 G 的闭包. D 的边界上的 $S + \bar{B}$ 部分称为 D 的正规边界 (normal boundary).

令

$$D_\tau = D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau = D \cap \{t = \tau\},$$
$$S_\tau = S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}$$

并假定 B_τ 为一区域 $(0 < \tau < T)$. 还假定存在一条把 B 和 B_T 联接起来的简单连续曲线 γ，使沿着它 t 坐标不减小. 由此推出，对每一 $(x, \tau) \in D$, $0 < \tau < T$ 有

$$S((x, \tau)) = D_\tau + B_\tau, \tag{3.1}$$
$$\overline{S((x, \tau))} - S((x, \tau)) = \bar{B} + S_\tau.$$

第一初值边值问题是在 $D + B_T$ 内求解微分方程

$$Lu(x, t) = f(x, t), \tag{3.2}$$

使在 $\bar{B}$ 上满足初始条件

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{3.3}$$

在 S 上满足边界条件

(3.4) $$u(x, t)=g(x, t),$$

其中 f, φ, g 都是给定的函数，L 是抛物算子 (1.1). 我们可以把 (3.3) 和 (3.4) 合为一个条件

(3.5) $$u(x, t)=h(x, t) \quad \text{在 } \bar{B}+S \text{ 上.}$$

如无明确的相反说明，我们总假定 h 为 $\bar{B}+S$ 上的连续函数，而解 u 总是指在 $\bar{D}$ 上连续，在 $D+B_T$ 内有对 x 的二阶连续导数和对 t 的一阶连续导数，且使(3.2)和(3.5)得到满足的函数. 不过，如果 h 在某些点 $\bar{P}$ 间断，就不可能要求 u 在 $\bar{P}$ 处连续，而代之以要求

$$\lim_{Q\in \bar{B}+S,\ Q\to\bar{P}} \inf h(Q)=\lim_{P\in D,\ P\to\bar{P}} \inf u(P) \leqslant \lim_{P\in D,\ P\to\bar{P}} \sup u(P)$$
$$=\lim_{Q\in \bar{B}+S,\ Q\to\bar{P}} \sup h(Q).$$

附注 如果对于 i_0 和所有的 $j\neq i_0$, Lu 中 $\partial^2 u/\partial x_{i_0}\partial x_j$ 的系数恒为零,那么解的概念可减弱为不要求导数 $\partial^2 u/\partial x_0\partial x_j$ 存在. 如采用这一较弱的解的概念，则本章和第 1, 3—7 章的所有结果仍为真. (在第 1 节引理 1 的证明中，应这样来选取变换 C，使对一切 $j\neq i_0$ 时 $a_{i_0j}=0$ 的变量 x_{i_0} 除了可能乘以某个常数外都不变.)

定理 7 设 L 满足 (A), (B). 那么第一初值边值问题 (3.2), (3.5) 最多有一个解.

在第三章我们将证明第一初值边值问题解的存在.

证明 如果 $c\leqslant 0$,回顾(3.1)就可从弱极值原理(第 2 节定理 6) 推出本定理的断言. 对于一般情形,可以利用把 $Lu=0$变为 $(L-\epsilon)v=0$ 的变换 $v=e^{-\epsilon t}u$ $(\epsilon\geqslant c)$ 把它归结为 $c\leqslant 0$ 的情形.

考虑非线性微分算子

(3.6) $$Lu\equiv F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)-\frac{\partial u}{\partial t},$$

其中 F 为其变元的非线性函数. 如果对任何 $p, p_1, \cdots, p_n$, $p_{11}, \cdots, p_{nn}$ 矩阵

(3.7) $$\left(\frac{\partial F(x^0, t^0, p, p_i, p_{ij})}{\partial p_{hk}}\right)$$

为正定，我们就说在点 (x^0, t^0) 处 L 是抛物的.

如果在区域 D 内 $Lu^1 = Lu^2$，假定 $\partial F/\partial p$, $\partial F/\partial p_h$, $\partial F/\partial p_{h_k}$ 都是连续函数，则据中值定理有

$$\frac{\partial(u^1 - u^2)}{\partial t} = F\left(x, t, u^1, \frac{\partial u^1}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u^1}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

$$- F\left(x, t, u^2, \frac{\partial u^2}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

$$= \sum a_{hk} \frac{\partial^2(u^1 - u^2)}{\partial x_h \partial x_k} + \sum b_h \frac{\partial(u^1 - u^2)}{\partial x_h} + c(u^1 - u^2),$$

其中 a_{hk}, b_h 和 c 都是连续函数，而且 (a_{hk}) 为正定矩阵.

应用定理 7 我们断定:

定理 8　定理 7 对非线性抛物算子(3.6)仍为真.

下面我们推导方程 $Lu = f$ 所有在 $\overline{D}$ 上连续解 u 的界.

(a) 设 (A), (B), (C) 成立. 如果在 D 内 $Lu = 0$，则有

(3.8) $$\max_{\overline{D}} |u| \leqslant \max_{\overline{B}+S} |u|.$$

把弱极值原理应用于 u 和 $-u$ 即可推出这一点.

(b) 设 (A), (B) 成立，且 $c(x, t) \leqslant \varepsilon$. 如果在 D 内 $Lu=0$，则

(3.9) $$\max_{\overline{D}} |u| \leqslant e^{\varepsilon T} \max_{\overline{B}+S} |u|.$$

事实上，把 (a) 应用于 $v = ue^{-\varepsilon t}$ 即可.

(c) 设 (A), (B), (C) 成立，假定在 D 内对某个正的常数 λ 有 $a_{11}\lambda^2 + b_1\lambda \geqslant 1$，如果在 D 内 $Lu = f$，则

(3.10) $$\max_{D} |u| \leqslant \max_{\overline{B}+S} |u| + (e^{\lambda d} - 1)\max_{\overline{D}} |f|,$$

其中 d 为 $\overline{D}$ 在 x_1 方向的宽度，即 d 为关于某个 x_1^0 使

$$x_1^0 - d \leqslant x_1 \leqslant x_1^0$$

对所有的 x_1 都成立的最小正数，其中 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) \in \overline{D}$.

为了证明(3.10)，我们引进函数

(3.11) $$h(x)=1-\exp[\lambda(x_1-x_1^0)].$$

于是

$$Lh=-(a_{11}\lambda^2+b_1\lambda)\exp[\lambda(x_1-x_1^0)] + ch\leqslant -\exp[\lambda(x_1-x_1^0)]\leqslant -e^{-\lambda d}.$$

考虑函数

$$w=e^{\lambda d}(\max_{\bar D}|f|)h+\max_{\bar B+S}|u|\pm u.$$

显然，$Lw<0$，且在 $\bar B+S$ 上 $w\geqslant 0$. 因此在 D 内 $w\geqslant 0$，由此推出 (3.10).

(*d*) 在 (*c*) 中如果以 $c(x, t)\leqslant \varepsilon$ 代替假定 (*C*)，则有

(3.12) $$\max_{\bar D}|u|\leqslant e^{\varepsilon T}[\max_{\bar B+S}|u|+(e^{\lambda d}-1)\max_{D}|f|].$$

把 (*c*) 应用于 $v=ue^{-\varepsilon t}$ 即可推出这一估计.

4. Cauchy 问题的正解

不仅数学工作者对正的解感兴趣，而且物理工作者也感兴趣，因为根据物理的经验，抛物型方程的解通常表示诸如温度，密度，概率分布等等这样一些正的量.

本节到处使用下面的记号:

$$\Omega_0=R^n\times(0,T],\quad \Omega=R^n\times[0,T].$$

我们总是假定函数 u 在 Ω 内是连续的.

我们经常要用到下面的引理.

引理5 设 L 在 Ω_0 内满足假定 (*A*), (*B*)，而 $c(x, t)$ 为上有界. 如果在 Ω_0 内 $Lu\leqslant 0$，在 R^n 内 $u(x, 0)\geqslant 0$ 且对于 $t(0\leqslant t\leqslant T)$ 一致地有

$$\liminf_{|x|\to\infty} u(x,t)\geqslant 0,$$

则在 Ω 内有 $u(x, t)\geqslant 0$.

证明 我们可以假定 $c\leqslant 0$，否则我们可以先作变换 $v=ue^{-\gamma t}$，其中 $\gamma\geqslant c$. 现在假定 R 充分大，则对任何 $\varepsilon>0$ 在 $t=0$ 和在 $|x|=R$，$0\leqslant t\leqslant T$ 上有 $u(x, t)+\varepsilon>0$. 因为 $L(u+\varepsilon)\leqslant c\varepsilon\leqslant 0$，所以当 $|x|<R$，$0\leqslant t\leqslant T$ 时 $u(x, t)+\varepsilon>0$，于是固定 (x, t) 而让 $\varepsilon\to 0$ 就推出 $u(x, t)\geqslant 0$，即在 Ω 内 $u\geqslant 0$.

以下我们作如下假定：

(4.1) $$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(|x|+1),$$
$$c(x,t) \leqslant M(|x|^2+1),$$

其中 $i, j = 1, \cdots, n$; $(x,t) \in \Omega_0$.

定理 9 设 L 为在 Ω_0 内有连续系数的抛物算子，且满足 (4.1). 假定在 Ω_0 内 $Lu \leqslant 0$，且对某个正的常数 B 和 β 在 Ω 内有

(4.2) $$u(x,t) \geqslant -B\exp[\beta|x|^2].$$

如果在 R^n 内 $u(x,0) \geqslant 0$，则在 Ω 内有 $u(x,t) \geqslant 0$.

证明　函数

(4.3) $$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{1-\mu t} + \nu t\right] \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2\mu}\right)$$

满足：

$$\frac{LH}{H} = \frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum a_{ij}x_i x_j + \frac{2k}{1-\mu t}\sum a_{ii}$$
$$+ \frac{2k}{1-\mu t}\sum b_i x_i + c - \frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} - \nu.$$

利用(4.1)我们得到

$$\frac{LH}{H} \leqslant (16k^2n^2M^2 + 8knM + M - \mu k)|x|^2$$
$$+ (8knM + M - \nu).$$

于是给定了任何 $k > 0$，我们可以选取充分大的正数 μ 和 ν 使

(4.4) $$\frac{LH}{H} \leqslant 0.$$

考虑函数 $v: u = Hv$，其中 H 由 (4.3) 定义，$k > \beta$ 是固定的，而 μ, ν 使 (4.4) 成立 $(0 \leqslant t \leqslant 1/2\mu)$. 由 (4.2)，对 t $(0 \leqslant t \leqslant 1/2\mu)$ 一致地有

$$\liminf_{|x|\to\infty} v(x,t) \geqslant 0.$$

v 满足方程

$$\bar{L}v \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \bar{b}_i\frac{\partial v}{\partial x_i} + \bar{c}v - \frac{\partial v}{\partial t} = \bar{f},$$

其中 $f=(Lu)/H\leqslant 0$，而

$$\bar{b}_i=b_i+2\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial H/\partial x_j}{H},\qquad \bar{c}=\frac{LH}{H}.$$

据(4.4)，因为 $\bar{c}\leqslant 0$，所以可应用引理 5，于是断定在 $R^n\times[0,1/2\mu]$ 内 $v(x,t)\geqslant 0$. 因此对 $u(x,t)$ 也有同样的结论. 当然，我们可以继续逐步证明在 Ω 内 u 的正值性.

由定理 9 我们得到 Cauchy 问题

$$\text{(4.5)}\qquad \begin{aligned} &Lu=f(x,t) && (x,t)\in R^n\times(0,T],\\ &u(x,0)=\varphi(x) && x\in R^n \end{aligned}$$

的唯一性定理如下.

定理 10　设 L 为在 $R^n\times(0,T]$ 中有连续系数的抛物算子，且满足(4.1)，则对某个正的常数 B 和 β 满足

$$\text{(4.6)}\qquad |u(x,t)|\leqslant B\exp[\beta|x|^2]$$

的 Cauchy 问题(4.5)的解最多只有一个.

证明　我们只须证明：如果 $f\equiv 0$，$\varphi\equiv 0$ 则 $u\equiv 0$. 应用定理 9 于 u 和 $-u$ 即可推出这一结论.

把定理 10 和第一章第 9 节定理 16 作一比较是有趣的. 定理 10 对于系数的假定弱多了，有界性条件(4.6)的限制较之相应的条件 (1.9.1) 的限制稍多一些. 更值得注意的差别是在证明方法上：证明定理 10 时我们用极值原理，而证明第一章定理 16 时用基本解. 现在仅对二阶抛物型方程知道极值原理，因此不能把定理 10 的证明推广到更一般的抛物型方程上去. 另一方面，可以对任意阶抛物型方程组构造基本解，所以第一章定理 16 也能推广到那样的方程组上去(见第九章第 5 节).

作为极值原理的另一应用，我们将证明对于仅满足下有界条件 (见下面的定理 13) 的解的唯一性定理. 首先建立在第一章中的 $(A_1)'$, $(A_2)'$ 假定 (见第一章第 6 节) 下已构造出来的基本解 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$的一般性质.

定理 11　设 L 满足第一章第 6 节的假定 $(A_1)'$, $(A_2)'$，则 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 为一正值函数.

证明　对于在 R^n 上有紧支集的任何连续函数 $f(x)$，我们引进函数

$$v(x, t) = \int_{R^n} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi) d\xi.$$

因为对于 $\tau < t \leqslant T$，$Lv = 0$，$v(x, \tau) = f(\xi) \geqslant 0$ 且 lim inf $v(x, t) \geqslant 0$，于是由引理 5 就推出 $v(x, t) \geqslant 0$.

取一非负连续函数的序列 $\{f_m(\xi)\}$，使当 $|\xi - \xi^0| > \frac{1}{m}$ 时

$$f_m(\xi) = 0, \quad 且 \quad \int_{R^n} f_m(\xi) d\xi = 1;$$

例如，取 $f_m(\xi) = \rho_{1/m}(\xi - \xi^0)$，其中 $\rho_\varepsilon(x)$ 为第一章问题 1 中所定义的函数. 以 $v_m(x, t)$ 记对应于 $f = f_m$，$\tau = \tau^0$ 的函数 $v(x, t)$. 于是对任何固定的 (x^0, t^0)，(ξ^0, τ^0)，$t^0 > \tau^0$ 有

$$\lim_{m \to \infty} v_m(x^0, t^0) = \Gamma(x^0, t^0; \xi^0, \tau^0).$$

因为对所有的 m 有 $v_m(x^0, t^0) \geqslant 0$，于是推知 $\Gamma(x^0, t^0; \xi^0, \tau^0) \geqslant 0$. 最后，我们指出对每一固定的 (ξ, τ)，$\Gamma(x, t; \xi, \tau) \not\equiv \text{const}$. 并应用第 2 节定理 5，就可推出 Γ 的严格正值性.

对于某些抛物型方程说来，Γ 不仅是正的，而且当 $|x - \xi| \geqslant 1/\delta$，$t - \tau > \delta$ 时还有如下的下界:

$$\Gamma(x, t; \xi, \tau) \geqslant C \exp[-\gamma |x - \xi|^2], \tag{4.7}$$

其中 δ 为任意正数，而 C 和 γ 则为（依赖于 δ 的）正的常数. 因此对热传导方程的基本解 $\Gamma_0(x, t; \xi, \tau)$，从显然的公式

$$\Gamma_0(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n} (t - \tau)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{|x - \xi|^2}{4(t - \tau)}\right\}$$

就推出不等式(4.7).

注意到如果 Γ 是 (1.1) 的基本解，那么对于任一使得

$$f(x, t) - f(\xi, \tau) = 0(|x - \xi|^2) \quad （当 |x - \xi| \to \infty）, \tag{4.8}$$

的光滑函数 $f(x, t)$，函数

$$\Gamma'(x, t; \xi, \tau) \equiv \Gamma(x, t; \xi, \tau) \exp[f(\xi, \tau) - f(x, t)]$$

是方程

$$L'v \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i + 2\sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j\right)\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$+ \left(c + \sum_{i=1}^{n} b_i f_i + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}f_{ij} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}f_i f_j\right.$$

$$\left. - f_t\right)v - \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

的基本解，其中 $f_i = \partial f/\partial x_i$，$f_t = \partial f/\partial t$，$f_{ij} = \partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$. 如果对于 Γ 性质(4.7)成立，则对于 Γ' 它也成立.

如果把 L 看作是热传导算子，且 $f(x, t) = \Sigma b_i x_i/2$，$b_i$ 为常数我们就断定

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

的基本解满足(4.7). 通过对 x 作线性变换就推出对方程

$$(4.9) \qquad L_0 u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

(a_{ij} 为常数)

的基本解(4.7)也成立.

我们再作一个总的评述：如果 (4.7) 对 $Lu = 0$ 的基本解成立，则它对于 $(L + e)u = 0$ 的基本解 Γ_e 也成立，其中 e 为任何正值函数. 事实上，考虑函数

$$v(x, t) = \int_{R^n} [\Gamma(x, t; \xi, \tau) - \Gamma_e(x, t; \xi, \tau)] f(\xi) d\xi,$$

其中 $f(\xi)$ 如定理 11 的证明中所述. 显然，当 $|x| \to \infty$ 时 $\lim v(x, t) = 0$，因此 $v(x, 0) = 0$. 因为

$$L(\Gamma - \Gamma_e) = L\Gamma - (L + e)\Gamma_e + e\Gamma_e = e\Gamma_e \geqslant 0,$$

所以还有 $Lv \geqslant 0$. 据引理 5，对于 $\tau < t \leqslant T$ 有 $v(x, t) \leqslant 0$. 如果象在定理 11 的证明中那样取序列 $\{f_m\}$，我们就断定 $\Gamma - \Gamma_e \leqslant 0$，因此对于 Γ_e，(4.7) 也成立.

因为变换 $u = ve^{-\lambda t}$ 把 $Lu = 0$ 变为 $(L + \lambda)v = 0$，把 $Lu = 0$

的基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 变为 $(L+\lambda)v=0$ 的基本解 $e^{\lambda(t-\tau)}\Gamma(x, t; \xi, \tau)$，于是推知，如果在前面的评述中不假定 e 为正，则论断仍有效. 因而，如果对 $Lu=0$ 的基本解 (4.7) 成立，则对 $(L+e)u=0$ 的基本解它也成立，其中 $e(x,t)$ 为任一(关于 x 为一致 Hölder 连续的)有界连续函数.

把这一论断用于由(4.9)所定义的算子 L_0，就得到如下结果.

定理 12 对于抛物型方程

$$(4.10)\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

不等式 (4.7) 成立. 其中 a_{ij}, b_i 都是常数，$c(x,t)$ 为关于 x 一致 Hölder 连续的连续有界函数.

现在我们对 Cauchy 问题的下有界解证明唯一性定理.

定理 13 设 L 在 $\Omega=R^n\times[0,T]$ 内满足第一章第 6.8 节的假定 $(A_1)'$, $(A_3)'$, 且(4.7)成立. 如果在 $\Omega_0=R^n\times(0,T]$ 内 $Lu\equiv 0$，而在 R^n 上 $u(x,0)\equiv 0$，又若对某个正的常数 B 和 β，$u(x,t)$ 满足 (4.2)，则在 Ω 内 $u(x,t)\equiv 0$.

回顾定理 12，我们得出下面的:

推论1 如果 u 是(4.10)在 Ω_0 内的解，在 R^n 内 $u(x,0)\equiv 0$，且 u 满足 (4.2)，则在 Ω 内 $u(x,t)\equiv 0$.

定理 13 的证明　由定理 9 推出，在 Ω 内 $u(x,t)\geqslant 0$. 对任何 $R>0$，引进函数

$$U_R(x,t)=\int_{|\xi|<R}\Gamma(x,t;\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi.$$

由基本解的第二个性质(见 (1.1.7)) 推出，当 $|x|<R$ 而 $t\to\tau$ 时 $U_R(x,t)\to u(x,\tau)$; 当 $|x|>R$ 而 $t\to\tau$ 时 $U_R(x,t)\to 0$. 此外，因为当 $|x|=R$ 时 $U_{R+1}(x,t)\to u(x,t)$ 而且 $U_R\leqslant U_{R+1}$ (因为 $\Gamma>0$, $u\geqslant 0$)，所以推出对于任何 $y\in R^n$，当 $x\to y$, $t\to\tau$ 时有

$$\liminf U_R(x,t)\leqslant u(y,t).$$

因而函数 $v(x,t)=u(x,t)-U_R(x,t)$ 满足

$$\lim_{x\to y,\, t\to\tau} \inf v(x, t) \geqslant 0.$$

因为当 $|x| \to \infty$ 时（对 $t(\tau < t \leqslant T)$ 一致地）有 $U_R(x, t) \to 0$，又因为在 Ω 中 $u(x, t) \geqslant 0$，所以推出对 $t(\tau < t \leqslant T)$ 一致地有

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf v(x, t) \geqslant 0.$$

由引理 5 的证明我们断言 $v(x, t) \geqslant 0$，即

$$\int_{|\xi|<R} \Gamma(x, t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi \leqslant u(x, t).$$

因为对于任意的 $R > 0$ 这一不等式成立，又因为被积函数是非负的，我们断定

$$\int_{R^n} \Gamma(x, t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi \leqslant u(x, t). \tag{4.11}$$

对 τ 积分并取 $x = 0$，我们得到

$$\int_0^{t-\delta} \int_{R^n} \Gamma(0, t; \xi, \tau) u(\xi, \tau) d\xi d\tau \leqslant (t - \delta) u(0, t). \tag{4.12}$$

取 δ 为任何小于 t 的正数，利用 (4.7) 我们得到

$$\int_0^{t-\delta} \int_{R^n} \exp[-\gamma |\xi|^2] u(\xi, \tau) d\xi d\tau < \infty.$$

运用第一章第 9 节的定理 16，从而我们发现：在带形 $0<\tau < t-\delta$ 内 $u(\xi, \tau) \equiv 0$. 因为可使 $t - \delta$ 任意接近于 T，所以在 Ω 内有 $u \equiv 0$.

推论 2 如果在 Ω_0 内 $Lu = 0$，在 Ω 内 $u(x, t) \geqslant 0$，若 L 满足定理 13 中所作的一切假定，其系数关于 (x, t) 都是局部 Hölder 连续的，则 u 有表达式

$$u(x, t) = \int_{R^n} \Gamma(x, t; \xi, 0) u(\xi, 0) d\xi \quad (x, t) \in \Omega_0. \tag{4.13}$$

事实上，如以 $v(x, t)$ 记上式右边的积分，则由 (4.11) 我们有 $u(x, t) \geqslant v(x, t)$. $v(x, t)$ 在 $R^n \times [0, \varepsilon]$ 上连续，其中 $\varepsilon > 0$ 为从 (1.6.12) 以及不等式

$$\int \exp[-\gamma |\xi|^2] u(\xi, 0) d\xi < \infty$$

（对 $x = 0, \tau = 0$ 利用 (4.7)）

得到的充分小的任意数. 因为 $u(x, 0) = v(x, 0)$，所以如能证明

v 为 $Lv=0$ 在 Ω_0 内的解，就能从定理 13（用于 $u-v$）推出 (4.13)．为了证明这一点，注意到对每一 (x, t) 有 $U_R(x, t)\to v(x, t)$（这里在 U_R 的定义中 $\tau=0$），此外当 $R\uparrow$ 时 $U_R\uparrow$，且对于有界集合中的 (x, t)，U_R 关于 R 是一致有界的（因为 $U_R(x, t)\leqslant u(x, t)$）．现在我们可以应用第三章第 6 节定理 15（这里用到 L 的系数关于 (x, t) 是 Hölder 连续的假定）．由此推出 $v(x, t)$ 是 $Lv=0$ 的解．

如果换掉假定(4.7)，我们仅假定

$$\Gamma(0, t; \xi, \tau)\geqslant A\exp[-\beta|\xi|^2] \quad (\xi\in R^n,\ t-\tau>\delta), \tag{4.14}$$

其中 δ 为任意正数，而 A 和 β 为（依赖于 δ 的）正的常数，则定理 13 的证明仍为真．因为在附录中将指出（见附录，定理 5′ 的推论 1），如果假定 $(A_1)'$，$(A_3)'$ 都满足，则对所有充分小的 $\delta>0$，(4.14) 成立．因此，即使省略假定 (4.7)，定理 13 及推论 2 仍为真．如果 $c\equiv 0$，则定理 13 中的假定 $(A_3)'$ 可以减弱；见附录，定理 5′ 的推论 2．

5. 第二初值边值问题

定义 设 $P^0=(x^0, t^0)$ 为区域 D 的边界 ∂D 上的一点．如果存在中心在 $(\bar{x}, \bar{t})$ 的闭球 B，使 $B\subset\bar{D}$，$B\cap\partial D=\{P^0\}$，且如果 $\bar{x}\neq x^0$，我们就说 P^0 有强内球性质 (inside strong sphere property)．

设 Mu 为在 (2.1) 中定义的算子，并设在第 2 节定理 2 中对 Mu 的一切假定不仅在 D 内满足，而且在 $\bar{D}$ 上也得到满足．此外还假定 D 是有界的．假定 u 是 $\bar{D}$ 上的连续函数，在 D 内有 $Mu\geqslant 0$．如果在 $\bar{D}$ 上 u 有正的极大值 M，则据定理 2，对 D 的边界 ∂D 上某点 $P^0=(x^0, t^0)$ 有 $u(P^0)=M$．

定理 14 设上述假定成立，而 P^0 有强内球性质，对 P^0 的某个邻域 V，在 $D\cap V$ 内有 $u<M$，则对任何不相切的内方向 τ，在 P^0 处有

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}\equiv\liminf_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta\tau}<0. \tag{5.1}$$

所谓不相切的内方向是指从 P^0 指向球 B 内部的那个方向，而球 B 的边界在 P^0 处和 ∂D 接触.

证明　　我们可以假定 B 的内部在 $D\cap V$ 内. 以 S 记 B 的边界. 设 π 为一超平面，它把 (x, t) 空间分为两个半空间 π^- 和 π^+，使得 $(\bar{x}, \bar{t})\in\pi^-$，而 $(x^0, t^0)\in\pi^+$. 因为 $\bar{x}\neq x^0$，我们可以选取 π，使 $B^+=\pi^+\cap B$ 为非空，且使对所有的 $(x, t)\in B^+$，$|\bar{x}-x|\geqslant$ const. >0. B^+ 的边界由在 S 上的那部分 C_1 和在 π 上的另一部分 C_2 组成.

引进函数

$$h(x, t)=\exp\{-\alpha[|x-\bar{x}|^2+|t-\bar{t}|^2]\}-\exp\{-\alpha R^2\}, \tag{5.2}$$

其中 R 是 S 的半径. 在 C_1 上 $h=0$，在 $\bar{B}^+$ 上 $h\geqslant 0$，而在 B^+ 内当 α 充分大时 $Mh>0$.

对于任何充分小的 $\varepsilon>0$，函数 $v=u+\varepsilon h$ 在 C_2 上小于 M. 对于 $P\in C_1$，当 $P\neq P^0$ 时 $v(P)=u(P)<M$，且 $v(P^0)=u(P^0)=M$. 因为在 B^+ 内 $Mv=Mu+\varepsilon Mh>0$，所以 v 不能在 B^+ 的内部取其在 $\bar{B}^+$ 内正的极大值 M（从定理 2 可推出这一点，但也可给出一个类似于证明引理 1 那样的直接证明）. 因此，在 B^+ 的内部就有 $v<M$. 由此推出，在 P^0 处

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=\liminf_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta\tau}\leqslant 0. \tag{5.3}$$

因为 $\partial h/\partial\nu>0$（ν 为 S 在 P^0 处的内法线）而 $\partial h/\partial\sigma=0$（$\sigma$ 为在 P^0 处任何与 S 相切的方向），所以我们断言 $\partial h/\partial\tau>0$. 把这和 (5.3) 结合起来，我们发现在 P^0 处 $\partial u/\partial\tau=\partial v/\partial\tau-\varepsilon\partial h/\partial\tau<0$.

附注 1　　在 $D\cap V$ 内假定 $u<M$ 当然是必不可少的，否则在 $D\cap V$ 内 u 可以是常数，因而 $\partial u/\partial\tau=0$.

附注 2　　不能省略 $\bar{x}\neq x^0$ 的假定. 这可由下列反例看出:

$$P^0=(0, 0),\quad Mu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t},\quad u(x, t)=1-t^2$$

而 D 为半空间 $t>0$.

附注 3 如果 P^0 为 ∂D 的顶点，则定理 14 无效. 作为一个反例，我们取 D 为由

$$x^2+t^2<R^2,\quad t<\gamma_1 x,\quad t<\gamma_2 x\qquad (\gamma_1>0>\gamma_2)$$

所定义的区域，并设

$$P^0=(0,0),\quad Mu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$u(x,t)=(t-\gamma_1 x)(\gamma_2 x-t)+1.$$

于是在 D 内 $u<1$，在 P^0 处 $u=1$，而当 R 充分小时

$$Mu=-2\gamma_1\gamma_2+O(|x|+|t|)>0.$$

然而对于任何方向 τ，在 P^0 处有 $\partial u/\partial\tau=0$.

现在我们给出定理 14 的应用.

仍采用第 3 节的记号. 设 β 为在 D 的侧边界 S 上所定义的连续函数，τ 为在 S 每一点上都有定义的连续变动的方向. 在 D, $\bar{B}$ 和 S 上分别给定了任意函数 f, φ 和 ψ，在 $D+B_T$ 内求抛物型方程

$$Lu(x,t)=f(x,t)\tag{5.4}$$

的解，使在 $\bar{B}$ 上满足初始条件

$$u(x,0)=\varphi(x),\tag{5.5}$$

在 S 上满足边界条件

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial\tau}+\beta(x,t)u(x,t)=\psi(x,t)\tag{5.6}$$

的问题称为第三初值边值问题. 如果 τ 总不与 S 相切，就说问题是正则的.

当 D 是以 B 为底，S 为侧边界的圆柱时，如果 $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n,0)$ 是 S 在其某点 (x,t) 处的内法线，则据定义，S 在 (x,t) 处的内补法线为向量 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n,0)$，其中 $\mu_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,t)\nu_j$.

于是，如果 $a_{ij}=\delta_{ij}$，则法线和补法线重合. 如果 D 是一圆柱，而(5.6)中的方向 τ 为内补法线时，我们就称问题 (5.4)—(5.6)为

第二初值边值问题.

如果存在一条以 P^0 为起点的有限射线，其一切内点都在 D 内，我们就说方向 τ（在 $P^0\in S$ 处）指向 D 的内部. 如果在 P^0 处强内球性质成立，则 τ 指向接触超球面的内部是不言而喻的. 当然，假设 S 在 P^0 处有唯一的切超平面，这并不给 τ 强加更多的限制.

现在我们把 $\partial u/\partial\tau$ 的定义弄清楚. 如果 τ 指向 D 的内部，我们就可以把 $\partial u/\partial\tau$ 定义为方向导数，即

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial\tau}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{u(x,t)-u(\bar{x},\bar{t})}{-\Delta\tau}, \tag{5.7}$$

其中 $(\bar{x},\bar{t})$ 位于从 (x,t) 发出的沿方向 τ 的射线上，$\Delta\tau$ 是从 $(\bar{x},\bar{t})$ 到 (x,t) 的距离.

对任何方向 τ，定义 $\partial u/\partial\tau$ 的另一种方法是

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial\tau}=\lim_{(y,\sigma)\to(x,t)}\frac{\partial u(y,\sigma)}{\partial\tau}, \tag{5.8}$$

其中 $(y,\sigma)\in D$，而 $(y,\sigma)\to(x,t)$ 是沿着在 (x,t) 的切线指向 D 的内部的任一弧取的（当适当的规定方向时）极限与弧无关.

如果 τ 指向 D 的内部，那么由 (5.8) 可直接推出 (5.7).

今后我们总假定 (5.6) 中的方向 τ 指向 D 的内部. 还假定 (3.1) 成立. 最后，我们把 $\partial u/\partial\tau$ 看作是按 (5.7) 意义定义的.

定理 15 设 L 是定义在 $\bar{D}$ 上的有连续系数的抛物算子，$c(x,t)\leqslant 0$，且对每一 $P\in S$ 强内球性质成立，而 $\beta\leqslant 0$. 此时第三初值边值问题 (5.4)—(5.6) 最多有一个解. 如果 τ 与 t 无关，那么可以省略 $c(x,t)\leqslant 0$ 的假定.

证明 作变换 $v=e^{-\gamma t}u$ 即可推出最后那个结论，其中 $\gamma\geqslant c(x,t)$. 我们必须证明：如果 $f\equiv 0$, $\varphi\equiv 0$, $\psi\equiv 0$ 则 $u\equiv 0$. 现在设 $u\not\equiv 0$，于是我们可以假定 u 在 $\bar{D}$ 上有正的极大值 M. 如果 $u(P^0)=M$，则 P^0 不能属于任何 $B_t(0<t\leqslant T)$，因为强极值原理（第 2 节定理 4′）意指在 $S(P^0)$ 内 $u\equiv M$. 另一方面，由 (3.1)，在 B 上 $u(x,0)=M$，它和 $u(x,0)\equiv 0$ 的假定矛盾. 于是推出，u 的极大值只能在 S 上取得.

因此对某一 $P^0 \in s$，有 $u(P^0)=M$，且在 $V\cap D$ 内 $u<M$，其中 V 为 P^0 的某个邻域.因为强内球性质成立,我们可以应用定理 14，从而断定在 P^0 处 $\partial u/\partial\tau<0$. 但因在 P^0 处

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=-\beta u \geqslant 0,$$

于是产生了矛盾.

附注 在 $S\cap\{t=T\}$ 的点满足强内球性质的假定是很强的限制. 值得注意的是：如果省略这一假定，而在 $S\cap\{t=T\}$ 上 $\beta<0$，那么定理 15 的断言仍为真. 同样地，如果省掉(在 S 的所有点处) 强内球性质的假定,而在 S 上 $\beta<0$,那么定理 15 的断言仍为真. 只要把前面的证明稍加修改就可得到证明.

6. 比较定理

本节仍沿用第 3 节的记号 D, S, B, D_τ, B_τ 和 S_τ. B_τ ($0\leqslant\tau\leqslant T$) 是 R^n 中的一个区域,D是 R^{n+1} 中的有界区域.

定理 16 设 $v(x,t)$, $w(x,t)$ 是 $\overline{D}$ 上的连续函数，它们对 x 的前二阶导数和对 t 的一阶导数在D内是连续的. 设 $F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ $(i,j=1,\cdots,n)$ 及其对 p_{hk} 的一阶导数都是区域E内的连续函数，E 包含点 (x,t,p,p_i,p_{ij}) 所成集合的闭包,其中

$$(x,t)\in D,\quad p\in(v(x,t),w(x,t)),$$

$$p_i\in\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i},\ \frac{\partial w(x,t)}{\partial x_i}\right),\qquad p_{ij}\in\left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i\partial x_j},\ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\right),$$

这里 (a,b) 记联接 a, b 的区间. 再假定 $(\partial F/\partial p_{hk})$ 是正半定矩阵.

如果在D内

$$\frac{\partial v}{\partial t}>F\left(x,t,v,\frac{\partial v}{\partial x_i},\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\right),\tag{6.1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}\leqslant F\left(x,t,w,\frac{\partial w}{\partial x_i},\frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}\right),\tag{6.2}$$

且在 $\overline{B}+S$ 上有

$$v>w,\tag{6.3}$$

则在D内也有 $v>w$.

证明　考虑区间 $(0, T)$ 内所有使 $v(x, t) > w(x, t)$ $(x \in \bar{B}_t, 0 \leqslant t < \sigma)$ 的点 σ 的集合 M. 如能证得 l. u. b. $\sigma = T$, 则定理证明完毕. 设 $t_0 =$ l. u. b. σ. 据(6.3)有 $t_0 > 0$. 如果 $t_0 < T$, 则在 D_{t_0} 内函数 $z = v - w$ 为正,在 B_{t_0} 上为非负,而在 $\bar{B}_{t_0}$ 的某点 $P^0 = (x^0, t^0)$ 处等于零. P^0 不可能属于 B_{t_0} 的边界,因为据(6.3),在 S 上有 $v > w$* 于是 P^0 必在 B_{t_0} 内,且为 z 在区域 B_{t_0} 内取最小值的点. 由此推出

$$\frac{\partial z(P^0)}{\partial x_i} = 0.$$

由类似于证明(1.2)时所用的理由,我们有

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \frac{\partial^2 z(P^0)}{\partial x_i \partial x_j} \geqslant 0,$$

其中 F 的自变量为 E 的任何点. 最后,因为 $v(P^0) = u(p^0)$, 由中值定理推出,在 P^0 处(6.1)的右边大于或等于(6.2)的右边. 因此,在 P^0 处 $\partial w/\partial t < \partial v/\partial t$. 可是,因为对所有的 $P \in D_{t_0}$ 有 $z(P^0) < z(P)$, 所以在 P^0 处 $\partial z/\partial t \leqslant 0$; 这就得到矛盾.

定理 17　保留定理 16 的假定,但是将 (6.3) 换为

(6.4)　$$v > w, \quad (x, t) \in \bar{B}$$

(6.5)　$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \beta(x, t, v) < \frac{\partial w}{\partial \tau} + \beta(x, t, w), \quad (x, t) \in S$$

其中 β 为任意函数, $\tau = \tau(x, t)$ 指向 $D_t + B_t$, 假定 $\partial v/\partial \tau$, $\partial w/\partial \tau$ (由 (5.7) 定义) 都存在,则在 D 内 $v > w$.

其证明与前面类似,不同之处仅仅是由于(6.5) (代替 (6.3)), $P^0 = (x^0, t^0)$ 就不可能在 B_{t_0} 的边界上.

7. 椭圆型方程

考虑线性微分算子

(7.1)　$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

其系数定义在某个 n 维区域 D 内. 如果矩阵 $(a_{ij}(x^0))$ 为正定,即

* 原文为 u, 似应为 w ——译者注

对任何实向量 $\xi \neq 0$，有 $\sum a_{ij}(x^0)\xi_i\xi_j > 0$，就说 L 在点 x^0 处是椭圆型的(或椭圆的)

椭圆算子的强极值原理是如下定理：

定理 18 设 L 为椭圆算子其系数在 D 内连续，且 $c(x) \leqslant 0$，$Lu \geqslant 0$ ($Lu \leqslant 0$)．如果 $u \not\equiv$ const.，则 u 不可能在 D 内有正的极大值(负的极小值)．

证明 如果 u 有正的极大值 M，则对某点 $x^0 \in D$ 有 $u(x^0) = M$．因为 $u \not\equiv$ const.，于是有点 $\bar{x} \in D$ 使 $u(\bar{x}) < M$．仿引理 3 的证明进行下去就发现：存在这样一个以 x^* 为心 ∂B 为边界的闭球 B，除 ∂B 上有 $u(\bar{x}) = M$ 的点 $\bar{x}$ 外，对于所有的 $x \in B$ 都有 $u(x) < M$．考虑位于 D 内的半径小于 $|\bar{x} - x^*|$ 而中心在 $\bar{x}$ 的闭球 E．它的边界由两部分组成：在 B 内的部分 E_1 和在 B 外的部分 E_2．在 E_1 上，对某个 $\delta > 0$ 有 $u \leqslant M - \delta$．

函数

$$h(x) = \exp[-\alpha|x - x^*|^2] - \exp[-\alpha R^2]$$
$$(R = |\bar{x} - x^*|)$$

有如下性质：在 B 内 $h \geqslant 0$，在 B 外 $h < 0$，在 ∂B 上 $h = 0$，而(当 α 充分大时)在 E 内 $Lh > 0$．引进函数 $v = u + \varepsilon h$，$\varepsilon > 0$，我们看到，如果 ε 充分小，则在 E_1 上 $v < M$，在 E_2 上 $v < M$，而在 E 内 $Lv > 0$．由第 1 节引理 1 推出，在 E 的内部 v 不可能有正的极大值．可是因为 $v(\bar{x}) = M$，我们就得到矛盾． ▪

附注 读者也许会注意到，定理 18 还可以通过证明它是抛物型方程强极值原理的推论而间接地得到证明．事实上，如果把 $u(x)$ 看作是 $Lu - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ 在柱体 $D \times (0, 1)$ 内的解，那么定理 18 就是第 1 节定理 1 的结果．下面的定理 21 也有类似的附注．

定理18的下列结果称为弱极值原理：

定理 19 设 L 如定理 18 中所述，D 为有界区域，又设 u 在 $\bar{D}$ 上连续，在 D 内 $Lu \geqslant 0$ ($Lu \leqslant 0$)．如果 u 在 $\bar{D}$ 上有正的极大

值(负的极小值),则

(7.2) $\underset{x\in D}{\text{l.u.b.}}\, u(x) \leqslant \max_{x\in\partial D} u(x) \quad (\underset{x\in D}{\text{g.l.b.}}\, u(x) \geqslant \min_{x\in\partial D} u(x))$,

其中 ∂D 是 D 的边界.

在 D 内求椭圆型方程

(7.3) $$Lu(x) = f(x)$$

的解 u, 使在 ∂D 上满足边界条件

(7.4) $$u(x) = \varphi(x)$$

的问题称为第一边值问题, 或 Dirichlet 问题. 如无明确的相反说明,我们总假定 φ 为 ∂D 上的连续函数. 当 φ 为一连续函数时, 我们总认为解在 $\bar{D}$ 上是连续的.

由弱极值原理我们得出如下的唯一性定理.

定理 20 设 L 为椭圆算子, 其系数为有界区域 D 内的连续函数, 且 $c(x) \leqslant 0$, 则对于 Dirichlet 问题 (7.3), (7.4) 最多有一个解.

引进函数(3.11),并假定

$$\lambda > 0, \qquad a_{11}\lambda^2 + b_1\lambda \geqslant 1 \qquad (x \in D),$$

我们可以证明, (7.3), (7.4) 的解满足不等式 (类似于 (3.10)):

(7.5) $$\max_{\bar{D}}|u| \leqslant \max_{\partial D}|\varphi| + (e^{\lambda d} - 1)\max_{\bar{D}}|f|.$$

这里 d 是 D 在 x_1 方向的宽度, D 为一有界区域, 而 $c \leqslant 0$.

如果 $c \leqslant 0$ 的假定由

(7.6) $$(e^{\lambda d} - 1)c(x, t) \leqslant \vartheta < 1$$

代替, 引进 $c^- = \min(c, 0)$, 并把 $Lu = f$ 写成 $(L - c + c^-)u = \bar{f}$ 的形式, 其中 $\bar{f} = (c^- - c)u + f$, 再应用(7.5)我们容易得出不等式:

(7.7) $$\max_{\bar{D}}|u| \leqslant \frac{1}{1-\vartheta}[\max_{\partial D}|\varphi| + (e^{\lambda d} - 1)\max_{\bar{D}}|f|].$$

(7.7) 意即 Dirichlet 问题的唯一性定理.

定义 设 x^0 为区域 D 的边界 ∂D 上任意一点, 如果存在闭球 B, 使 $B \subset \bar{D}$, $B \cap \partial D = \{x^0\}$, 那么我们就说 x^0 有内球性质.

现在我们陈述一条与第 5 节定理 14′ 相类似的定理.

定理 21 设 D 为有界区域,假定 ∂D 的每一点有内球性质. 设 L 为一椭圆算子,其系数在 $\bar{D}$ 上连续, 且 $c(x) \leqslant 0$. 如果 u 为 $\bar{D}$ 上的连续函数、$Lu \geqslant 0$, 以及在 $\bar{D}$ 上 u 有正的极大值, 且 $u \neq$ const., 那么在边界 ∂D 上存在点 x^0, 使

$$u(x^0) = \max_{x \in \bar{D}} u(x),$$

且在每一个这样的点处,不等式

$$\frac{\partial u(x^0)}{\partial \tau} < 0$$

对任何不相切的内方向 τ 都成立.

不相切的内方向的定义如同定理 14 中所述.

其证明与定理 14 的证明相类似,我们把它留给读者.

注意,如果 ∂D 含有顶点,则定理不复为真. 作为一个例子我们取:

$$D:\quad x_1^2 + x_2^2 < R^2,\quad x_2 < \gamma_1 x,\ x_2 > \gamma_2 x \quad (\gamma_1 > 0 > \gamma_2),$$

$$x^0 = (0,\ 0),\quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + A\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},\quad \text{其中 } A > |\gamma_1\gamma_2|.$$

于是 $u = (x_2 - \gamma_1 x_1)(x_2 - \gamma_2 x_1) + 1$ 有如下性质: 在 D 内 $u < 1$, $u(x^0) = 1$, $Lu = 2\gamma_1\gamma_2 + 2A > 0$, 但在 x^0 处对任何方向 τ 有 $\partial u/\partial \tau = 0$.

在 ∂D 上给定了连续函数 β 和在 ∂D 上连续变化的方向 τ, 我们来考虑求(7.3)的解,使满足边界条件

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \tau} + \beta(x)u(x) = \psi(x) \quad (x \in \partial D) \tag{7.8}$$

的问题, 其中 f 和 ψ 都是给定的函数. 这个问题称为**第三边值问题**. 如果 $\tau = \tau(x)$ 总不与 ∂D 相切,我们就说问题是**正则**的. 如果 $\tau = \tau(x)$ 为内向法线, 即它的分量为 $\sum a_{ij}(x)\nu_j$, 其中 ν 是 ∂D 在 x 处的内法线, 我们就称 (7.3), (7.8) 为**第二边值问题**或 Neumann **问题**.

假定 τ 指向 D 的内部,并且

(7.9) $\beta \leqslant 0, \quad \beta \not\equiv 0 \qquad (x \in \partial D)$,

则定理 21 给出 (7.3), (7.8) 解的唯一性.

如果

(7.10) $\beta < 0 \qquad (x \in \partial D)$,

则无需利用定理 21 就可推出(7.3), (7.8)解的唯一性. 事实上,如果 $f \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ 而 $u \not\equiv 0$, 则据极值原理, u 在 ∂D 上的点 y 取得正的极大值(或负的极小值). 可是,这使(7.8)与 $\psi \equiv 0$ 发生矛盾,因为 $\partial u/\partial \tau \geqslant 0(\leqslant 0)$ 且在 y 处 $\beta u > 0(<0)$.

注意,在最后的证明中并未对 ∂D 作什么假定.

问　　题

1. 给出第 2 节定理 6 的直接证明.

[提示: 假定对于 $\overline{S(P)} - S(P)$ 中的所有的 Q, $u(P)$ 大于 $u(Q)$, 然后把引理 1 应用于 $u(x,t) + \varepsilon \exp[-\alpha|x-x^0|^2]$, 其中对所有的 $(x,t) \in D$, $|x-x^0| \geqslant \text{const.} > 0$].

2. L 是定义在 $\Omega_0 = R^n \times (0,T]$ 上有连续系数的抛物算子,且

$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(|x|^2+1), \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(|x|+1), \quad c(x,t) \leqslant M$,

其中M为某个常数. 试证明: 如在 Ω_0 内 $Lu \leqslant 0$, 在 $\Omega = R^n \times [0,T]$ 中 $u(x,t) \geqslant -N(|x|^q+1)$, 其中$N$和$q$都是正的常数, 则(在 R^n 内)当 $u(x,0) \geqslant 0 (x \in R^n)$ 时, 有 $u(x,t) \geqslant 0, (x,t) \in \Omega$.

[提示: 对恰当的K和α,函数 $w = \varepsilon(|x|^2 + Kt)^p e^{\alpha t} (\varepsilon > 0, K > 0, \alpha > 0, 2p > q)$ 满足 $Lw < 0$. 考虑 $w + u$.]

3. 设L如问题 2. 如果$|u(x,0)| \leqslant M_1$, $|Lu(x,t)| \leqslant M_2$, $c(x,t) \leqslant M_3$ 且 u 为有界,则 $|u(x,t)| \leqslant (M_1 + M_2 t)\exp[M_3 t]$.

[提示: 考虑 $(M_1 + M_2 t)\exp[M_2 t] \pm u$, 并利用问题 2.]

4. 利用函数

$$v(x,t) \equiv \exp[2\beta(|x|^2+1)e^{\alpha t}]$$

给出第 4 节定理 9 的另一证明.

[提示: 当$0 \leqslant t \leqslant 1/\alpha$, 且$\alpha$充分大时有 $Lv < 0$. 首先对 $0 \leqslant t \leqslant 1/\alpha$ 考虑 $u + \varepsilon v$, 然后逐步进行下去.]

5. 设L为 $\Omega_0 = R^n \times (0,T]$ 中的抛物算子,它的系数连续并满足(4.1), 又 $c(x,t) \geqslant 0$. 假设在 Ω_0 中 $Lu \leqslant 0$, 而在 $\Omega = R^n \times [0,T]$ 上(对某些正的

常数 B 和 β) 有 $u(x,t)\geqslant -B\exp[\beta|x|^2]$，则当 $u(x,0)\geqslant N>0\ (x\in R^n)$ 时有 $u(x,t)\geqslant N$ (N 为正的常数)，$(x,t)\in\Omega$.

[提示：应用第 4 节定理 9.]

6．设 L 和 u 的意义如问题 5，此外 $c(x,t)\geqslant\alpha|x|^2+\beta$，其中 α 和 β 都是常数，且 $\alpha>0$．试推出更强的不等式 $u(x,t)\geqslant N\exp[\lambda|x|^2t+\nu t]$，其中 λ,ν 都是常数，且 $\lambda>0$.

[提示：由 $u=v\exp[\lambda|x|^2t+\nu t]$ 定义 v，把问题 5 用于 v.]

7．不假定 L 的系数关于 (x,t) 的局部 Hölder 连续性，试证明定理 13 的推论 2.

[提示：以 $u(\xi,t_0)$ 代替 $u(\xi,0)\ (t_0<t<t_0+\varepsilon)$ 证明(4.13)，然后用第一章问题 5 一步一步地进行下去.]

8．试证明：如果对于 $0<x<1$，$0<t<4N$ 有 $\partial v/\partial t>\partial^2v/\partial x^2+Av^2$，对于 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant t\leqslant 4N$ 有 $v(x,0)>\mu/N$，$v(0,t)>\mu/N$，$v(1,t)\geqslant\mu/N$ (A,N,μ 均为正的常数)且假如 $4\mu>8N+1/4$，则当 $t\to 4N$ 时有 $v(1/2,t)\to\infty$.

[提示：利用第 6 节定理 16．令 $w(x,t)=\mu[N-tx(1-x)]$]

9．如省略 $c\leqslant 0$ 的假定，则第 1 节定理 1 和第 7 节定理 18 不复为真．举例说明.

10．设 L 是在区域 D 内有连续系数的椭圆算子，且在 D 内 $Lu\geqslant 0$ ($Lu\leqslant 0$)，$u\leqslant 0(u\geqslant 0)$．试证明：如果对某点 $x^0\in D$，$u(x^0)=0$，则在 D 内 $u\equiv 0$.

第 三 章

第一初值边值问题

引言 在这一章我们将用连续性方法证明第一初值边值问题唯一解的存在性．粗略地说来，连续性方法如下：以 L 记研究中的抛物算子，L_0 记热传导算子，我们引进抛物算子族 $L_\lambda = \lambda L + (1-\lambda)L_0 \, (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ 把 L 和 L_0 联系起来．然后我们证明，如果对所有的 $\lambda < \sigma \, (0 < \sigma \leqslant 1)$ 问题可解，那么对 $\lambda = \sigma$ 它也可解，而且如果对所有的 $\lambda \leqslant \sigma \, (0 \leqslant \sigma < 1)$ 问题可解，则它对于所有的 $\lambda \leqslant \sigma + \varepsilon$（$\varepsilon$ 为某个正数）也可解．最后，因为可以证明对 L_0 问题是可解的，所以对 L 亦真．

完成实际证明的决定性工具是对解的导数的某些先验估计（第 2 节）．引进 Banach 空间是方便的，但不是必不可少的．

利用闸函数（第四节）使存在性定理得以推广到其边界不必是光滑的区域．

还将给出先验估计的其他应用．例如，粗略地说，在第 5 节将证明抛物型方程的解和它的系数同样光滑．

存在性和可微性定理在第 7 节被用来研究 Green 函数．

最后，在第 8 节将简短地叙述把以上各节结果推广到椭圆型方程的情形．

1. Banach 空间和度量空间

设在实数或复数域上给定了线性空间 X，我们把使每个元素 $x \in X$ 对应于某个非负实数 $\|x\|$ 的某种规则称为范数，如果它满足下列性质：

(1) 当且仅当 $x = 0$ 时 $\|x\| = 0$，

(2) 对于任何纯量 λ, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, 且

(3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

在其上定义了范数的线性空间 X 称为**赋范空间**.

在赋范空间 X 中任意两点 x, y 之间的**距离**由 $\|x - y\|$ 定义. 中心在 z 而半径为 $R(R > 0)$ 的**开**(**闭**)**球**是一切到 z 的距离小于(小于或等于) R 的点所组成的集合. 集合 X_0 称为**开的**, 如果 X_0 包含它的每一个点. 也包含以该点为心的一个开球. 集合 X_1 称为**闭的**,如果它的余集是开的. 容易验证,开(闭)球是开(闭)集.

我们说序列 $\{x_n\}$ 是**收敛**的, 如果存在某点 x, 使当 $n \to \infty$ 时 $\|x_n - x\| \to 0$; x 叫做这个序列的**极限**, 并说这序列**收敛于** x. 点 x 叫做集合 X_0 的极限点, 如果存在元素属于 X_0 且收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$. 一集合的**闭包**是这个集合和它的极限点所成集合的并集. 容易证明,集合 X_0 是闭的,当且仅当它和它的闭包相等时.

序列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy **序列**,如果当 m, $n \to \infty$ 时, $\|x_m - x_n\| \to 0$; 每个收敛序列显然也是 Cauchy 序列. 反之, 如果 X 中每个 Cauchy 序列是收敛序列,我们就说 X 是一**完备空间**. 完备的赋范空间也叫做 Banach 空间.

设 T 是定义在 Banach 空间 X 的集合 X_0 上的变换, 假设 T 把 X_0 映射成自身,即如果 $x \in X_0$, 则 $Tx \in X_0$. T 叫做(X_0 中的)**压缩映射**,如果存在正数 $\vartheta < 1$, 使得对于 X_0 的一切 x, y 有

$$\|Tx - Ty\| \leqslant \vartheta \|x - y\|.$$

定理 1 设 T 为一把 Banach 空间 X 的闭集 X_0 映射成自身的变换, 假定 T 是 X_0 中的压缩映射, 则存在唯一的点 $y \in X_0$, 使 $Ty = y$.

这点 y 称为变换 T 的**不动点**. 定理 1 叫做不动点定理.

证明 取任意一点 $x_0 \in X_0$, 对于 $n = 0, 1, \cdots$ 依次定义 $x_{n+1} = Tx_n$. 所有的 x_n 属于 X_0. 我们还有

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Tx_n - Tx_{n-1}\| \leqslant \vartheta \|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \cdots \leqslant \vartheta^n \|x_1 - x_0\|.$$

因此,

$$\|x_{n+m}-x_n\|=\left\|\sum_{i=1}^{m}(x_{n+i}-x_{n+i-1})\right\|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}\|x_{n+i}-x_{n+i-1}\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}\vartheta^{n+i-1}\right)\|x_1-x_0\|$$
$$\leqslant\frac{\vartheta^n}{1-\vartheta}\|x_1-x_0\|.$$

由此得出 $\{x_n\}$ 为一 Cauchy 序列；因此它收敛于某点 $y\in X$。因为 X_0 是闭集，所以 $y\in X_0$。最后，当 $n\to\infty$ 时

$$\|Ty-y\|=\|Ty-Tx_n+x_{n+1}-y\|$$
$$\leqslant\vartheta\|y-x_n\|+\|x_{n+1}-y\|\to 0,$$

也就是 $Ty=y$。

为了证明唯一性，设 z 是另一不动点。于是当 $n\to\infty$ 时，

$$\|z-y\|=\|Tz-Ty\|\leqslant\vartheta\|z-y\|\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\vartheta^n\|z-y\|\to 0,$$

即 $z=y$。

设 X 是任意点的空间。我们说 X 是量度为 d 的**度量空间**，如果对于 X 的每一对点 x, y，有与之对应的且满足下列性质的非负数 $d(x, y)$：

(1) $d(x, y)=0$，当且仅当 $x=y$，

(2) $d(x, y)=d(y, x)$，和

(3) $d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z)$（三角不等式）。

我们以 $d(x, y)$ 定义每两点 x, y 间的**距离**。类似于赋范空间的情形，可以给出球，开集，闭集，收敛，完备性等等的定义。于是，序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，如果当 $m, n\to\infty$ 时，$d(x_m, x_n)\to 0$。如果当 $n\to\infty$ 时 $d(x_n, x)\to 0$，它就收敛于 x。把 X 的子集 X_0 映射成自身的变换 T 称为（X_0 中的）**压缩映射**，如果对某个 $\vartheta<1$ 和 X_0 的一切 x, y，有

$$d(Tx, Ty)\leqslant\vartheta d(x, y).$$

读者不难把定理 1 推广到完备度量空间的情形。

我们以众所周知的有关连续函数扩张的一般定理结束本节。

定理 2 设函数 f 在欧氏空间 R 的集合 S 上一致连续，则存在 f 的扩张函数 F。它在全空间 R 连续。F 在 S 的闭包 $\bar{S}$ 上是唯一确定的。如果 $\varphi(t)$ 是 f 的连续模，它是凸的且随 t 接近于零，则可构造扩张函数 F 使有相同的连续模。如果 f 是有界的(因而有同上的连续模)，则可构造扩张函数 F 使它和 f 有同样的界(因而有同样的连续模)。最后，如果 S 是闭集，则当仅假定 f 在 S 上为连续时前面的所有论断仍为真。

至于详细的证明，读者可参考[81]，也可参见[50; 117—118]。除最后的那个断言外，对一般度量空间内的集合 S，定理也有效(见[81])。

当连续模为 $\varphi(t)=Ht^{\alpha}$，即当 f 是指数为 α 的一致 Hölder 连续时特别重要。

2. Schauder 型先验估计

本章到处采用下列记号：D 是 R^{n+1} 中有界的 $(n+1)$ 维区域，$(x, t)=(x_1, \cdots, x_n, t)$ 为 R^{n+1} 的变点。D 是由 $t=0$ 上的区域 B，$t=T$ 上的区域 B_T 和带形 $0<t\leqslant T$ 中的流形(不必是连通的)所限定的区域。我们令

$$B_\tau=D\cap\{t=\tau\}, \quad S_\tau=S\cap\{t\leqslant\tau\}, \quad D_\tau=D\cap\{t<\tau\}.$$

假定存在一条把 B_T 上某点和 B 上某点联结起来的简单连续曲线 γ，使沿着 γ 时 t 不增加。还假定 $B_\tau(0<\tau<T)$ 为一区域。由此推出(2.3.1)成立，且断言第一初值边值问题唯一性的第二章第3节定理7有效。

本章某些结果，特别是定理 5, 10, 11, 13—15，对于任意有界区域 D 的情形仍为真，在其证明中甚至无需任何改变。

引进如下的距离定义是有用的：

$$d(P, Q)=[|x-\bar{x}|^2+|t-\bar{t}|]^{1/2}, \tag{2.1}$$

其中 $P=(x, t)$，$Q=(\bar{x}, \bar{t})$，而 $|x|$ 为欧氏范数 $(\Sigma x_i^2)^{1/2}$。容易看出，$d(P, Q)$ 满足第1节的度量性质。在本章(和下一章) Hölder 连续性的概念总是按度量(2.1)定义的。

我们引进下面的记号：

$$|u|_0^D = \underset{D}{\text{l. u. b.}} |u|,$$

$$\overline{H}_\alpha^D(u) = \underset{P,Q\in D}{\text{l. u. b.}} \frac{|u(P)-u(Q)|}{d(P,Q)^\alpha},$$

(2.2) $$\overline{|u|}_\alpha^D = |u|_0^D + \overline{H}_\alpha^D(u).$$

当且仅当 u 在 D 中一致 Hölder 连续(指数为 α)时，$\overline{H}_\alpha^D(u)<\infty$，而且 $\overline{H}_\alpha^D(u)$ 是 u 的 Hölder 系数. 以 $\overline{C}_\alpha(D)$ 记所有满足 $\overline{|u|}_\alpha^D<\infty$ 的函数 u 的集合. 易见，$\overline{C}_\alpha(D)$ 为关于范数 $|u|_\alpha^D$ 的赋范空间.

我们以 D_x^m 记对于变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的 m 阶任意偏导数，并设 $D_t=\partial/\partial t$. 如果在 D 中 D_xu, D_x^2u, D_tu 存在，我们就定义

(2.3) $$\overline{|u|}_{2+\alpha}^D = \overline{|u|}_\alpha^D + \sum\overline{|D_xu|}_\alpha^D + \sum\overline{|D_x^2u|}_\alpha^D + \overline{|D_tu|}_\alpha^D,$$

其中求和是对所指明的阶的所有偏导数取的. 我们以 $\overline{C}_{2+\alpha}(D)$ 记所有满足 $\overline{|u|}_{2+\alpha}^D<\infty$ 的函数 u 的集合. 易见，$\overline{C}_{2+\alpha}(D)$ 是范数为(2.3)的赋范空间.

定理 3 $\overline{C}_{2+\alpha}(D)$ 和 $\overline{C}_\alpha(D)$ 都是 Banach 空间.

证明 对 $\overline{C}_{2+\alpha}(D)$ 给出证明就够了. 我们只须证明这个空间是完备的. 于是设 $\{u_m\}$ 为 $\overline{C}_{2+\alpha}(D)$ 的 Cauchy 序列，即当 m, $k\to\infty$ 时有

(2.4) $$\overline{|u_m-u_k|}_{2+\alpha}^D \to 0.$$

由此推出，这个序列(关于范数)是有界的，即对一切 m 有

(2.5) $$\overline{|u_m|}_{2+\alpha}^D \leqslant K,$$

特别是

$$\underset{D}{\text{l. u. b.}} |D_x^2u_m| \leqslant K, \quad \overline{H}_\alpha^D(D_x^2u_m)\leqslant K.$$

因而 $\{D_x^2u_m\}$ 是 D 中一致有界且同等连续的函数族. 据 Ascoli-Arzela 定理，存在一个子序列 $\{u_{m'}\}$，使 $\{D_x^2u_{m'}\}$ 在 D 中一致收敛. 根据同样的理由，我们还可以继续得到 $\{u'_m\}$ 的子序列，它在 D 中连同它对 x 的前两阶导数和对 t 的一阶导数是一致收敛的. 以 $\{u_{m''}\}$ 记这个子序列，u 记它的极限，于是我们有:

(2.6) $$u_{m''}\to u, \quad D_xu_{m''}\to D_xu, \quad D_x^2u_{m''}\to D_x^2u,$$

$$D_t u_{m''} \to D_t u.$$

我们来证明 $u \in \bar{C}_{2+\alpha}(D)$. 从(2.5)推出，对于$D$中任何两点$P$, Q, 有

$$\frac{|D_x^2 u_m(P) - D_x^2 u_m(Q)|}{d(P, Q)^\alpha} \leqslant K.$$

让 $m = m'' \to \infty$, 并利用(2.6)我们得到

$$\frac{|D_x^2 u(P) - D_x^2 u(Q)|}{d(P, Q)^\alpha} \leqslant K,$$

即 $\bar{H}_\alpha^D(D_x^2 u) < \infty$. 类似地证得，(2.3) 右边每一项是有限的，即 $\overline{|u|}_{2+\alpha}^D < \infty$.

最后，我们必须证明按范数意义 $u_m \to u$. 由于 (2.4)，只要证明当 $m'' \to \infty$ 时

(2.7) $$\overline{|u_{m''} - u|}_{2+\alpha}^D \to 0$$

就够了.

现在从 (2.4) 推出，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，使当 $m'' \geqslant N$, $k'' \geqslant N$ 时，

(2.8) $$\bar{H}_\alpha^D(D_x^2 u_{m''} - D_x^2 u_{k''}) \leqslant \varepsilon.$$

(2.8) 意味着，对D中任何两点P, Q 有

$$d(P, Q)^{-\alpha}|D_x^2 u_{m''}(P) - D_x^2 u_{k''}(P) - D_x^2 u_{m''}(Q) + D_x^2 u_{k''}(Q)| \leqslant \varepsilon.$$

让 $k'' \to \infty$ 且利用(2.6)，我们得到

$$d(P, Q)^{-\alpha}|D_x^2 u_{m''}(P) - D_x^2 u(P) - D_x^2 u_{m''}(Q) + D_x^2 u(Q)| \leqslant \varepsilon.$$

因为对D中所有的P, Q，这个式子成立，取上确界后我们得到

(2.9) $$\bar{H}_\alpha^D(D_x^2 u_{m''} - D_x^2 u) \leqslant \varepsilon.$$

用类似方法按范数 $\overline{|u - u_{m''}|}_{2+\alpha}^D$ 继续估计其他项，就得出 (2.7) 的证明.

对于D中任意一点 $Q = (\xi, \tau)$，以 d_Q 记 Q 到 $B + S_\tau$ 的距离，即

$$d_Q = \underset{P \in B + S_\tau}{\text{g. l. b.}}\, d(P, Q),$$

其中 $d(P, Q)$ 由(2.1)定义．对于D中任意两点P, Q，我们令

$$d_{PQ} = \min(d_P, d_Q).$$

类似于(2.2)我们定义

(2.10) $$|u|_\alpha^D = |u|_0^D + H_\alpha^D(u),$$

其中

$$H_\alpha^D(u) = \underset{P,Q\in D}{\text{l. u. b.}}\ d_{PQ}^\alpha \frac{|u(P) - u(Q)|}{d(P, Q)^\alpha}.$$

于是 $\overline{H}_\alpha^D$ 和 H_α^D 的差别是：后者允许u在接近D的正则边界 $\overline{B} + S$ 时(象 $d_{PQ}^{-\alpha}$ 那样)逐渐变成无穷．以 $C_\alpha(D)$ 记范数 $|u|_\alpha^D$ 为有限的所有函数u的空间．显然这是一个赋范空间．

类似于范数(2.3)我们定义

(2.11) $$|u|_{2+\alpha}^D = |u|_\alpha^D + \sum |dD_x u|_\alpha^D + \sum |d^2 D_x^2 u|_\alpha^D + |d^2 D_t u|_\alpha^D,$$

其中

$$|d^m v|_0^D = \underset{P\in D}{\text{l. u. b.}}\ d_P^m |v(P)|,$$

$$H_\alpha^D(d^m v) = \underset{P,Q\in D}{\text{l. u. b}}\ d_{PQ}^{m+\alpha} \frac{|v(P)-v(Q)|}{d(P, Q)^\alpha},$$

$$|d^m v|_\alpha^D = |d^m v|_0^D + H_\alpha^D(d^m v).$$

以 $C_{2+\alpha}(D)$ 记范数 $|u|_{2+\alpha}^D$ 为有限的所有函数u所成的空间．显然，$C_{2+\alpha}(D)$ 为一赋范空间．

定理 4 $C_\alpha(D)$ 和 $C_{2+\alpha}(D)$ 都是 Banach 空间．

其证明类似于定理 3，因此留给读者．

为简单起见，对于上述范数定义中的区域D，在不致引起混乱时，通常将省去上标D．

先验估计是在预先不知道解的实际存在的情况下，对于解建立的一种有效估计．某些先验估计可以用来证明解的存在．我们将在此阐述这些先验估计．它们是类似于 Schauder 对椭圆方程导出的先验估计．在下两节中将用于求解第一初值边值问题．

这些估计有两种．第一种借助于范数 $|u|_\alpha$，$|u|_{2+\alpha}$ 的，称为内估计，第二种借助于范数 $\overline{|u|}_\alpha$，$\overline{|u|}_{2+\alpha}$ 的，称为边界估计．

考虑方程

(2.12) $$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t) \quad (\text{在 } D + B_T \text{ 中}).$$

我们作如下假定:

(A) L的系数在D内是局部 Hölder 连续的(指数为 α),且

(2.13) $$|a_{ij}|_\alpha \leqslant K_1, \quad |db_i|_\alpha \leqslant K_1, \quad |d^2c|_\alpha \leqslant K_1.$$

(B) 对任何 $(x, t) \in D$, 和任何实矢量 ξ,

(2.14) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant K_2|\xi|^2 \quad (K_2 > 0).$$

(C) f 在D内是局部 Hölder 连续的 (指数为 α), 且

(2.15) $$|d^2f|_\alpha < \infty.$$

现在我们阐明内估计.

定理 5 设 (A), (B), (C) 成立. 存在仅依赖于 K_1, K_2 和 n, α 的常数K,使对(2.12)在D内的任一解 u 满足 $\text{l.u.b}_D|u| < \infty$, 且 u, D_xu, D_x^2u, D_tu 在D中都是局部 Hölder 连续(指数为 α), u 必属于 $C_{2+\alpha}$,且

(2.16) $$|u|_{2+\alpha} \leqslant K(|u|_0 + |d^2f|_\alpha).$$

定义 我们说D有性质 ($\bar{E}$), 如果对于 $\bar{S}$ 的每一点 Q, 存在 $(n+1)$ 维的邻域V,使对某个 $i(i \leqslant 1 \leqslant n)$ $V \cap \bar{S}$ 可表为下列形式

(2.17) $$x_i = h(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n, t),$$

且 h, D_xh, D_x^2h, D_th 都是 Hölder 连续的 (指数为 α).

特别地由此推出, $\bar{S}$ 的点的超切平面决不可能是 $t = \text{const.}$ 的形式.

定义 如果存在 $\bar{C}_{2+\alpha}(D)$ 的函数 Ψ, 使在 $\bar{B} + S$ 上 $\Psi = \psi$, 我们就说在 $\bar{B}+S$ 上定义的函数 ψ 是属于 $\bar{C}_{2+\alpha}(D)$ 的(或简单地说属于 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 的). 于是,我们定义

$$\overline{|\psi|}_{2+\alpha} = \text{g.l.b.}_{\Psi}\ \overline{|\Psi|}_{2+\alpha}$$

其中下确界是对于 $\overline{C}_{2+\alpha}(D)$ 中所有的Ψ取的，Ψ在 $\bar{B}+S$ 上与ϕ重合.

如果 $(\bar{E})$ 成立，并且 $\phi\in\overline{C}_{2+\alpha}$，则对于$\phi$的任何扩张函数$\Psi$，在$B$的边界 ∂B 上 $\partial\Psi/\partial t$ （据连续性）被唯一定义，且这个定义不依赖于Ψ. 以 $\partial\phi/\partial t$ 记在 ∂B 上的这个函数. $L\phi$ 的其他各项在 ∂B 上(据连续性)也被唯一确定.

我们作下列假定:

$(\bar{A})$ L的系数在D内是一致 Hölder 连续的(指数为α)且

(2.18) $$\overline{|a_{ij}|}_\alpha\leqslant\bar{K}_1,\quad \overline{|b_i|}_\alpha\leqslant\bar{K}_1,\quad \overline{|c|}_\alpha\leqslant\bar{K}_1.$$

$(\bar{C})$ f在D内一致 Hölder 连续(指数为α)，即

(2.19) $$\overline{|f|}_\alpha<\infty.$$

现在我们阐明(2.12)的满足初值边值条件

(2.20) $$u=\phi\qquad(\text{在 }\bar{B}+S\text{ 上})$$

的解的边界估计.

定理 6 设 $(\bar{A})$，(B)，$(\bar{C})$ 成立，假设D有性质 $(\bar{E})$，且 $\phi\in\overline{C}_{2+\alpha}$.存在仅依赖于 $\bar{K}_1\,K_2$, α 和D的常数$\bar{K}$，使当u为(2.12)，(2.20) 的解且 $u\in\overline{C}_{2+\alpha}$ 时，则有

(2.21) $$\overline{|u|}_{2+\alpha}\leqslant\bar{K}(\overline{|\phi|}_{2+\alpha}+\overline{|f|}_\alpha).$$

定理 5.6 的证明在技巧上是困难的而且很长，我们将在下一章详细地给出它们的证明.

3. 第一初值边值问题的解

定义 如果D有性质 $(\bar{E})$，此外，如果 $\bar{S}$ 的局部表达式的函数 D_xD_th, D_t^2h 存在且为连续函数，我们就说D有性质 $(\bar{\bar{E}})$.

在这一节我们将要证明如下存在定理.

定理 7 设 $(\bar{A})$，(B)，$(\bar{C})$ 成立，假定 D 有性质 $(\bar{\bar{E}})$，$\phi\in\overline{C}_{2+\alpha}$，且在 ∂B 上 $L\phi=f$，则第一初值边值问题(2.12)，(2.20)的唯一解u存在，并且 $u\in\overline{C}_{2+\alpha}$.

证明 唯一性已在第二章第 3 节证明.

往后我们要用到颇为明显的规则:

(3.1) $$\bar{H}_\alpha(fg)\leqslant\bar{H}_\alpha(f)|g|_0+|f|_0\bar{H}_\alpha(g),$$

(3.2) $$\overline{|fg|}_\alpha \leqslant \overline{|f|}_\alpha \overline{|g|}_\alpha.$$

如果 $\Psi \in \bar{C}_{2+\alpha}$，那么利用 $(\bar{A})$ 和 (3.2) 可推出 $\overline{|L\Psi|}_\alpha \leqslant K'\overline{|\Psi|}_{2+\alpha}$，其中 K' 仅依赖于 n 和 $\bar{K}_1$。由此可知，不失一般性，在存在性的证明中我们可以假定 $\phi = 0$，否则如注意到

$$\overline{|Lv|}_\alpha \leqslant \overline{|f|}_\alpha + \overline{|L\Psi|}_\alpha \leqslant \overline{|f|}_\alpha + K'\overline{|\Psi|}_{2+\alpha}$$

和对某个 Ψ 有 $\overline{|\Psi|}_{2+\alpha} \leqslant 2\overline{|\phi|}_{2+\alpha}$，就可以对某个 $\Psi \in \bar{C}_{2+\alpha}$ 考虑 $v = u - \Psi$，其中 Ψ 在 $\bar{B} + S$ 上和 ϕ 重合。

证明略述如下．考虑单参数抛物算子族

(3.3) $$L_\lambda = \lambda L + (1-\lambda)L_0 \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1),$$

其中

$$L_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t}$$

是热传导算子．以 Σ 记所有这样的 λ 值的集合，它使问题

(3.4) $$\begin{aligned} L_\lambda u &= f \qquad \text{在 } D + B_T \text{ 内}, \\ u &= 0 \qquad \text{在 } \bar{B} + S \text{ 上} \end{aligned}$$

在 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 中对任何 $f \in \bar{C}_\alpha$，在 ∂B 上 $f = 0$ 有(唯一)解．于是只须证明：

(*a*) Σ 包含 $\lambda = 0$；

(*b*) Σ 是在区间 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 上的开集，即如果 $\lambda_0 \in \Sigma$，则存在 $\varepsilon > 0$，使对所有 $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，有 $\lambda \in \Sigma$；

(*c*) Σ 是闭集．

于是可知 Σ 与区间 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 重合．特别是，因为 $1 \in \Sigma$，就推出定理的论断．

刚才叙述的证明方法称为**连续性方法**．

(*a*) 的证明基于冗长的计算，而且几乎出现在第 2 节定理 5，6 的证明中，因此我们把它推迟到下一章（见第四章第 8 节）给出．

(*b*) 的证明　把 $L_\lambda u = f$ 写成如下的等价形式

$$L_{\lambda_0} u = (L_{\lambda_0} u - L_\lambda u) + f = F(u).$$

考虑如下定义的线性变换 $v = Au$：给定了在 $\bar{B} + S$ 上为零的

$u \in \bar{C}_{2+\alpha}$，我们规定 Au 为问题

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} L_{\lambda_0}v &= F(u) \qquad \text{在 } D+B_T \text{ 内} \\ v &= 0 \qquad \text{在 } \bar{B}+S \text{ 上} \end{aligned}$$

的(唯一)解．因为 $\lambda_0 \in \sum$，且 $F(u) \in \bar{C}_\alpha$，在 ∂B 上 $F=0$，所以对于在 $\bar{B}+S$ 上为零的所有 $u \in \bar{C}_{2+\alpha}$ 正好定义了变换 $v = Au$．如果能证明对某个这样的 u，有 $Au = u$，那末 u 就是 (3.4) 的(唯一) 解，从而 $\lambda \in \sum$．

在(3.2)的基础上通过计算不难证明

$$(3.6)\qquad \overline{|F(u)|}_\alpha \leqslant K_3|\lambda-\lambda_0|\,\overline{|u|}_{2+\alpha} + \overline{|f|}_\alpha,$$

其中 K_3 是不依赖于 λ, u, f 的常数． 将第 2 节定理 6 应用于定解问题(3.5)并利用(3.6)，我们得到

$$(3.7)\qquad \overline{|v|}_{2+\alpha} \leqslant \bar{K}K_3|\lambda-\lambda_0|\,\overline{|u|}_{2+\alpha} + \bar{K}\,\overline{|f|}_\alpha,$$

其中 $\bar{K}$ 不依赖于 λ, u, f．因此，如果

$$(3.8)\qquad \overline{|u|}_{2+\alpha} \leqslant 2\bar{K}\,\overline{|f|}_\alpha,$$

且 λ 使得 $2\bar{K}K_3|\lambda-\lambda_0| \leqslant 1$，那么 $\overline{|v|}_{2+\alpha} \leqslant 2\bar{K}\,\overline{|f|}_\alpha$． 因而，如以 X_0 记在 $\bar{B}+S$ 上为零且满足(3.8)的 u 的集合，就可推出，A 把 X_0 映射成自身．X_0 为 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 中的闭集．

设 $v_1 = Au_1$，$v_2 = Au_2$，其中 u_1, u_2 属于集合 X_0．于是

$$\begin{aligned} L_{\lambda_0}(v_1-v_2) &= L_{\lambda_0}(u_1-u_2) - L_\lambda(u_1-u_2) \qquad \text{在 } D+B_T \text{ 内}, \\ v_1 - v_2 &= 0 \qquad \text{在 } \bar{B}+S \text{ 上}. \end{aligned}$$

如前继续进行下去，我们得到

$$\overline{|v_1-v_2|}_{2+\alpha} \leqslant \bar{K}K_3|\lambda-\lambda_0|\,\overline{|u_1-u_2|}_{2+\alpha} \leqslant \frac{1}{2}\overline{|u_1-u_2|}_{2+\alpha},$$

只要 $2\bar{K}K_3|\lambda-\lambda_0| \leqslant 1$．因而，如果 λ 满足最后这个不等式，则 Av 为闭集 X_0 中的压缩映射． 据第 2 节定理 3，因为 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 是 Banach 空间，利用第 1 节定理 1 就可断定，在 X_0 中存在函数 u，使 $Au = u$．(b) 的证明完毕．

(c) 的证明　　设 $\lambda_m \in \sum$，$\lambda_m \to \sigma$．我们需要证明 $\sigma \in \sum$，即证明对于任何在 ∂B 上为零的 $f \in \bar{C}_\alpha$，存在函数 $u \in \bar{C}_{2+\alpha}$，使

$$
(3.9)\qquad \begin{aligned} L_\sigma u &= f \qquad \text{在 } D + B_T \text{ 内}, \\ u &= 0 \qquad \text{在 } \bar{B} + S \text{ 上}. \end{aligned}
$$

据假定，对任意的 m，$\bar{C}_{2+\alpha}$ 中存在函数 u_m，使

$$
(3.10)\qquad \begin{aligned} L_{\lambda_m} u_m &= f \qquad \text{在 } D + B_T \text{ 内}, \\ u_m &= 0 \qquad \text{在 } \bar{B} + S \text{ 上}. \end{aligned}
$$

注意到 L_λ 的系数满足条件 $(\bar{A})$，(B)，以及常数 $\bar{K}_1$，K_2 不依赖于 λ，并应用定理 6，我们得到

$$
(3.11)\qquad \overline{|u_m|}_{2+\alpha} \leqslant \bar{K}\,\overline{|f|}_\alpha,
$$

其中 $\bar{K}$ 不依赖于 m.

现在按照在定理 3 证明中所用的论证进行下去（利用 Ascoli-Arzela 定理），即可断言存在 $\{u_m\}$ 的子序列，（我们仍然把它记作 $\{u_m\}$），使得

$$
(3.12)\qquad \{u_m\},\ \{D_x u_m\},\ \{D_x^2 u_m\},\ \{D_t u_m\}
$$

在 D 内一致收敛．而且当在 D 内 $u_m \to u$ 时，u_m 的导数序列收敛于 u 的相应导数，并且 $u \in \bar{C}_{2+\alpha}$.

在(3.10)中让 $m \to \infty$，我们得到 u 满足(3.9)．(c) 的证明完毕．

在定理 7 的证明中，仅用了先验边界估计（即用了第 2 节定理 6），在下一节，我们将取而代之以仅用先验内估计（即用第 2 节定理 5），从而导出仅属于 $C_{2+\alpha}$ 的解的存在，但这是在 f，L，D 和 ψ 比其在定理 7 中为弱的条件下导出的．

4. 第一初值边值问题的解（续）

设 L 为一致抛物算子，其系数在 D 内一致有界．

定义　函数 $w_Q(Q \in \bar{B} + S)$ 称为在点 Q（关于 L）的**闸函数**（barrier），如果它满足下列条件：

(1) w_Q 在 $\bar{D}$ 上连续，

(2) 当 $P \in \bar{D}$，而 $P \neq Q$ 时，$w_Q(P) > 0$，

(3) $w_Q(Q) = 0$，

(4) 在 $D + B_T$ 内 $Lw_Q \leqslant -1$（假定在 $D + B_T$ 内导数 $D_x w_Q$，$D_x^2 w_Q$，$D_t w_Q$ 存在并且连续）．

定义 我们说 S 有(关于 L 的)局部闸函数，如果存在 $\varepsilon>0$，使对所有区域

$$D_{\tau,\varepsilon}=D\cap\{\tau<t<\min(\tau+\varepsilon, T)\}$$

(其中 $0\leqslant\tau<T$)，在 $S_{\tau,\varepsilon}$ 的每点处存在（关于 L 的）闸函数，其中

$$S_{\tau,\varepsilon}=S\cap\{\tau<t\leqslant\min(\tau+\varepsilon, T)\}.$$

我们举几个例子.

(a) 如果 $Q=(x^0, 0)\in\bar{B}$，假定 $\gamma\geqslant c(x, t)$，则对于充分大的 A，

$$w_Q(x, t)=(|x-x^0|^2+At)e^{\gamma t} \tag{4.1}$$

为一闸函数.

(b) 设 $Q=(x^0, t^0)\in S$，假定存在中心在 $(\bar{x}, \bar{t})$ 的闭球 K，使得 $K\cap D=\phi$, $K\cap\bar{D}=\{Q\}$. 如果对于所有的 $(x, t)\in\bar{D}$

$$\bar{x}\neq x, \tag{4.2}$$

则在 Q 处存在闸函数 w_Q，即

$$w_Q(x, t)=ke^{\gamma t}\left(\frac{1}{R_0^p}-\frac{1}{R^p}\right), \tag{4.3}$$

其中 $\gamma\geqslant c(x, t)$, $R_0=[|x^0-\bar{x}|^2+(t^0-\bar{t})^2]^{1/2}$, $R=[|x-\bar{x}|^2+(t-\bar{t})^2]^{1/2}$，而 k, p 为适当的正数.

事实上，容易验证

$$\begin{aligned}Lw_Q(x, t)=\frac{kp}{R^{p+4}}e^{\gamma t}\cdot[&-(p+2)\sum a_{ij}(x_i-\bar{x}_i)\\&\times(x_j-\bar{x}_j)+R^2\sum a_{ii}+R^2\sum b_i(x_i-\bar{x}_i)\\&-(t-\bar{t})R^2]+(c-\gamma)w_Q.\end{aligned}$$

据 (4.2)，因为 $|x-\bar{x}|\geqslant\text{const.}>0$，所以括号中的表达式当 p 充分大时为负，因此在 $\bar{D}$ 上有 $Lw_Q<0$. 其次，取 k 充分大就得到在 D 内 $Lw_Q\leqslant-1$. 显然，闸函数的其他性质对 w_Q 成立.

(c) 我们说 S 有强外球性质 (outside strong sphere property)，如果对于每一点 $Q=(x^0, t^0)\in S$，都存在中心在 $(\bar{x}, \bar{t})$ 的球 K，使得 $K\cap\bar{D}=\{Q\}$，且对所有的 $(x, t)\in\bar{D}$, $|t-t^0|<\varepsilon$，有

(4.4) $$|\bar{x}-x| \geqslant \mu(Q)>0,$$
其中 ε 不依赖于 Q. 通过对每一点 Q 构造闸函数 (4.3), 并利用 (4.1) 我们得到下面的结果:

定理 8 如果 S 有强外球性质, 则 S 有局部闸函数.

如果 $\bar{S}$ 有 (2.17) 形式的局部表达式, 其中 h 为两次连续可微函数, 则在 S 的边界点处的密切球半径就不小于一个正的常数, 密切球是从 D 的外面切于 S 的. 容易验证 (4.4) 成立, 因此强外球性质得到满足. 为了便于今后查阅我们把它叙述为如下结果.

定理 8′ 如果 D 有性质 $(\bar{\bar{E}})$, 则 S 有局部闸函数.

现在我们利用先验内估计和闸函数工具来证明与定理 7 类似的定理.

定理 9 设 (A), (B), (C) 成立, 假定 S 关于 L 和 L_0 都有局部闸函数, 则对于 $\bar{B}+S$ 上的任何连续函数 ϕ, 第一初值边值问题 (2.12), (2.20) 的唯一解 u 存在, 且 $u \in C_{2+\alpha}$.

证明 首先对 $\phi=0$ 的特殊情形用连续性方法予以证明. 由 (3.3) 定义 L_λ, 并以 $\sum$ 记所有这样的 λ 值的集合, 它对任何 $f \in C_\alpha$ 使 (3.4) 在 $C_{2+\alpha}$ 中有(唯一)解 u. 我们将要证明:

(a) $\sum$ 包含 $\lambda=0$;

(b) $\sum$ 是区间 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 中的开集;

(c) $\sum$ 是闭集.

在第四章第 8 节将给出 (a) 的证明. 如我们用内估计代替边界估计, (b) 的证明就和第 3 节 (b) 的证明相类似. 于是剩下要证明 (c).

取一收敛于点 σ 的序列 $\{\lambda_m\}$, $\lambda_m \in \sum$, 我们来证明 $\sigma \in \sum$. (3.10) 的解 u_m 满足

(4.5) $$|u_m|_{2+\alpha} \leqslant K\overline{|f|}_\alpha,$$
其中 K 不依赖于 m. 因此我们可以选出一个子序列, 为简单计, 我们仍以 $\{u_m\}$ 记之, 使得序列 (3.12) 在 $D+B_T$ 内的任意闭子集中一致收敛. 定义 $u=\lim u_m$, 因而我们看出在 $D+B_T$ 内 $Lu=0$. 从 (4.5) (根据第 2 节定理 3 的理由) 还可推出 $|u|_{2+\alpha}<\infty$.

现在,还需证明u直到$\bar{B}+S$连续,且在$\bar{B}+S$上$u=0$. 我们使用闸函数工具. 首先假定$Q\in\bar{B}+S$,并设在Q处(对于L和L_0都)存在闸函数w_Q. 于是,对于任何$0\leqslant\lambda\leqslant 1$,函数$v=(\underset{D}{\text{l.u.b}}|f|)w_Q$在$\bar{D}$上满足$L_\lambda v\leqslant-|f|$,在$\bar{B}+S$上,$v\geqslant 0$. 把极值原理用于$v\pm u_m$,就得到在$\bar{D}$上$v+u_m\geqslant 0$,即

$$|u_m(P)|\leqslant(\underset{D}{\text{l.u.b.}}|f|)w_Q(P)\quad(P\in\bar{D}). \tag{4.6}$$

让$m\to\infty$,我们得到,对每个$P\in D+B_T$,

$$|u(P)|\leqslant(\underset{D}{\text{l.u.b.}}|f|)w_Q(P),$$

从这个不等式推出,当$P\to Q$时,$u(P)\to 0$.

如果$Q\in\bar{B}$,则由(4.1)所定义的w_Q是一闸函数. 另一方面,如果$Q\in S_{2\epsilon}$,而ϵ充分小,则在$D_{2\epsilon}$内存在一个在Q处的闸函数. 因而我们可以断言,如果ϵ充分小,则在$D_{2\epsilon}$内(对于$\phi=0$)定理9正确.

其次,我们考虑方程(2.12),其边值为零,初始值由$t=\epsilon$上的$u(x,\epsilon)$给出. 如前,我们可以在$D\cap\{\epsilon\leqslant t\leqslant 3\epsilon\}$中解这个问题. 由于唯一性,这个解在$D\cap\{\epsilon\leqslant t\leqslant 2\epsilon\}$内必与以前的解$u(x,t)$重合. 于是在$D_{3\epsilon}$内就证明了定理9. 用这一方法逐步进行下去,立即得出定理9对于$\phi=0$的情形的证明.

下面假定$\phi\neq 0$,但$\phi\in\bar{C}_{2+\alpha}$. 令$v=u-\phi$. 据前面的结果我们立即得知,$Lv=f-L\Psi$的在$\bar{B}+S$上为零的属于$C_{2+\alpha}$的解$v$存在($\Psi$为$\phi$的扩张函数,它属于$\bar{C}_{2+\alpha}$). 于是推出关于$u$的论断.

最后,我们考虑仅假定ϕ为连续的一般情形. 据第1节定理2,存在R^{n+1}内的连续函数Ψ,它在$\bar{B}+S$上和ϕ全同. 设N为一包含$\bar{D}$的矩形: $|x_i|\leqslant\nu(i=1,\cdots,n)$, $|t|\leqslant\nu$. 据Weierstrass逼近定理,在N内存在一个一致逼近于Ψ的多项式序列Ψ_m. 根据我们已经证明了的结果,问题

$$Lu_m=f\qquad(\text{在 }D+B_T\text{ 内}) \tag{4.7}$$

$$u_m = \Psi_m \qquad (\text{在 } \bar{B} + S \text{ 上})$$

的解 u_m 存在且属于 $C_{2+\alpha}$. 由第 2 节定理 5

$$|u_m - u_k|_{2+\alpha} \leqslant K|u_m - u_k|_0,$$

而由极值原理（见 (2.3.9)），当 $c(x, t) \leqslant \gamma$ 时

$$(4.8) \qquad |u_m - u_k|_0 \leqslant e^{\gamma T} \max_{B+S} |\Psi_m - \Psi_k|.$$

由此推出，$\{u_m\}$ 是 $C_{2+\alpha}$ 中的 Cauchy 序列. 因此，由第 2 节定理 4，存在 $C_{2+\alpha}$ 中的函数 u，按 $C_{2+\alpha}$ 的范数，它是 $\{u_m\}$的极限. 由此推出，在 $D + B_T$ 内 $Lu = f$. 而且(4.8)表明 $\{u_m\}$ 在 $\bar{D}$ 上一致收敛于 u. 因此 u 在 $\bar{D}$ 上连续且在 $\bar{B}+S$ 上 $u = \phi$. 定理 9 的证明全部完成.

鉴于定理 8，我们可以叙述定理 9 的推论如下.

推论 1 设 (A), (B), (C) 成立，假定 S 有强外球性质，则对 $\bar{B}+S$ 上的任何连续函数 ϕ，存在 (2.12), (2.20) 的唯一解 u，并且 $u \in C_{2+\alpha}$.

为了以后参考方便我们再叙述定理 9 的推论如下.

推论 2 设 (A), (B), (C) 成立，设 D 为一个柱体，且对所有的点 $x^0 \in \partial B$，在 R^n 内存在闭球 C，使得 $C \cap \bar{B} = \{x^0\}$，则对于 $\bar{B} + S$ 上任何连续函数 ϕ，存在(2,12), (2.20)的唯一解 u，并且 $u \in C_{2+\alpha}$.

5. 解的可微性

抛物型方程 $Lu = f$ 在区域 D 内的解我们理解为这样一个函数 u，它在 D 内满足 $Lu=f$，且所有出现在 Lu 中的导数（即 $D_x u$, $D_x^2 u$, $D_t u$）都是 D 内的连续函数. 借助于第 2 节定理 5，我们现在证明，粗略地说，解和方程的系数同样光滑.

定理 10 设 L 为区域 D 内的抛物算子，假定

$$(5.1) \qquad D_x^m a_{ij},\ D_x^m b_i,\ D_x^m c,\ D_x^m f \qquad (0 \leqslant m \leqslant p)$$

在 D 内 Hölder 连续(指数为 α). 如果 u 为 $Lu = f$ 在 D 内的解，则

$$(5.2) \qquad D_x^m u,\ D_t D_x^k u \qquad (0 \leqslant m \leqslant p + 2,\ 0 \leqslant k \leqslant p)$$

存在并且在D内 Hölder 连续(指数为α).

证明　　首先我们对$p=0$证明本定理. 设D_0是一个柱体,其底B_0为一球,并设$\bar{D}_0$含于D内. 以S_0记D_0的侧边界,考虑问题

$$\begin{aligned} Lv &= f \qquad \text{在 } D_0 \text{ 中},\\ v &= u \qquad \text{在 } B_0+S_0 \text{ 上}. \end{aligned}$$

据第4节定理9的推论2,解v存在且属于$C_{2+\alpha}(D_0)$. 根据唯一性,因为在D_0内$v\equiv u$,所以推出对于$p=0$函数(5.2)在D_0的内部 Hölder 连续(指数为α). 由于D_0为任意柱体,证明完毕.

其次,我们对于$p=1$证明本定理. 设B, C是两个开的柱体,其底在超平面$t=\text{const}$. 上,使得

$$\bar{B}\subset C\subset\bar{C}\subset D.$$

对任一点$P=(x_1,\cdots,x_n,t)$,以P_h记点$(x_1+h,x_2,\cdots,x_n,t)$.如果$|h|$充分小且P属于B,则P_h属于C. 令

$$g^h(P)=\frac{g(P_h)-g(P)}{h}.$$

容易验证,

$$\begin{aligned}(5.3)\qquad &\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(P)\frac{\partial^2u^h(P)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(P)\frac{\partial u^h(P)}{\partial x_i}+c(P)u^h(P)\\ &\quad-\frac{\partial u^h(P)}{\partial t}=f^h(P)-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^h(P)\frac{\partial^2u(P_h)}{\partial x_i\partial x_j}\\ &\quad-\sum_{i=1}^{n}b_i^h(P)\frac{\partial u(P_h)}{\partial x_i}-c^h(P)u(P_h)\equiv F_h(P).\end{aligned}$$

令

$$f^h(P)=\frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_i+h}D_\zeta f(\zeta,x_2,\cdots,x_n,t)\,d\zeta,$$

借助于中值定理,容易验证

$$(5.4)\qquad |d^2f^h|_\alpha^B\leqslant M_1|f|_{1+\alpha}^C<\infty,$$

其中M_i记不依赖于h的常数,且假定$|h|$充分小.

类似地,我们得到

(5.5) $|a_{ij}^h|_\alpha^B \leqslant M_2 |a_{ij}|_{1+\alpha}^C < \infty, \quad |db_i^h|_\alpha^B \leqslant M_3 |b_i|_{1+\alpha}^C < \infty,$

$$|d^2c^h|_\alpha^B \leqslant M_4 |c|_{1+\alpha}^C < \infty.$$

注意到对任何函数 g 有

$$|d^2g(P_h)|_\alpha^B \leqslant M_5 |d^2g|_\alpha^C,$$

由 $p=0$ 的结果,因为 D_x^2u 在 D 内 Hölder 连续(指数为 α),我们得到

$$|d^2D_x^2u(P_h)|_\alpha^B \leqslant M_5 |d^2D_x^2u|_\alpha^C < \infty. \tag{5.6}$$

类似地我们得到

$$\begin{gathered} |d^2D_tu(P_h)|_\alpha^B \leqslant M_5 |d^2D_tu|_\alpha^C < \infty, \\ |dD_xu(P_h)|_\alpha^B \leqslant M_6 |dD_xu|_\alpha^C < \infty, \\ |u(P_h)|_\alpha^B \leqslant M_7 \quad |u|_\alpha^C < \infty. \end{gathered} \tag{5.7}$$

现在我们可以估计 F_h. 利用 (5.5), (5.6) 和易于验证的不等式

$$|d^2(gh)|_\alpha \leqslant |d^2g|_\alpha |h|_\alpha, \tag{5.8}$$

我们得到

$$\left| d^2 \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^h(P) \frac{\partial^2 u(P_h)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \right|_\alpha^B \leqslant M_8 < \infty.$$

利用 (5.5), (5.7) 和(5.4)可类似地估计 F_h 的其他各项,我们得到

$$|d^2F_h(P)|_\alpha^B \leqslant M_9 < \infty. \tag{5.9}$$

我们把第 2 节定理 5 用于 (5.3) 在区域 B 内的解 u^h (注意, $u^h \in C_{2+\alpha}(B)$). 因为

$$|u^h|_0^B \leqslant M_{10} |u|_1^C < \infty,$$

我们得到不等式

$$|u^h|_{2+\alpha}^B \leqslant M_{11} < \infty. \tag{5.10}$$

现在可利用 Ascoli-Arzela 定理证明, 对于任何收敛于零的序列 $\{h_m\}$ 存在一个子序列 $\{h_{m'}\}$, 使得在 B 内当 $m' \to \infty$ 时有

$$u^{h_{m'}} \to v, \quad D_xu^{h_{m'}} \to D_xv, \quad D_x^2u^{h_{m'}} \to D_x^2v, \quad D_tu^{h_{m'}} \to D_tv,$$

并且在 B 的闭子集上是一致收敛性的. 因为当 $h \to 0$ 时, $u^h \to \partial u/\partial x_1$ (逐点的), 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x_1},\ D\frac{\partial u}{\partial x_1},\ D_x^2\frac{\partial u}{\partial x_1},\ D_t\frac{\partial u}{\partial x_1}$$

(在 B 内)都存在,并等于 v 的相应导数,且

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{2+\alpha}^{B} \leqslant M_{11}.$$

对于 $\partial u/\partial x_j$ $(j=2,\cdots,n)$ 也可证明类似的结果. 于是对于 $p=1$ 的情形本定理证毕.

为了对于 $p=2$ 的情形证明本定理,我们把方程 $Lu=f$ 对 x_i 微分一次,然后把 $p=1$ 的结果应用于微分后得到的方程. 用类似的方法可对于任何 p 证明本定理. 换言之,将方程对 x_i 微分并应用归纳法假设于微分后得到的方程即可.

把抛物型方程写成如下形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu-f, \tag{5.11}$$

除定理 10 的假定外,再假定 $\partial a_{ij}/\partial t$, $\partial b_i/\partial t$, $\partial c/\partial t$ 和 $\partial f/\partial t$ 及其对 x 的前 $p-2$ 阶导数都是 Hölder 连续的(指数为 α),就可推出 $D_x^m D_t^2 u$ $(0\leqslant m\leqslant p-2)$ 是 Hölder 连续的. 把这一论点重复 q 次 $(2q<p)$,我们就得到如下定理.

定理 11 设 L 为区域 D 内的抛物算子,假定

$$D_x^m D_t^k a_{ij},\ D_x^m D_t^k b_i,\ D_x^m D_t^k c,\ D_x^m D_t^k f \tag{5.12}$$
$$(0\leqslant m+2k\leqslant p,\ k\leqslant q)$$

在 D 内 Hölder 连续(指数为 α). 如果 u 是 $Lu=f$ 在 D 内的解,则

$$D_x^m D_t^k u \qquad (0\leqslant m+2k\leqslant p+2,\ k\leqslant q+1) \tag{5.13}$$

存在,并且在 D 内 Hölder 连续(指数为 α).

仔细地阅读定理 10 和定理 11 的证明就会看出,如果处处以 $D+B_T$ 代替区域 D, 那么这两个定理仍为真,(不过应在局部的意义上理解在 $D+B_T$ 上的 Hölder 连续性). 我们作为推论叙述这一点.

推论 1 如果 L 在 $D+B_T$ 内是抛物的,函数 (5.12) 在

$D+B_T$ 内 Hölder 连续(指数为 α),则对于 $Lu=f$ 在 $D+B_T$ 内的任何解 u,函数 (5.13) 在 $D+B_T$ 内 Hölder 连续(指数 α).

推论 2 如 f 以及在区域 D(区域 $D+B_T$) 内抛物算子 L 的所有系数是无穷可微函数,则 $Lu=f$ 在 $D(D+B_T)$ 内的一切解也是无穷可微函数.

我们可以把定理 11 推广到直到边界 $B+S$ 的可微性(关于在 B_T 上的可微性见上面的推论 1). 这个结果叙述在下面的定理中.

定理 12 设 L 是 $\bar{D}$ 上的抛物算子,D 满足性质 $(\bar{\bar{E}})$, 假定对某个 $p\geqslant 0$, 函数

$$D_x^m D_t^k a_{ij},\ D_x^m D_t^k b_i,\ D_x^m D_t^k c,\ D_x^m D_t^k f \quad (0\leqslant m+k\leqslant p) \tag{5.14}$$

在每一个其闭包含于 $D+B+S+B_T$ 内的区域内一致 Hölder 连续. 此外假定在 S 的局部表示式中出现的函数 h(见(2.17))使得

$$D_x^{m+2}D_t^k h,\ D_x^m D_t^{k+1} h \quad (m\geqslant -2,\ k\geqslant -1,\ m+k\leqslant p), \tag{5.15}$$

是 Hölder 连续的(指数为 α). 最后假定 $\psi\in \bar{C}_{2+\alpha}$, 在 ∂B 上 $L\psi=f$, 且作为 S 的局部参数的函数 ψ 是 $((x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n,t)$ 的)一个满足如下条件的函数:

$$D_x^{m+2}D_t^k\psi,\ D_x^m D_t^{k+1}\psi \quad (m\geqslant -2,\ k\geqslant -1,\ m+k\leqslant p) \tag{5.16}$$

所有这些函数都是 Hölder 连续的(指数 α), 而在 B 上

$$D_x^{m+2}\psi \qquad (-2\leqslant m\leqslant p) \tag{5.17}$$

Hölder 连续(指数 α). 如果 u 是 (2.12), (2.20) 的解,则在每一个其闭包含于 $D+B+S+B_T$ 内的区域内,函数

$$D_x^{m+2}D_t^k u,\ D_x^m D_t^{k+1} u \quad (m\geqslant -2,\ k\geqslant -1,\ m+2k\leqslant p) \tag{5.18}$$

一致 Hölder 连续(指数 α).

从定理的证明看出,如果代替原先关于 (5.14) 那些函数的假

定，我们仅假定对于所有的区域 D_0: $\bar{D}_0 \subset D + B + S + B_T$，函数(5.14)在 D_0 和 S 的某个邻域的交集内一致 Hölder 连续(指数 α)，而函数 (5.12) (关于 $2q > p$) 在 D_0 的其余部分一致 Hölder 连续(指数为 α)，那么定理的论断仍为真.

证明　　对于 $p = 0$ 的证明从第 3 节定理 7 和解的唯一性即可推出. 我们对 $p = 1$ 来证明本定理. 我们要证明:

(a) 对于每一个 $Q \in S$，存在邻域 V，使得函数 (5.18) (对于 $p = 1$) 在 $D \cap V$ 内一致 Hölder 连续 (指数为 α)，并且

(b) 对于每一个 $Q \in B$，存在 (R^{n+1} 内的) 邻域 W，使得函数 (5.18) (对于 $p = 1$) 在 $D \cap W$ 内一致 Hölder 连续 (指数为 α).

如果我们使用定理 11 的推论 1 就得到定理 12 的证明. 定理 11 的推论 1 断言函数 (5.18)在每一个其闭包含于 $D + B_T$ 内的区域内是一致 Hölder 连续的.

只对 Q 在 S 的一个部分上来证明 (a) 就够了，该部分是 $x_1 = 0$ 上的一个区域. 事实上，作如下的变换

$$
\begin{aligned}
&y_1 = x_i - h(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n, t) \\
&y_i = x_1 \qquad (i \neq 1) \\
&y_j = x_j \qquad (j \neq 1,\ j \neq i)
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

就可推出这一点，因为在新坐标下我们所有的假定和所有要考虑的事仍然不变，而仅在 $D \cap V_0$ 内使用定理的可微性假定即可推出需要考虑的一切，其中 V_0 为 Q 的某个邻域.

其次，我们可以假定在 $V_1 \cap S$ 内 $\phi = 0$ (V_1 为 Q 的某个邻域)，否则可以通过

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) = \phi(x_2, \cdots, x_n, t)$$

把 ϕ 的定义扩展到 Q 的某个邻域上，然后考虑函数 $u - \phi$.

设 S_* 为 S 上的立方体: $x_i^1 < x_i < x_i^2$ ($i = 2, \cdots, n$)，$t_1 < t < t_2$，Q 在它的内部. 设 D_0 是以 B_0 为下底，B_1 为上底的一个柱体 $D_0 = B_0 \times (t_1, t_2)$，使得 S_* 为 D_0 侧边界 S_0 的一部分. 我们取 B_0 的边界为三次连续可微的，以便对于 D_0 具有性质 ($\bar{E}$) (因此可应用定理 6). 此外，我们取 D_0 使其闭包含于 $D + \bar{S}_*$ 内.

为清楚起见，首先考虑特殊情形:

(5.20) $\quad u=0 \quad$ 在 $W_0\cap D_0$ 内，

W_0 是 $\bar{B}_0+\bar{B}_1+(S_0-S_*)$ 的某个 (R^{n+1} 中的) 邻域.

我们可以类似于定理 10 的证明进行下去. 对于任意点 $P=(x_1,\cdots,x_n,t)$，我们定义平移

$$P_h=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\cdots,x_n,t) \qquad (i>1),$$

且对于 B, C 我们取 D_0 的子域，它的边界由两部分组成：一部分在半空间 $x_1<0$ (如果 D_0 在 $x_1<0$ 中) 且含于 W_0 内，其他部分在 S_* 内. 方程(5.3)仍然一样. 注意到 u^h 的初值和边值在 D_0 内为零，然后把第 2 节定理 6 的边界估计应用于 u^h. 通过和定理 10 证明中类似的计算，我们可以估计 $\lceil F_h\rceil_\alpha$. 通过和定理 10 的证明中相同的推理还可断定

$$D_x^2\frac{\partial u}{\partial x_i},\ D_t\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

在 D_0 内一致 Hölder 连续(指数为 α).

也可以对变量 t 完成上述有限差分过程，即定义

$$P_h=(x_1,\cdots,x_n,t+h)$$

并如前进行下去. 于是我们断言

(5.21) $\quad D_x^2D_tu,\ D_t^2u$

是 Hölder 连续的 (指数为 α).

为了完成 (a) 的证明，我们需要建立 $\partial^3u/\partial x_1^3$ 的存在性和 Hölder 连续性. 利用方程 $Lu=f$ 就可以做到这一点. 事实上，如把这个方程写成如下形式

$$a_{11}\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}=-\sum_{(i,j)\neq(1,1)}a_{ij}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}-\sum b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-cu+\frac{\partial u}{\partial t}+f$$

就可看到，右边有对 x_1 的导数，它是 Hölder 连续的；因为在 $\bar{D}$ 上 $a_{11}>0$，所以 $\partial^2u/\partial x_1^2$ 也有对 x_1 的导数，并且也是 Hölder 连续的. 从而在假定 (5.20) 之下 (a) 的证明完毕.

假如不用第 2 节定理 6，而用第四章第 7 节定理 4 关于边界估计的较强结果(此时 D 是 D_0，而 R, R_0 是 Q 在 S_* 中的某邻域)，

就可以把上述的论证推广到勿需假定(5.20)的一般情形．这时，我们不是建立(5.18)中($p=1$)的那些函数在 D_0 的一致 Hölder 连续性，而是建立它们在 D_0 和 Q 的某个($n+1$)维邻域的交集内的一致 Hölder 连续性．

(b) 的证明是类似的．现在只需要对 $x_1, \cdots, x_n$ 作有限差分．最后从微分方程 $Lu=f$ 推出函数 D_xD_tu 的存在性和 Hölder 连续性．

对 $p=1$ 证明本定理后，再对 $p=2$ 的情形证明如下：首先我们注意到，只要对 $p=2$ 建立(a)，(b) 的相类似结论就够了．为了对 $p=2$ 证明与(a)相类似结论，我们把方程 $Lu=f$ 对 $x_2, \cdots, x_n, t$ 中任何一个变量微分一次，并应用 $p=1$ 的结果，最后用微分方程 $Lu=f$ 导出其余导数的 Hölder 连续性．关于(b)，我们对 $x_1, \cdots, x_n$ 中任何一个变量微分那个方程，再应用 $p=1$ 的结果，最后使用方程 $Lu=f$ 导出其余导数的 Hölder 连续性．

我们留给读者去验证：用这种方法对于 $p=2$，我们得到(5.18)中所有那些函数的 Hölder 连续性．

利用如同从 $p=1$ 过渡到 $p=2$ 的推证，经过从 p 到 $p+1$ 的归纳法，就可完成定理的证明．其细节留给读者．

从(a)的证明(尤其是(5.21)那些函数的 Hölder 连续性)和对于 $p>1$ 所作的那些推证，我们得到下面的推论．

推论 1　设 S_0, S_1 为 S 的两个开的子流形，$\bar{S}_0 \subset S_1$，又设 V_0, V_1 分别为 S_0, S_1 的开邻域，使得 $\bar{V}_0 \subset V_1$．令 $D_0 = D \cap V_0$, $D_1 = D \cap V_1$，假定 $\bar{D}_0 \subset D_1 + \bar{S}_0$．设对某个 $p \geqslant 1$，函数(5.14)在 $\bar{D}_1$ 上 Hölder 连续(指数为 α)，而函数(5.15)，(5.16)在 S_1 上 Hölder 连续(指数 α)．如果 $u \in \bar{C}_{2+\alpha}(D_1)$，则对所有的 $m \geqslant -2$, $k \geqslant -1$, $m+k \leqslant p$，函数(5.18)在 D_0 内一致 Hölder 连续(指数为 α)．

如果我们仅假定对某个 $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < \alpha$)，$u \in \bar{C}_{2+\varepsilon}(D_1)$，则从函数(5.18)的 Hölder 连续性(指数为 ε)推出，对于任何 D_2 ($\bar{D}_2 \subset D_1 + S_1$) 有 $u \in \bar{C}_{2+\alpha}(D_2)$．因此，如果我们仅假定对某个

$\varepsilon > 0$, $u \in \bar{C}_{2+\varepsilon}(D_1)$，则论断仍为真.

如果不假定 u 属于 $\bar{C}_{2+\varepsilon}(D_1)$，推论的论断还是正确的. 见第四章第 8 节定理 8.

推论 1 和随后的附注也可推广到 B 附近的可微性. 但我们省略确切的陈述.

推论 2　设 L 为 $\bar{D}$ 上的抛物算子，D 有性质 $(\bar{\bar{E}})$，假定 f 和 L 的系数是 $\bar{D}$ 上的无穷可微函数，而 S 的局部表示式中的函数 h 是无穷可微函数，ϕ 在 S 和 B 上是无穷可微的. 最后假定 $\phi \in \bar{C}_{2+\alpha}$，且在 ∂B 上 $L\phi = f$，则 (2.12)，(2.20) 的解是 $D + B + S + B_T$ 内的无穷可微函数.

我们把定理 10—12 推广到非线性抛物型方程

$$(5.22)\qquad F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0.$$

我们说 (5.22) 关于解 $u(x, t)$ 是 D 内的抛物型方程，如果 $b(x,t) \equiv \partial F/\partial(\partial u/\partial t)$ 在 D 内严格为负，且矩阵 (b_{hk}) 在 D 内为正定. 这里 F 的自变量为

$$(5.23)\qquad \left(x, t, u(x, t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right),$$

而

$$b_{hk} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial(\partial^2 u/\partial x_h \partial x_k)}\right).$$

把 $u = u(x, t) + \varepsilon v$ 代入 (5.22)，然后用 ε 去除并让 $\varepsilon \to 0$，我们得到(关于 $u(x, t)$ 的)"一次变分"

$$(5.24)\qquad Lv \equiv \sum a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + cv - \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

其中 $a_{ij} = -b_{ij}/b$, $b_i = -[\partial F/\partial(\partial u/\partial x_i)]/b$, $c = -(\partial F/\partial u)/b$. 如果 $b < 0$，则当且仅当 (5.22)(关于 $u(x, t)$) 为抛物时，L 是抛物算子.

如果 (5.22) 对于所有的解 $u(x, t)$ 在 D 内都是抛物的，就说它在 D 内是抛物的.

当我们谈及函数 $F(x, t, u_1, \cdots, u_N)$ 的 Hölder 连续性时，总把两点 $(x, t, u_1, \cdots, u_N)$, $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_N)$间的距离理解为

$$[|x-\bar{x}|^2+|t-\bar{t}|+(u-\bar{u}_1)^2+\cdots+(u_N-\bar{u}_N)^2]^{1/2}.$$

定理13 设 $u(x, t)$ 是 (5.22) 在 D 内的解，假定 $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial u_j$ $(j=1, \cdots, N)$ 关于 $(x, t, u_1, \cdots, u_N)$ Hölder 连续(指数为 α)，而它们对于 $x, u_1, \cdots, u_N$ 的直到 $p\geqslant 0$ 阶的导数是 Hölder 连续的(指数为 α)，其中 $(x, t)\in D$, $-\infty<u_i<\infty$ $(i=1, \cdots, N)$. 如果 (5.22) 关于 $u(x, t)$ 在 D 内是抛物的，且 D_xu, D_x^2u, D_tu 在 D 内 Hölder 连续(指数为某个 $\varepsilon>0$)，则

(5.25) $\quad D_x^mu, \ D_tD_x^ku \qquad (0\leqslant m\leqslant p+3, \ 0\leqslant k\leqslant p+1)$

存在，并且在 D 内 Hölder 连续(指数为 α).

证明 象定理 10 的证明那样入手并使用中值定理，对于 u^h 我们得到线性抛物型方程 $L_hu^h=f_h$，其系数借助于 F 对 $x, u_1, \cdots, u_N$ 的一阶导数来表示. 注意到另一 Hölder 连续函数(指数 β)的 Hölder 连续函数(指数 α)还是 Hölder 连续函数(指数 $\alpha\beta$)，我们就断定 f_h 和 L_h 的系数都是 (x, t) 的 Hölder 连续函数(指数为某个 ε'). 据定理 10 的证明，我们得到 (见 (5.10))

(5.26) $$|u^h|_{2+\varepsilon'}^B\leqslant N_1,$$

其中 N_i 为不依赖于 h 的常数. 于是我们断定，

(5.27) $$\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{2+\varepsilon'}^R\leqslant N_1 \qquad (j=1).$$

对于 $j=2, \cdots, n$ 的证明是类似的.

从方程 $L_hu^h=f_h$ 我们还得到

(5.28) $$|D_tu^h|_{\varepsilon'}^B\leqslant N_2,$$

从它推出

(5.29) $$|D_tD_xu|_{\varepsilon'}^B\leqslant N_3.$$

由 (5.27), (5.28) 看出

(5.30) $$u\in C_{2+1},$$

其中 C_{2+1} 是 $\alpha=1$ 时的 $C_{2+\alpha}$.

利用 (5.30)，我们可以再检查 f_h 和 L_h 的系数，并得知它们都

是指数为 α 的 Hölder 连续函数．因此我们可以用前面的证明(以 α 代 ϵ')，从而得到($\epsilon'=\alpha$ 的)(5.27),(5.29)．于是对于 $p=0$ 证明完毕．

如果 $p\geqslant 1$，我们把方程(5.22)对 x_j 中任何一个变量微分一次，然后把定理 10 用于所得到的线性抛物型方程即可．

我们还将系统地阐述和定理 11 相类似的定理，但是，仅叙述如下的特殊情形．

定理 14 如果(5.22)在 D 内关于解 u 是抛物的，u 在 D 的闭子集上属于 $\bar{C}_{2+\epsilon}(\epsilon>0)$，而 F 对于 $(x,t)\in D$，$-\infty<u_i<\infty$ $(i=1,\cdots,N)$ 是无穷可微的，则 $u(x,t)$ 在 D 内无穷可微．

定理 12 及其证明也可推广到非线性方程．

6. 解族

借助于第 2 节定理 5 容易确立下列定理．

定理 15 设 $\{L_m\}$ 为一抛物算子序列，其中算子满足 (A)，(B)，那里的常数 K_1，K_2 不依赖于 m．又设 $\{f_m\}$ 为满足 $|f_m|_\alpha^D\leqslant K_3$ 的函数序列，其中 K_3 不依赖于 m．假设 $\{u_m\}$ 是一满足

$$L_m u_m=f_m \qquad (\text{在 } D+B_T \text{ 内})$$

的函数序列．如果 $|u_m|_0^D\leqslant K_4$，其中 K_4 与 m 无关，则对于 $\{u_m\}$ 的任何子序列 $\{u_{m'}\}$ 都存在它的一个子序列，设为 $\{u_{m''}\}$，使

$$u_{m''},\ D_x u_{m''},\ D_x^2 u_{m''},\ D_t u_{m''} \tag{6.1}$$

在 D 的任意子域内(该子域的闭包在 $D+B_T$ 内)一致收敛于某个函数 u 和它的相应导数，此外 $u\in C_{2+\alpha}(D)$．

特别地，如果 L_m 的系数在 $D+B_T$ 内逐点地收敛于 L 的相应系数，而 $\{f_m\}$ 在 $D+B_T$ 内逐点地收敛于 f，则在 $D+B_T$ 内 $Lu=f$．

推论 如果 (A)，(B)，(C) 成立，且

$$Lu_m=f \qquad (\text{在 } D+B_T \text{ 内}), \tag{6.2}$$
$$u_m=\psi_m \qquad (\text{在 } \bar{B}+S \text{ 上}),$$

而在 $\bar{B}+S$ 上一致地有 $\psi_m\to\psi$，则序列 $\{u_m\}$ 在 $\bar{D}$ 上一致收敛于函数 u，而导数 $D_x u_m$，$D_x^2 u_m$，$D_t u_m$ 在 $D+B_T$ 的闭子集上一

致收敛于 u 的相应导数，并且

$$
(6.3)\qquad \begin{aligned} Lu &= f \quad (\text{在 } D + B_T \text{ 中}), \\ u &= \phi \quad (\text{在 } \bar{B} + S \text{ 上}). \end{aligned}
$$

事实上，据极值原理，当 $m, k \to \infty$ 时

$$
|u_m - u_k|_0^D \to 0.
$$

于是 $\lim u_m = u$ 存在．显然，在 $\bar{B} + S$ 上 $u = \phi$．据定理 15，在 $D + B_T$ 内 $Lu = f$．因为 u 是 $\{u_m\}$ 唯一的极限，这就推出所有的子序列(6.1)收敛于同一极限．推论证毕．

若以范数 $\lceil \cdot \rceil_\alpha$ 代替 $|\cdot|_\alpha$，那么和定理 15 及其推论相类似的结果也是正确的．

这个推论类似于调和函数的 Harnack 第一定理．

7. Green 函数

我们从有用的一般引理开始．

引理 1　如果 L 为 $\bar{D}$ 上有 Hölder 连续系数（指数为 α）的抛物算子，则 L 的系数可扩张成为在整个带形区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上是一致 Hölder 连续的函数，使得 L 的相应扩张算子在带形区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上为一致抛物的．

证明　根据第 1 节定理 2，我们可以把 L 的系数扩张到带形区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上，使得扩张后的函数在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上一致 Hölder 连续．以 L_1 记 L 的相应扩张．L_1 在 $\bar{D}$ 的闭邻域 D_0 上对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 是抛物的．设 ζ_1 是 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上的连续可微函数，在 D 上 $\zeta_1 = 1$，而在 D_0 外 $\zeta_1 = 0$（见第一章问题 1）．类似地，设 ζ_2 是带形区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上的连续可微函数，它在 $\bar{D}$ 上 $\zeta_2 = 0$，而在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上 $\zeta_1 + \zeta_2 \geqslant \text{const.} > 0$．如果 L_0 记热传导算子，则所需 L 的扩张是

$$
\frac{\zeta_1}{\zeta_1 + \zeta_2} L_1 + \frac{\zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} L_0.
$$

设 L 在区域 D 内是一致抛物算子．在第一章，当 D 是一个柱体时，我们定义了在区域 D 内 $Lu=0$ 的基本解．如果 D 不是一柱体，（据引理 1）我们可以把 L 扩张到 $0 < t < T$ 内的柱形区

域 D_0 中，于是可以构造基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$. 作为一个 $(x, t) \in D + B_T$ 的函数，它显然满足 $Lu = 0$，并且对于 $\bar{B}_\tau$ 上的任意连续函数 f，当 $t \to \tau\ (\xi \in B_\tau)$ 时，有

$$\int_{B_\tau} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi) d\xi \to f(\xi). \tag{7.1}$$

从第一章中 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 的构造看出，Γ, $D_x\Gamma$, $D_x^2\Gamma$, $D_t\Gamma$ 是 $(x, t; \xi, \tau)$ 的连续函数（见 (1.4.29)）. 因此，(7.1) 的左边是 $Lu = 0$ 的解.

定义 一个对于 $(x, t; \xi, \tau) \in \bar{D} \times (D \cup B)$, $t > \tau$ 有定义并且连续的函数 $G(x, t; \xi, \tau)$ 称为 D 内 $Lu = 0$ 的 **Green 函数**，如果对于任何 $0 \leqslant \tau \leqslant T$ 和对于在 B_τ 上有紧支集的任一连续函数 f，函数

$$u(x, t) = \int_{B_\tau} G(x, t; \xi, \tau) f(\xi) d\xi \tag{7.2}$$

是 $Lu = 0$ 在 $D \cap \{\tau < t \leqslant T\}$ 内的解，且满足初始和边界条件:

$$\lim_{t \searrow \tau} u(x, t) = f(x) \qquad (x \in \bar{B}_\tau), \tag{7.3}$$

$$u(x, t) = 0 \qquad (\text{在 } S \cap \{\tau < t \leqslant T\} \text{ 上}). \tag{7.4}$$

定理 16 设 L 满足 $(\bar{A})$, (B), D 具有性质 $(\bar{\bar{E}})$，则存在唯一的 Green 函数 $G(x, t; \xi, \tau)$，而且 G, D_xG, D_x^2G, D_tG 是在 $(D + B_T) \times (D + B)$, $t > \tau$ 内关于 $(x, t; \xi, \tau)$ 的连续函数.

证明 为了证明 G 的存在性，我们首先利用引理 1 把 L 的系数扩张到 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上. 据第一章的结果，扩张后的 L 的基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 存在，而且 Γ, $D_x\Gamma$, $D_x^2\Gamma$, $D_t\Gamma$ 都是 $(x, t; \xi, \tau)$ $(t > \tau)$ 的连续函数.

设 $V(x, t; \xi, \tau)$ 记如下问题的解（如果它存在）:

$$\begin{aligned} &LV = 0 \qquad (\text{在 } D \cap \{\tau < t \leqslant T\} \text{ 中}), \\ &V = 0 \qquad (\text{在 } \bar{B}_\tau \text{ 上}) \\ &V(x, t; \xi, \tau) = -\Gamma(x, t; \xi, \tau) \\ &\qquad (\text{在 } S \cap \{\tau < t \leqslant T\} \text{ 上}). \end{aligned} \tag{7.5}$$

因为当 $x \neq \xi$, $t \to \tau$ 时 $\Gamma(x, t; \xi, \tau) \to 0$，所以 V 的初始值和边界值构成一个连续函数. 因此可用第 4 节定理 8′，和定理 9 推出，

唯一解 V 存在.

下面我们证明，函数 $V, D_x V, D_x^2 V, D_t V$ 在 $(D+B_T)\times(D+B), t>\tau$ 内是 $(x, t; \xi, \tau)$ 的连续函数.

设 (ξ^*, τ^*) 是 D 中到 (ξ, τ) 的距离小于 δ 的点. 为确定起见,假定 $\tau^* \geqslant \tau$. 因为 $V(x, t; \xi, \tau)$ 的初始值为零，又因为当 δ 充分小时，可使在 $S\cap\{\tau\leqslant t\leqslant\tau^*\}$ 上的边界值任意小，于是(据极值原理)推出，当 δ 充分小时,在 $t=\tau^*$ 上可使 $V(x, t; \xi, \tau)-V(x, t; \xi^*, \tau^*)$ 的绝对值任意小. 同样的论断对于 $V(x, t; \xi, \tau)-V(x, t; \xi^*, \tau^*)$ 在 $S\cap\{\tau^*<t\leqslant T\}$ 上显然也真. 由极值原理推出,当 δ 充分小时,在 $D\cap\{\tau^*<t\leqslant T\}$ 内

$$(7.6)\qquad |V(x, t; \xi, \tau)-V(x, t; \xi^*, \tau^*)|<\varepsilon.$$

注意，只要把 (ξ, τ) 限于 $D+B$ 的闭子集内，则 δ 与 (ξ, τ) 无关.

把内估计 (2.16) 应用于 $V(x, t; \xi, \tau)-V(x, t; \xi^*, \tau^*)$ 即可推出 D_xV, D_x^2V, D_tV 关于 (ξ, τ) 的连续性. 注意，对某个 $\mu>0$, 假如 $t-\tau\geqslant\mu$, 则连续性在 $D+B_T$ 的闭子集上关于 (x, t) 是一致的，而在 $D+B$ 的闭子集上关于 (ξ, τ) 是一致的. 当 (x, t) 在 $D+B_T+S$ 的闭子集上变化时, V 的连续性也是一致的. 最后,因为 V, D_xV, D_x^2V, D_tV 对于每一固定的 $(\xi, \tau)\in D$ 都是 $D+B_T, (t>\tau)$ 内 (x, t) 的连续函数,因此,正象上面所断言的,它们在 $(D+B_T)\times(D+B)\,(t>\tau)$ 内也是 $(x, t; \xi, \tau)$ 的连续函数.

现在容易看出,函数

$$G(x, t; \xi, \tau)=\Gamma(x, t; \xi, \tau)+V(x, t; \xi, \tau)$$

是 Green 函数. 而且 D_xG, D_x^2G, D_tG 都是 $(x, t; \xi, \tau)\in(D+B_T)\times(D+B)$, $t>\tau$ 的连续函数.

为了证明唯一性，假设 G_1 和 G_2 是两个 Green 函数. 考虑函数

$$v(x, t)=\int_{B_\tau}[G_1(x, t; \xi, \tau)-G_2(x, t; \xi, \tau)]f(\xi)d\xi,$$

其中 $f(x)$ 是在 B_τ 内有紧支集的任意连续函数. 显然, $Lv=0$, 且在 $S\cap\{\tau<t\leqslant T\}$ 和在 $\bar{B}_\tau$ 上 $v=0$. 因此,据极值原理, 在 $D\cap\{\tau<t\leqslant T\}$ 内 $v=0$.

如同第二章第 4 节定理 11 的证明中那样,取序列 $\{f_m(\xi)\}$ 就可推出 $G_1(x,t;\xi,\tau)=G_2(x,t;\xi,\tau)$.

推论 1 作为 $(x,t)\in D$ 的函数, $LG=0$, 并且对每一 $(\xi,\tau)\in D+B$, 在 $S\cap\{\tau<t\leqslant T\}$ 上 $G(x,t;\xi,\tau)=0$, 在 $D\cap\{\tau<t\leqslant T\}$ 内 $G(x,t;\xi,\tau)>0$.

类似于第二章第 4 节定理 11 的证明可推出 G 的正值性,其他论断可从前面 G 的构造推出.

利用第五节定理 12 的推论 1, 就可从上面的推论 1 得出如下的推论:

推论2 对任意固定的 $(\xi,\tau)\in D+B$, $\epsilon>0$, 函数 D_xG, D_x^2G, D_tG 都是 (x,t) ($(x,t)\in D$, $t-\tau>\epsilon$)的一致连续函数.

如果 L 的伴随算子 L^* 存在(见第一章第 8 节), 则 $L^*v=0$ 在 D 内的 Green 函数 $G^*(x,t;\xi,\tau)$ $(t>\tau)$ 被定义为 $(x,t;\xi,\tau)\in\bar{D}\times(D+B_T)$ $(t<\tau)$ 的一个连续函数, 它对于 (7.2) 中的任何 f, 函数

$$v(x,t)=\int_{B_\tau}G^*(x,t;\xi,\tau)f(\xi)d\xi$$

在 $D\cap\{0\leqslant t<\tau\}$ 内满足 $L^*v=0$, 且

$$\lim_{t\nearrow\tau}v(x,t)=f(x)\qquad(x\in\bar{B}_\tau),$$

而在 $S\cap\{0\leqslant t<\tau\}$ 上 $v=0$.

如果 L^* 的系数满足条件 $(\bar{A})$,(B),且 D 满足性质 $(\bar{\bar{E}})$,则通过首先在 $L^*v=0$ 中作代换 $t\to-t$, 就可象对 G 那样地证明 G^* 的唯一性,存在性和可微性. 此外还有

$$\begin{aligned}L^*G^*(x,t;\xi,\tau)&=0\qquad((x,t)\in D\cap\{0\leqslant t<\tau\}),\\G^*(x,t;\xi,\tau)&=0\qquad((x,t)\in\bar{S}\cap\{0\leqslant t<\tau\})\\G^*(x,t;\xi,\tau)&>0\qquad((x,t)\in D\cap\{0\leqslant t<\tau\}).\end{aligned}$$

定理 17 如果 L 为 D 内的抛物算子, 而 a_{ij}, D_xa_{ij}, $D_x^2a_{ij}$,

b_i, $D_x b_i$, c 在 D 内一致 Hölder 连续（指数为 α）；如果 D 满足 $(\bar{\bar{E}})$，则 $G^*(x, t; \xi, \tau)$ 存在，且对于 D 内任意两点 (x, t)，(ξ, τ) $(t > \tau)$ 有

$$G(x, t; \xi, \tau) = G^*(\xi, \tau; x, t). \tag{7.7}$$

证明　只需证 (7.7). 令

$$u(y, \sigma) = G(y, \sigma; \xi, \tau),$$
$$v(y, \sigma) = G^*(y, \sigma; x, t),$$

在区域 $D \cap \{\tau + \varepsilon < \sigma < t - \varepsilon\}$ 上积分 Green 恒等式 (1.8.4)，我们得到

$$\int_{B_{t-\varepsilon}} u(y, t-\varepsilon) G^*(y, t-\varepsilon; x, t) dy$$
$$= \int_{B_{\tau+\varepsilon}} v(y, \tau+\varepsilon) G(y, \tau+\varepsilon, \xi, \tau) dy.$$

让 $\varepsilon \to 0$ 就推出 (7.7).

对于热传导方程

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} -a < x_i < a \quad (i = 1, \cdots, n) \\ 0 < t < T \end{matrix}\right),$$

Green 函数可由显式给出. 当 $n = 1$ 时

$$G(x, t; \xi, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(x + 4ma, t; \xi, \tau) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(2a - x + 4ma, t; \xi, \tau), \tag{7.8}$$

其中 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 为基本解 (1.0.2).

如果 $n = 2$，

$$\begin{aligned} G(x, t; \xi, \tau) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Big[&\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(x_1^j, x_2^m, t; \xi_1, \xi_2, \tau) \\ &- \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(x_1^j, \tilde{x}_2^m, t; \xi_1, \xi_2, \tau) \Big] \\ - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Big[&\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(\tilde{x}_1^j, x_2^m, t; \xi_1, \xi_2, \tau) \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$- \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma(\tilde{x}_1^m, \tilde{x}_2^m, t; \xi_1, \xi_2, \tau) \Big],$$

其中 $x_\lambda^m = x_\lambda + 4ma$, $\tilde{x}_\lambda^m = 2a - x_\lambda + 4ma$ $(\lambda = 1,2)$. $n > 2$ 的公式可仿此推得.

8. 椭圆型方程

在这一节，我们把第 2～6 节的结果简要地推广到 R^n 的有界区域D内的椭圆算子:

$$(8.1) \quad Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

从若干定义开始.

我们说函数 $u(x)$ 属于 $C^m(D)$ 类(或简单地说属于 C^m), 如果它的所有前m阶偏导数存在而且是在D内的连续函数. 如果所有的m阶导数在D内都是局部 Hölder 连续的(指数为 α), 我们就说u属于 $C^{m+\alpha}$. 以 $|v|_0$ 记 $\underset{D}{\text{l. u. b.}}\, |v|$. 在 C^m 和 $C^{m+\alpha}$ 中分别引入范数

$$(8.2) \qquad \overline{|u|}_m = \sum_{j=0}^{m} \sum |D^j u|_0,$$

$$(8.3) \qquad \overline{|u|}_{m+\alpha} = \overline{|u|}_m + \sum \overline{H}_\alpha(D^m u),$$

其中未特别指定界限的和是对指定阶的所有偏导数取的, 而 $\overline{H}_\alpha(v)$ 是v在D内的 Hölder 系数. 以 $\overline{C}_m(\overline{C}_{m+\alpha})$ 记 $C^m(C^{m+\alpha})$ 中所有满足$\overline{|u|}_m < \infty(\overline{|u|}_{m+\alpha} < \infty)$的函数$u$构成的赋范空间.

以 d_x 记点x到D的边界 ∂D 的距离, 令 $d_{xy} = \min(d_x, d_y)$. 我们定义

$$H_\alpha(d^k u) = \underset{x,y \in D}{\text{l. u. b.}}\, d_{xy}^{k+\alpha} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

$$|d^k v|_0 = \underset{D}{\text{l. u. b.}}\, |d_x^k v(x)|.$$

下面我们引进范数:

$$(8.4) \qquad |u|_m = \sum_{j=0}^{m} \sum |d^j D^j u|_0,$$

(8.5) $$|u|_{m+\alpha}=|u|_m+\sum H_\alpha(d^m D^m u).$$

以 $C_m(C_{m+\alpha})$ 记 $C^m(C^{m+\alpha})$ 中所有满足 $|u|_m<\infty(|u|_{m+\alpha}<\infty)$ 的函数构成的赋范空间.

空间 $\overline{C}_m$, $\overline{C}_{m+\alpha}$, C_m, $C_{m+\alpha}$ 都是 Banach 空间.

其证明类似于第 2 节定理 3.

我们着手陈述 Schauder 型内估计.

内估计 如果(用本节记号)(2.13),(2.14)($a_{ij}(x,t)\equiv a_{ij}(x)$),(2.15)($f=f(x)$)成立,以及在 D 内 $Lu=f$, 且 $u\in C^{2+\alpha}(D)$, $|u|_0<\infty$, 则 $u\in C_{2+\alpha}$, 且(2.16)成立.

我们说 D 的边界 ∂D 属于 C^m 类,或 $C^{m+\alpha}$ 类,如果在 ∂D 每一点的邻域中存在 ∂D 的如下形式的局部表示式:

(8.6) $$x_i=h(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n),$$

其中函数 h(局部地)分别属于 C^m 或 $C^{m+\alpha}$.

我们说 ∂D 上的函数 ϕ 是属于 C^m 或 $C^{m+\alpha}$ 的, 如果 ∂D 属于 C^m 或 $C^{m+\alpha}$, 并且关于 ∂D 的局部参数(当(8.6)为 ∂D 的局部表示时,局部参数为 $x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n$)函数 ϕ 分别属于 C^m 或 $C^{m+\alpha}$.

我们说 ∂D 上的函数 ϕ 是属于 $\overline{C}_{2+\alpha}$ 的, 如果在 $\overline{C}_{2+\alpha}(D)$ 中存在一个在 ∂D 上与 ϕ 重合的函数 Ψ.

我们定义

$$\overline{|\phi|}_{2+\alpha}=\underset{\Psi}{\text{g.l.b.}}\overline{|\Psi|}_{2+\alpha},$$

其中下确界是对所有扩张函数 $\Psi\in\overline{C}_{2+\alpha}(D)$ 取的, Ψ 在 ∂D 上与 ϕ 重合.

现在叙述 Schauder 型边界估计.

边界估计 如果(2.18),(2.14)($a_{ij}(x,t)=a_{ij}(x)$),(2.19)($f=f(x)$)成立且 ∂D 属于 $C^{2+\alpha}$, ϕ 属于 $\overline{C}_{2+\alpha}$, 则对于在 D 内满足 $Lu=f$ 而在 ∂D 上 $u=\phi$ 的属于 $\overline{C}_{2+\alpha}(D)$ 的任何解 u, 不等式

(8.7) $$\overline{|u|}_{2+\alpha}\leqslant\overline{K}(\overline{|\phi|}_{2+\alpha}+|u|_0+\overline{|f|}_\alpha)$$

成立.

注意，如果 $c \leqslant 0$，则据 (2.7.5) 有

$$|u|_0 \leqslant \underset{\partial D}{\mathrm{l.u.b.}}|\phi| + \mathrm{const.}\ \underset{D}{\mathrm{l.u.b.}}|f|,$$

(8.7) 就化为 (2.21).

下面我们叙述关于 Dirichlet 问题

(8.8) $$Lu = f \quad (\text{在 } D \text{ 中}),$$

(8.9) $$u = \phi \quad (\text{在 } \partial D \text{ 上})$$

的存在性定理.

定理 18 设 L 为在 $\overline{D}$ 上有 Hölder 连续系数，且 $c \leqslant 0$ 的椭圆算子，设 $\partial D \in C^{2+\alpha}$. 如果 $f \in \overline{C}_\alpha(D)$，$\phi \in \overline{C}_{2+\alpha}$，则 Dirichlet 问题 (8.8)，(8.9) 的唯一解存在，并且 $u \in \overline{C}_{2+\alpha}(D)$.

定理 18 的证明是和第 3 节定理 7 的证明类似的，其细节留给读者.

在第四章第 9 节中我们将对 Laplace 算子 $\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ 注释 Schauder 估计的证明，这也是对（定理 7 证明中）(*a*) 的类似 Schauder 估计证明的注释.

在点 $y \in \partial D$ 处的闸函数 w_y 是 $\overline{D}$ 上的一个非负连续函数，它仅在点 y 处为零，且有 $Lw_y \leqslant -1$.

定理 19 设 L 为 $\overline{D}$ 上的椭圆算子，且 $c \leqslant 0$. 设 (2.13)，(2.15) 成立. 如果在 ∂D 的每点处都存在闸函数，则对于 ∂D 上的任意连续函数 ϕ，Dirichlet 问题 (8.8)，(8.9) 的唯一解 u 存在，并且 $u \in C_{2+\alpha}$.

其证明和第 4 节定理 9 的证明是类似的.

如果存在一个闭球 K，使 $K \cap D = \phi$，$K \cap \partial D = \{y\}$，则当 k 和 p 都充分大时，

(8.10) $$w_y(x) = k(|x^0 - y|^{-p} - |x - y|^{-p})$$

（x^0 为球 K 的中心）为在 y 处的闸函数.

关于椭圆型方程解的可微性我们有如下结果.

定理 20 设 L 是 $\overline{D}$ 上的椭圆算子，假定 f 和 L 的系数都属于 $C^{p+\alpha}(D)$ $(p \geqslant 0)$，则 $Lu = f$ 的任何解都属于 $C^{p+2+\alpha}(D)$.

如果 f 和 L 的系数都属于 $\bar{C}_{p+\alpha}(D)$，且 ∂D 属于 $C^{p+2+\alpha}$，$f^* \in C^{p+2+\alpha}, \phi \in \bar{C}_{2+\alpha}$，则(8.8)，(8.9)的任何解都属于 $\bar{C}_{p+2+\alpha}(D)$。

对于 $c \leqslant 0$ 时的证明和第 5 节定理 10—12 的证明中所给出的推理基本相同．对于任意的 c，如果我们已知道关于 $p=0$ 的结论，那末关于 $p \geqslant 1$ 的证明就和 $c \leqslant 0$ 的证明一样．为了证明关于 $p=0$ 的结论，我们需要存在定理 18 和定理 19 在任意 c 的情形能成立．一般说来，这是不可能的．不过，定理 20 的前一部分（对于 $p=0$）是和局部性质有关的．因此，如果我们取 D 的充分小子域 D_0，使得(2.7.6)，从而使（2.7.7）成立，则在 D_0 内的解由其边界值唯一确定，从而定理 18 的断言成立．因此，由第五节定理 10（对 $p=0$）的证明中所用的论据推出定理 20 的前一部分是正确的．

对于第二部分（$p=0$ 情形）的证明，我们需要这样一条存在定理，其中的 ϕ 是边界上的连续函数，它在边界的一部分 S 上属于 $C^{2+\alpha}$，而且 $C_{2+\alpha}(D)$ 中的那个解对于 D 的任何子域 D_1 也是 $\bar{C}_{2+\alpha}(D_1)$ 中的解，其中 D_1 的闭包是 $D+S_0$ 的闭子集，S_0 在 S 的内部．利用更一般形式的 Schauder 型边界估计式(见第四章第 9 节)，通过连续性方法可以把这样的定理建立起来．因为当 D 充分小时这条存在定理对于任意的 c 仍然成立，所以只要把 D 分成许多小的子区域，我们就可以完成本定理第二部分（$p=0$ 情形）的证明．

现在我们要指出，如果 $p \geqslant 1$，那么假定 $\phi \in \bar{C}_{2+\alpha}$，则是多余的．

在 ∂D 的每点 x^0 处画一内向法线 $\nu(x^0)$，并在其上量一长度 δ．以 $\nu(x^0, \delta)$ 记内向法线的端点．对于任何 $\partial D \in C^1$，当 δ 充分小时，函数 $x=\nu(x^0, \delta)$ 是 (x^0, δ) 到 R^n 的一对一的函数．事实上，这一点由隐函数定理和下面的公式:

$$x_i = x_i^0(s) + \delta g_i(s)/g(s), \tag{8.11}$$

即可推出，其中 $s=(s_1, \cdots, s_{n-1})$ 是 ∂D 上的局部参数，$x_i = x_i^0(s)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 ∂D 的方程，$g_i(s)$ 为矩阵 $(\partial x_i^0/\partial s_j)$

* 原文为 ϕ，似应为 f.——译者注

(i 表行，j 表列)去掉第 i 行所得矩阵的行列式的 $(-1)^{i-1}$ 倍．而

$$g(s)=\left(\sum_{i=1}^{n}(g_i(s))^2\right)^{1/2}.$$

顺便指出，当 x^0 在 ∂D 上变化时，法线 $\nu(x^0)$ 为由 $\nu(x^0,\delta)$ 所产生的每个流形 ∂D^δ 的法线．

设 $\zeta(t)$ 是一个三次连续可微函数：$\zeta(0)=1$；当 $|t|\geqslant\delta_0$ 时，$\zeta(t)=0$．于是，当 δ_0 充分小时，

$$\Psi(x)=\begin{cases}\zeta(\delta)\phi(x^0), & \text{当 } 0\leqslant\delta<\delta_0 \text{ 时，}(x=\nu(x^0,\delta)),\\ 0 & \text{在 } 0\leqslant\delta<\delta_0 \text{ 之外}.\end{cases}$$

把 ϕ 扩张到 D，且当 $\partial D\in C^{3+\alpha}$ 时属于 $C_{2+\alpha}$．这就证明了当 $p\geqslant1$ 时，$\phi\in\bar{C}_{2+\alpha}$．

可以把定理 20 及其证明推广到非线性椭圆型方程．第 5 节定理 12 推论 2 的类似结论也是正确的．

问　　题

1．设 $g(u)$ $(-\infty<u<\infty)$ 为连续可微函数，设 L, f, D 的意义如同定理 7．试证明：当 ε 充分小时，问题

$$Lu=f(x,t)+\varepsilon g(u)\qquad(\text{在 } D+B_T \text{ 内}),$$
$$u=0\qquad(\text{在 } \bar{B}+S \text{ 上})$$

有唯一解存在．

[提示：用类似于定理 7 证明中 (b) 部分的证明．]

2．试证明：如果第一初值边值问题 $Lu=f$，$u=\phi$ 对任何连续的 ϕ 和 Hölder 连续的 f 有解，那么在 S 的所有点处闸函数存在．

3．试证明：对于记号(4.3)，如果(4.2)成立，那么当 k 和 λ 充分大时，

$$ke^{rt}\{\exp[-\lambda R_0^2]-\exp[-\lambda R^2]\}$$

也是闸函数．

4．在矩形 $-b<x<b$，$-c<t<T$ $(c>0)$ 中考虑热传导方程 $u_{xx}-u_t=0$ 的所有正解的族 $\mathfrak{M}$．试证明：对任意的 $0<a<b$ 存在正的常数 K，使对所有的 $u\in\mathfrak{M}$，$-a<\bar{\xi}$，$\xi<a$，$0<\bar{\tau}\leqslant\tau<T$ 有

(★)　　$$u(\bar{\xi},\bar{\tau})\leqslant Ku(\xi,\tau).$$

不等式(★)类似于调和函数的 Harnack 不等式．

[提示：导出表达式

$$u(\xi, \tau) = \int_{-a}^{a} u(x, 0)G^*(x, 0; \xi, \tau)dx + \sum \pm \int_0^{\tau} \left[u \frac{\partial G^*}{\partial x} \right]_{x=\mp a} dt$$

(G 由 (7.8) 给出)．利用在 $x = -a(x = a)$ 上 $[\partial G^*/\partial x] \geqslant 0\ (\leqslant 0)$ 和

$$\frac{G^*(x, 0; \xi, \tau)}{G^*(x, 0; \bar{\xi}, \bar{\tau})} \geqslant c > 0, \frac{\partial G^*(\pm a, t; \xi, \tau)/\partial x}{\partial G^*(\pm a, t; \bar{\xi}, \bar{\tau})/\partial x} \geqslant c > 0. \Big]$$

5．试把问题 4 的结果推广到由 $t = 0, t = T$ 和在带形区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 中的两条不相交曲线所围成的区域 D，即证明：对所有 D 的闭子区域 G，(★) 对于 D 内所有的正解和 $(\xi, \tau) \in G$，$(\bar{\xi}, \bar{\tau}) \in G$，$\tau \geqslant \bar{\tau}$ 都成立，其中 K 仅依赖于 G 和 D．

6．试证明(类似于调和函数的 Harnack 第二定理的)如下定理：

如果 $\{u_m\}$ 是 D 内 $u_{xx} - u_t = 0$ 的解的单调序列，且对于某点 $Q \in D$，序列 $\{u_m(Q)\}$ 收敛，那么该序列在 $S(Q)$ 的闭子集上一致收敛于 $u_{xx} - u_t = 0$ 的解 u ($S(Q)$ 的定义见第二章第 1 节)．

7．设 L 是有连续系数的椭圆算子，且在 $\bar{D}$ 上 $c \leqslant 0$，D 为有界区域．又设 $\partial D \in C^1$，在 D 内 $Lu = f$，在 ∂D 上 $u = 0$，且 $u \in \bar{C}_1(D)$．试证明：如果对于每一 $y \in \partial D$，存在一个半径 R (与 y 无关) 的闭球 K，使 $K \cap \bar{D} = \{y\}$，则对任何 $i = 1, \cdots n$

$$\underset{\partial D}{\text{l.u.b.}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leqslant H \underset{D}{\text{l.u.b.}} |f|,$$

其中 H 仅依赖于 L, D．

[提示：取(8.10)为 w_y，并证明 $|u(x)| \leqslant w_y(x)|f|_0$，$(x \in D)$，因而在 y 处 $|\partial u/\partial \nu| \leqslant |\partial w_y/\partial \nu| |f|_0$.]

第 四 章

先验估计的推导

引言 本章主要是证明第三章定理 5、6 所说的先验估计. 还要证明第三章定理 7，9 证明中的陈述 (a). 在本章中仍沿用第三章第 2 节的记号.

推导先验估计的一般过程是很简单的. 我们首先对特殊的热传导算子，或者对更为一般的抛物算子

$$(0.1) \qquad L_0u = \sum a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} \qquad (a_{ij}\text{ 为常数}),$$

建立先验估计式 (即，我们现在要建立更为有用的形式). 然后考虑下面 (1.1) 形式的一般抛物型方程，并在点 (x^0, t^0) 近旁把它写成 $L_0u = \bar{f}$ 的形式，其中 $\bar{f} = f + (L_0u - Lu)$，$L_0$ 由(0.1)中让 $a_{ij} = a_{ij}(x^0, t^0)$ 给出. 利用前面对 L_0 所得到的那些估计，我们试图得到所需要的 L 的估计.

基于对常系数方程首先导出估计式的摄动法，在微分方程的其他问题中已使用过.

分析在本章中的份量是很重的. 对热传导算子建立一些必需的估计式在技巧上用了很大的功夫. 摄动过程本身却是不太难于理解.

第 3，5，6 节的结果仅涉及热传导算子的情形. 读者也许会发现，不宜对初学者做出这几节的全部详细证明.

1. 记号

在 $|u|_{2+\alpha}$ 的定义 (3.2.11) 中出现 $|d^2D_tu|_\alpha$ 项. 由于先验估计与抛物型方程

(1.1) $$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)$$

的解有关，如果在第三章第 2 节假定 (A), (B), (C) 下，我们能得到如下形式的估计

(1.2) $$|u|_\alpha + \sum |dD_x u|_\alpha + \sum |d^2 D_x^2 u|_\alpha \leqslant K(|u|_0 + |d^2 f|_\alpha),$$

那么利用明显的规则 (3.5.8) 和

(1.3) $$|d^2(gh)| \leqslant |dg|_\alpha |dh|_\alpha,$$

就可直接推出关于 $|d^2 D_t u|_\alpha$ 的类似估计. 于是，为了证明 (3.2.16)，只要证明(1.2)就够了.

在第三章定理 5 中，D 由 $t=0$, $t=T$ 和流形 S 所限定. 曾假定对每一 $0<\tau<T$, $D\cap\{t=\tau\}$ 为一区域，还假定存在一条连续曲线 γ 把区域 B_T 和 B 连结起来，而沿着它 t 坐标非增. 但是，在本章我们将对任何有界开集 D 来证明定理5. 现在 d_P 由

$$d_P = \underset{Q\in\Delta_\tau}{\text{g. l. b.}}\, d(P, Q)$$

来定义，其中 $P=(\xi,\tau)$，而 Δ_τ 为D的边界与半空间 $t\leqslant\tau$ 的交.

定义 N是一个以 $P=(x^0, t^0)$ 为最高点，棱长为 δ 的半立方体，如果N由下列式子定义:

$$x_i^0 - \delta \leqslant x_i \leqslant x_i^0 + \delta \qquad (i=1,\cdots,n),$$

$$t^0 - \delta^2 \leqslant t \leqslant t^0,$$

其中 $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$.

如果 $Q\in N$，那末显然有 $d(P,Q)\leqslant(n+1)^{1/2}\delta$.

对于任何非负整数 p, m，引进如下新范数是方便的:

(1.4) $$|g|_{p,m} = \sum_{j=0}^{m} M_{p,j}[g],$$

(1.5) $$|g|_{p,m+\alpha} = |g|_{p,m} + \sum_{j=0}^{m} M_{p,j+\alpha}[g] \qquad (0<\alpha<1),$$

其中

(1.6) $M_{p,j}[g]=\sum|d^{p+j}D_x^j g|_0=\sum \underset{P\in D}{\text{l.u.b.}}\, d_P^{p+j}|D_x^j g(P)|$，

(1.7) $M_{p,j+\alpha}[g]=\sum H_\alpha[d^{p+j}D_x^j g]$

$$=\sum \underset{P,Q\in D}{\text{l.u.b.}}\, d_{PQ}^{p+j+\alpha}\frac{|D_x^j g(P)-D_x^j g(Q)|}{d(P,Q)^\alpha}.$$

如前所述，因为不等式(3.2.16)与(1.2)等价，所以第三章定理5是下面定理的结果.

定理1 假定

(1.8) $|a_{ij}|_{0,\alpha}\leqslant K_1,\ |b_i|_{1,\alpha}\leqslant K_1,\ |c|_{2,\alpha}\leqslant K_1$，

而对任何实矢量ξ和$(x,t)\in D$，有

(1.9) $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant K_2|\xi|^2 \qquad (K_2>0)$，

并且$|f|_{2,\alpha}<\infty$. 如果u为(1.1)在D中的任何一个解，它使$D_x u$, $D_x^2 u$, $D_t u$在D内Hölder连续(指数为α)，且$|u|_0<\infty$，则$u\in C_{2+\alpha}$，且存在仅依赖于K_1, K_2, n和α的常数K，使有

(1.10) $|u|_{0,2+\alpha}\leqslant K(|u|_0+|f|_{2,\alpha})$.

在第2节，我们将证明某些与范数(1.4)，(1.5)有关的初等引理. 在第3节要证明一条热传导算子先验估计的基本定理. 第4节用这一定理通过摄动法完成定理1的证明.

2. 预备引理

引理1 设D_ϵ是D的一个子集，它由所有到D的边界的距离大于ϵ的点组成. $M_{p,m}^\epsilon[u]$记对D_ϵ所取的$M_{p,m}[u]$. 如果$M_{p,m}^\epsilon[u]\leqslant M$ (M为与ϵ无关的常数)，则$M_{p,m}[u]$为有限，且$\leqslant M$. 此结论对于$M_{p,m+\alpha}[u]$, $|u|_{p,m}$, $|u|_{p,m+\alpha}$也成立.

证明 以$d_{P,\epsilon}$记对D_ϵ所取的函数d_P，于是对任何固定的$P\in D_\epsilon$，我们有

$$d_{P,\epsilon}^p|D_x^{p+m}u(P)|\leqslant M.$$

令$\epsilon\to 0$，我们得到

$$d_P^p|D_x^{p+m}u(P)|\leqslant M.$$

对于 $P\in D$ 取上确界，就推出本引理关于 $M_{p,m}[u]$ 的论断．对于 $M_{p,m+\alpha}[u]$，$|u|_{p,m}$，$|u|_{p,m+\alpha}$ 的证明是类似的．

引理 2 设 $p\geqslant 0$，$m\geqslant 1$ 均为整数．对任何 $0<\epsilon<1$，存在仅依赖于 ϵ，p 和 m 的常数 C，使不等式

$$|u|_{p,m-1}\leqslant \epsilon M_{p,m}[u]+CM_{p,0}[u] \tag{2.1}$$

对所有满足 $M_{p,m}[u]<\infty$，$M_{p,0}[u]<\infty$ 的 u 都成立．

证明　为简单计，我们令 $M_{p,j}=M_{p,j}[u]$．不失一般性，我们假定 $|u|_{p,m-1}$ 为有限，否则可以首先对 D_δ 导出(2.1)(见引理1)，因而得到

$$|u|^{\delta}_{p,m-1}\leqslant \epsilon M^{\delta}_{p,m}+CM^{\delta}_{p,0}\leqslant \epsilon M_{p,m}+CM_{p,0};$$

然后取 $\delta\to 0$ 并应用引理 1．

设 P 为 D 中任意固定的点，并设 N 是以 P 为顶，棱长为 μd_P 的半立方体．取 $\mu<1/(n+1)^{1/2}$，使 $N\subset D$．据中值定理，如果 P_1，P_2 为 N 的上底 N^+ 上任何两点，则对于某个 $Q\in N^+$ 有

$$D^j_x u(Q)=\frac{D^{j-1}_x u(P_1)-D^{j-1}_x u(P_2)}{\overline{P_1P_2}}.$$

这里 $\overline{P_1P_2}$ 记从 P_1 到 P_2 的欧几里得距离．如取 P_1，P_2 在 N^+ 的对顶处，则对于某个 $Q\in N^+$ 我们得到

$$|D^j_x u(Q)|\leqslant\frac{2\,\underset{N^+}{\mathrm{l.u.b.}}|D^{j-1}_x u|}{2n^{1/2}\mu d_P}. \tag{2.2}$$

从关系式

$$D^j_x u(P)-D^j_x u(Q)=\int_Q^P D_\zeta D^j_x u\,d\zeta,$$

其中 ζ 在联结 Q，P 的区间中变化，利用不等式(2.2)，我们得到

$$|D^j_x u(P)|\leqslant\frac{\underset{N^+}{\mathrm{l.u.b.}}\,|D^{j-1}_x u|}{\mu d_P}+\mu n^{1/2}d_P\sum \underset{N^+}{\mathrm{l.u.b.}}\,|D^{j+1}_x u|,$$

其中求和是对所有 $j+1$ 阶偏导数取的．于是从 $M_{p,j-1}$，$M_{p,j+1}$ 的定义推出

$$|D^j_x u(P)|\leqslant(\mu d_P)^{-1}\frac{M_{p,j-1}}{[(1-\mu n^{1/2})d_P]^{p+j-1}}$$

$$+\mu n^{1/2}d_P\frac{M_{p,j+1}}{[(1-\mu n^{1/2})d_P]^{p+j+1}}.$$

以 d_P^{p+j} 乘两边，并注意到 P 为 D 中任意的点，我们就可以断定，对任何 $\varepsilon>0$，有

$$M_{p,j}\leqslant\varepsilon M_{p,j+1}+\frac{C_0}{\varepsilon}M_{p,j-1},\tag{2.3}$$

其中 C_0 仅依赖于 p, j.

利用(2.3)，下面通过对 j 的归纳法我们要证明，对所有的 $0\leqslant i<j$，有

$$M_{p,i}\leqslant\varepsilon M_{p,j}+\frac{C}{\varepsilon^{i/(j-i)}}M_{p,0},\tag{2.4}$$

其中 C 仅依赖于 p,j. 对于 $j=1$，显然成立. 假定这论断对所有的 $j\leqslant k$ 成立，我们要对于 $j=k+1$ 证明它也成立. 据(2.3)有

$$M_{p,k}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}M_{p,k+1}+\frac{C_1}{\varepsilon}M_{p,k-1},\tag{2.5}$$

其中 C_i 用以记仅依赖于 p, k 的常数. 由归纳法假设

$$M_{p,k-1}\leqslant\frac{\varepsilon}{2C_1}M_{p,k}+\frac{C_2}{\varepsilon^{k-1}}M_{p,0},$$

把它代入(2.5)我们得到

$$M_{p,k}\leqslant\varepsilon M_{p,k+1}+\frac{C_3}{\varepsilon^k}M_{p,0}.\tag{2.6}$$

即对于 $j=k+1$，$i=k$，(2.4)成立.

如果 $i<k$，则据($\varepsilon=\delta$ 的)归纳法假定和($\varepsilon=\lambda$ 的)(2.6)有

$$\begin{aligned}M_{p,i}&\leqslant\delta M_{p,k}+\frac{C_4}{\delta^{i/(k-i)}}M_{p,0}\\&\leqslant\delta\lambda M_{p,k+1}+\left[\frac{C_3\delta}{\lambda^k}+\frac{C_4}{\delta^{i/(k-i)}}\right]M_{p,0}.\end{aligned}$$

取 $\delta=\varepsilon^{(k-i)/(k+1-i)}$，$\lambda=\varepsilon^{1/(k+1-i)}$，则对于 $j=k+1$，(2.4)的

证明完毕.

顾及定义(1.4),我们看出(2.1)是(2.4)的结果.

引理 3 对于任何 $a \geqslant 0$ 和非负整数 p, q, j, 且 $q \geqslant j$, 我们都有:

(2.7) $$|D_x^j u|_{q,a} \leqslant C_1 |u|_{q-j, a+j},$$

(2.8) $$|uv|_{p+q,a} \leqslant C_2 |u|_{p,a} |v|_{q,a},$$

(2.9) $$|u|_{p,a+1} \leqslant C_3 |u|_{p,a-[a]} + C_4 \sum |D_x u|_{p+1,a},$$

其中 $[a]$ 是不大于 a 的最大整数,而 C_k 均为仅依赖于 a, p, q, j 的常数.

其证明是简单的,我们把它留给读者.

为了使读者进一步熟悉第 1 节的记号，我们给出两条较初等的引理,虽然往后并不用它.

引理 4 设 N 为 D 中的半立方体,它以 P 点为顶,棱长为

$$r = d_P/2(n+1)^{1/2}.$$

那末对于任何 $a \geqslant 0$ 和整数 $p \geqslant 0$ 有

(2.10) $$r|u|_{p,a}^N \leqslant |u|_{p+1,a}^D.$$

证明 取 $r|u|_{p,a}^N$ 的一项,设为

(2.11) $$r \operatorname*{l.u.b.}_{Q \in N} d_{Q,N}^{p+i} |D_x^i u(Q)|,$$

其中 $d_{Q,N}$ 为对于 N 所定义的 d_Q. 对于 $Q \in N$, 因为

$$r \leqslant (n+1)^{1/2} r = d_p - (n+1)^{1/2} r \leqslant d_Q,$$

又因为 $d_{Q,N} \leqslant d_Q$, 所以表达式(2.11)小于或等于

$$\operatorname*{l.u.b.}_{Q \in N} d_Q^{p+i+1} |D_x^i u(Q)|.$$

用同样方法处理 $r|u|_{p,a}^N$ 中其他各项，就推出不等式(2.10).

下一引理是前一引理的逆命题.

引理 5 假设对某个 $a \geqslant 0$ 和整数 $p \geqslant 0$, 有 $r|u|_{p,a}^N \leqslant H$, 其中 N 为以点 P 为顶, 棱长为 $r = d_P/2(n+1)^{1/2}$ 的半立方体, P 在 D 中变化,而 H 为常数,则 $|u|_{p+1,a}^D$ 是有限的,并且

(2.12) $$|u|_{p+1,a}^D \leqslant CH,$$

其中 C 仅依赖于 p 和 a.

证明　对于任何 $P\in D$，$0\leqslant j\leqslant[\alpha]$，有

$$rd_{P,N}^{p+j}|D_x^j u(P)|\leqslant H,$$

其中 $d_{P,N}$ 为对于 N 所定义的 d_P. 因为

$$d_{P,N}=r=d_P/2(n+1)^{1/2},$$

我们得到

$$d_P^{p+j+1}|D_x^j u(P)|\leqslant H[2(n+1)^{1/2}]^{p+j+1},$$

对于 $P\in D$ 取上确界，就推出不等式

$$M_{p+1,j}[u]\leqslant H[2(n+1)^{1/2}]^{p+j+1}.$$

用同样方法处理 $|u|_{p+1,\alpha}$ 中其他各项，就完成引理的证明.

3. 辅助定理

在这一节里 N 是一个以 P 为顶，棱长为 d 的固定的半立方体. K 记种种仅依赖于 n 和 α 的正的常数. 将使用记号

$$H_{Q,N}[g]=\underset{R\in N}{\text{l. u. b.}}\frac{|g(Q)-g(R)|}{d(Q,R)^\alpha}.$$

在证明第 1 节定理 1 时，决定性的一步在于建立下列辅助定理.

定理2　设 f 在 N 内 Hölder 连续（指数为 α），又设 u，$D_x u$，$D_x^2 u$ 在 N 内也是 Hölder 连续的（指数为 α）. 最后，设 u 满足方程

$$L_0 u\equiv\Delta u-\frac{\partial u}{\partial t}=f\quad(\text{在} N \text{内}),\tag{3.1}$$

其中 Δ 为 Laplace 算子 $\sum_{i=1}^n\partial^2/\partial x_i^2$. 存在（仅依赖于 n 和 α 的）常数 K，使对于 $i=0,1,2$，而 $d(P,Q)\leqslant\dfrac{d}{4}$ 时，有

$$|D_x^i u(P)|\leqslant d^{-i}K\,\underset{N}{\text{l. u. b.}}\,|u|+d^{2-i}K\,\underset{N}{\text{l. u. b.}}\,|f|+d^{2-i+\alpha}KH_{P,N}[f]\equiv KI_i,\tag{3.2}$$

$$d^\alpha\frac{|D_x^i u(P)-D_x^i u(Q)|}{d(P,Q)^\alpha}\leqslant KI_i+Kd^{2-i+\alpha}H_{Q,N}[f].\tag{3.3}$$

证明　以 N_η 记顶为 P，棱长为 ηd 的半立方体，并设 $\varphi(Q)$ 为 N 内的三次连续可微函数，它满足

$$(3.4) \qquad \varphi(Q)=\begin{cases}1 & (Q\in N_{1/2}),\\ 0 & (Q\in(N-N_{3/4}))\end{cases}$$

和

$$(3.5) \qquad |D_x^k D_t^h \varphi(x,t)| \leqslant A d^{-k-2h} \qquad (0\leqslant k+h\leqslant 2).$$

从第一章问题 1 (取 $A_0=N_{2/3}$, $\varepsilon=1/12$) 中的构造可以知道这样的函数存在.

设 $P=(x^0, t^0+d^2)$, B 记N的下底. 如果我们对于 $u(x,t)$ 和 $\varphi(x,t)\,G(x-\xi, t-\tau)$ 使用 Green 恒等式 (1.8.4), 其中

$$(3.6) \qquad G(x-\xi, t-\tau)\equiv G(x,t;\xi,\tau)$$

$$=\frac{(\tau-t)^{-n/2}}{(2\sqrt{\pi})^n}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4(\tau-t)}\right]$$

是 $L_0u=0$ 的伴随方程 $L_0^*u=0$ 的基本解,则对于任何$(\xi,\tau)\in N_{1/2}$, 积分后我们立即得到

$$(3.7) \qquad u(\xi,\tau)=-\int_{t^0}^{\tau}\int_B \varphi(x,t)f(x,t)G(x-\xi,t-\tau)dxdt$$

$$+\int_{t^0}^{\tau}\int_B u(x,t)L_0^*[\varphi(x,t)G(x-\xi,t-\tau)]dxdt$$

$$=-H_0+J_0.$$

我们首先对 $i=2$ 来证明 (3.2) 和 (3.3). 令

$$(3.8) \qquad H(Q)=D_\xi^2 H_0, \quad J(Q)=D_\xi^2 J_0, \quad \text{其中 } Q=(\xi,\tau),$$

我们有

$$(3.9) \qquad D_\xi^2 u(Q)=-H(Q)+J(Q).$$

对于任何到P的距离小于 $d/4$ 的点 Q, 我们从估计 $J=J(Q)$ 开始.

以 Ω 记区域 $(N_{3/4}-N_{1/2})\cap\{t^0\leqslant t\leqslant\tau\}$, 我们可以写成

$$(3.10) \qquad J=\int_\Omega u(x,t)\{(\Delta_x+D_t)[\varphi(x,t)D_\xi^2 G(x-\xi,$$

$$t-\tau)]\}dxdt.$$

在下文中我们需要不等式

$$(3.11) \qquad |D_\tau^k D_\xi^j G(x-\xi, t-\tau)|$$

$$\leqslant K(\tau - t)^{-(n+2k+j)/2}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{5(\tau - t)}\right] \qquad (0 \leqslant k + j \leqslant 4),$$

直接对 G 微分并利用不等式 $t^m e^{-\varepsilon t} \leqslant C(0 < t < \infty)$，就可以验证这个不等式 ($m$, ε 为任何正数,而 C 仅依赖于 m 和 ε)。

利用(3.5),(3.11)并注意到 $(\Delta_x + D_t)D_\xi^2 G = 0$，我们就得到

$$(3.12) \qquad |J| \leqslant K(\underset{N}{\mathrm{l.u.b.}}\, |u|) \sum_{i=0}^{1} d^{-2+i} \int_{\Omega} (\tau - t)^{-(n+2+i)/2} \times \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{5(\tau - t)}\right] dxdt.$$

把最后那个积分分解为 $\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2}$，其中 Ω_1 由 Ω 中所有满足

$$|x - x^0| > \frac{d}{2}$$

的点 (x, t) 组成,而 $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$。

利用不等式 $|x - \xi| \geqslant d/4$ $((x, t) \in \Omega_1)$，然后作代换 $z = d^2/(\tau - t)$，我们得到

$$(3.13) \qquad \int_{\Omega_1} \leqslant Kd^n \int_0^\infty \frac{z^{(n+2+i)/2}}{d^{n+2+i}} \exp[-Kz] \frac{d^2}{z^2} dz \leqslant \frac{K}{d^i}.$$

如果 $(x, t) \in \Omega_2$，因为 $\tau - t > (d/4)^2$ (回忆起 $d(P, Q) < d/4$)，故

$$(3.14) \qquad \int_{\Omega_2} \leqslant \frac{K}{d^{n+2+i}} \mathrm{vol.}\, \Omega_2 \leqslant \frac{K}{d^i}.$$

综合 (3.13), (3.14), 从 (3.12) 我们推出

$$(3.15) \qquad |J| \leqslant Kd^{-2} \underset{N}{\mathrm{l.u.b.}}\, |u|.$$

在(对 $d(P, Q) < d/4$ 的点 Q) 估计 $H = H(Q)$ 时,我们要用到如下等式:

$$(3.16) \qquad H = \int_{t^0}^{\tau}\int_B [D_\xi^2 G(x - \xi, t - \tau)][\varphi(x, t)f(x, t) - \varphi(\xi, \tau)f(\xi, \tau)]dxdt + [\varphi(\xi, \tau)f(\xi, \tau)] \times D_\xi\left[\int_{t^0}^{\tau}\int_B D_\xi G(x - \xi, t - \tau)dxdt\right] = H_1 + H_2.$$

注意，用散度定理我们也可以把 H_2 里面的那个积分写成沿边界的积分．从第一章第 3 节的结果可以验证 (3.16)．事实上，据第一章第 3 节定理 4，我们有

$$H=\int_{t^0}^{\tau}dt\int_B[D_\xi^2G(x-\xi,t-\tau)]\varphi(x,t)f(x,t)dx.$$

如果写成 $\varphi(x,t)f(x,t)=[\varphi(x,t)f(x,t)-\varphi(\xi,\tau)f(\xi,\tau)]+\varphi(\xi,\tau)f(\xi,\tau)$，我们就得到 $H=H_1+H_2'$，其中

$$H_2'=\varphi(\xi,\tau)f(\xi,\tau)\int_{t^0}^{\tau}dt\int_B D_\xi^2G(x-\xi,t-\tau)dx.$$

对于 $f=1$，利用第一章第 3 节定理 3, 4，就推出 $H_2'=H_2$．于是 (3.16) 证毕．

利用(3.11)和不等式

$$(3.17)\quad |\varphi(x,t)f(x,t)-\varphi(\xi,\tau)f(\xi,\tau)|\leqslant K(|x-\xi|^\alpha+|t-\tau|^{\alpha/2})H_{Q,N}[f]+K\left(\frac{|x-\xi|}{d}+\frac{|t-\tau|}{d^2}\right)\times\underset{N}{\text{l.u.b.}}|f|,$$

我们可以估计 H_1:

$$(3.18)\quad |H_1|\leqslant KH_{Q,N}[f]\int_{t^0}^{\tau}\int_B(\tau-t)^{-(n+2)/2}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{5(\tau-t)}\right]\times[|x-\xi|^\alpha+|t-\tau|^{\alpha/2}]dxdt$$
$$+K(\underset{N}{\text{l.u.b.}}|f|)\int_{t^0}^{\tau}\int_B(\tau-t)^{-(n+2)/2}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{5(\tau-t)}\right]\times\left[\frac{|x-\xi|}{d}+\frac{|t-\tau|}{d^2}\right]dxdt.$$

在第一个积分中 (对每个固定的 t) 作代换 $|x-\xi|=\rho(\tau-t)^{1/2}$，并忆及 $\tau-t^0\leqslant d^2$，我们就得到 $H_{Q,N}[f]$ 的系数不超过

$$K\int_{t^0}^{\tau}\int_0^\infty\frac{(\tau-t)^{\alpha/2}\rho^\alpha+(\tau-t)^{\alpha/2}}{(\tau-t)^{(n+2)/2}}\exp[-K\rho](\tau-t)^{n/2}$$
$$\times\rho^{n-1}d\rho dt\leqslant K\int_{t^0}^{\tau}\frac{dt}{(\tau-t)^{1-\alpha/2}}\leqslant K(\tau-t^0)^{\alpha/2}\leqslant Kd^\alpha.$$

同样地，我们得到 $\underset{N}{\text{l.u.b.}}|f|$ 的系数不超过 K．因此有

(3.19) $$|H_1| \leqslant Kd^\alpha H_{Q,N}[f] + K\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|f|.$$

至于 H_2，如以 dS_z 记 B 的边界 ∂B 的曲面元素，我们得到

(3.20) $$|H_2| \leqslant K(\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|f|)\int_{t^0}^{\tau}\int_{\partial B} |D_\xi G(x-\xi, t-\tau)|\,dS_z dt.$$

利用(3.11)和对于 $x \in \partial B$ 的不等式 $|x-\xi| > 3d/4$（回忆起 $d(P, Q) < d/4$），然后作变换 $z = d^2/(\tau - t)$，因为 $\beta = d^2/(\tau - t^0) \geqslant 1$，我们得到

(3.21) $$\int_{t^0}^{\tau}\int_{\partial B} |D_\xi G(x-\xi, t-\tau)|\,dS_z dt \leqslant Kd^{n-1}\int_{\beta}^{\infty} \frac{z^{(n+1)/2}}{d^{n+1}}\frac{d^2}{z^2}\exp[-Kz]dz \leqslant K,$$

因此，有

$$|H_2| \leqslant K\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|f|.$$

把它和(3.19)结合起来，从(3.16)我们得到

(3.22) $$|H| \leqslant Kd^\alpha H_{Q,N}[f] + K\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|f|.$$

从 (3.22)，(3.15) 和 (3.9) 就推出 $i = 2$ 的不等式 (3.2)。

$i = 2$ 的 (3.3) 的证明　写成

(3.23) $$d^\alpha\frac{|D_\xi^2 u(P) - D_\xi^2 u(Q)|}{d(P, Q)^\alpha} \leqslant d^\alpha\frac{|H(P) - H(Q)|}{d(P, Q)^\alpha} + d^\alpha\frac{|J(P) - J(Q)|}{d(P, Q)^\alpha} = H' + J',$$

其中 $J(Q)$，$H(Q)$ 由(3.10)，(3.16)令 $Q = (\xi, \tau)$ 而给出，我们着手估计 J'.

令 $P = (\xi, \tau)$，$Q = (\xi', \tau')$ 是方便的．于是 $\xi = x^0$，$\tau = t^0 + d^2$，$\tau \geqslant \tau'$．利用 (3.11) 并注意到 $(\Delta_x + D_t)D_\xi^2 G = 0$，我们得到

(3.24) $$|J'| \leqslant \frac{d^\alpha}{d(P, Q)^\alpha}K(\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|u|)\Big\{\sum_{i=0}^{1}(\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|D_x^{2-i}\varphi|) \times\int_{\Omega_0}|D_x^{2+i}G(x-\xi, t-\tau) - D_x^{2+i}G(x-\xi', t-\tau')|\,dxdt + (\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|D_t\varphi|)\int_{\Omega_0}|D_x^2 G(x-\xi, t-\tau)$$

$$-D_x^2G(x-\xi',t-\tau')|dxdt$$

$$+\sum_{i=0}^{1}(\underset{N}{\text{l. u. b.}}|D_x^{2-i}\varphi|)\int_{\Omega_*}|D_x^{2+i}G(x-\xi,t-\tau)|\,dxdt$$

$$+(\underset{N}{\text{l. u. b.}}|D_t\varphi|)\int_{\Omega_*}|D_x^2G(x-\xi,t-\tau)|dxdt\Big\}.$$

这里 Ω_0 是区域 $(N_{3/4}-N_{1/2})\cap\{t^0\leqslant t\leqslant\tau'\}$，而 Ω_* 是区域 $(N_{3/4}-N_{1/2})\cap\{\tau'<t\leqslant\tau\}$.

为了估计积分

$$(3.25)\qquad M\equiv\int_{\Omega_0}|D_x^{2+i}G(x-\xi,t-\tau)-D_x^{2+i}G(x-\xi',t-\tau')|dxdt,$$

我们应用中值定理就得到

$$M\leqslant\int_{\Omega_0}[|D_x^{2+i+1}G(x-\bar\xi,t-\bar\tau)||\xi-\xi'|+|D_x^{2+i}D_tG(x-\bar\xi,t-\bar\tau)|(\tau-\tau')]dxdt,$$

其中 $\bar\xi$ 在区间 (ξ,ξ') 内，而 $\bar\tau$ 在区间 (τ,τ') 内. 利用(3.11)，然后把 Ω_0 拆成在 (3.12) 后面的计算中那样的两个区域，就得到(比较 (3.13))

$$M\leqslant\frac{K|\xi-\xi'|}{d^{i+1}}+\frac{K(\tau-\tau')}{d^{i+2}}.$$

既然

$$|\xi-\xi'|\leqslant d(P,Q)\leqslant d/4,\qquad \tau-\tau'\leqslant d(P,Q)^2\leqslant d^2/16,$$

那么就有

$$(3.26)\qquad M\leqslant\frac{d(P,Q)^\alpha}{d^\alpha}\,\frac{K}{d^i}.$$

其次，我们必须估计积分

$$(3.27)\qquad M_1\equiv\int_{\Omega_*}|D_x^{2+i}G(x-\xi,t-\tau)|dxdt.$$

注意到当 $(x,t)\in\Omega_*$ 时有 $|x-\xi|>d/4$ 并利用 (3.11)，我们得到

$$M_1 \leqslant Kd^n \int_{\tau'}^{\tau} (\tau - t)^{-(n+2+i)/2} \exp\left[-\frac{Kd^2}{\tau - t}\right] dt.$$

如作代换 $z = d^2/(\tau - t)$，则对任何 $\mu \geqslant 0$ (K 依赖于 μ) 有

$$M_1 \leqslant Kd^n \int_A^{\infty} \frac{z^{(n+2+i)/2}}{d^{n+2+i}} \exp[-K_z] \frac{d^2}{z^2} dz \leqslant \frac{K}{d^i} \frac{1}{A^{\mu}},$$

其中 $A = d^2/(\tau - \tau')$. 取 $\mu = \alpha/2$ 并利用

$$\frac{1}{A^{\alpha/2}} = \frac{(\tau - \tau')^{\alpha/2}}{d^{\alpha}} \leqslant \frac{d(P, Q)^{\alpha}}{d^{\alpha}}$$

我们得到

(3.28) $$M_1 \leqslant \frac{d(P, Q)^{\alpha}}{d^{\alpha}} \frac{K}{d^i}.$$

将不等式 (3.26), (3.28) 代入 (3.24), 并利用 (3.5) 我们得到

(3.29) $$J' \leqslant Kd^{-2} \operatorname*{l.u.b.}_{N} |u|.$$

由(3.23),(3.16)所定义的 H' 的估计，我们可以写成

(3.30) $$H' \leqslant W_1 + W_2 + W_3 + W_4,$$

其中

$$W_1 = \frac{d^{\alpha}}{d(P, Q)^{\alpha}} \Big| \int_{t^0}^{\tau'} \int_B \{[D_{\xi}^2 G(x - \xi, t - \tau)] \times [\varphi(x, t)f(x, t) - \varphi(\xi, \tau)f(\xi, \tau)] - [D_{\xi'}^2 G(x - \xi', t - \tau')][\varphi(x, t)f(x, t) - \varphi(\xi', \tau')f(\xi', \tau')]\} dxdt \Big|,$$

$$W_2 = \frac{d^{\alpha}}{d(P, Q)^{\alpha}} \Big| \varphi(\xi, \tau)f(\xi, \tau) D_{\xi} \int_{t^0}^{\tau'} \int_B D_{\xi} G(x - \xi, t - \tau) dxdt - \varphi(\xi', \tau')f(\xi', \tau') D_{\xi'} \int_{t^0}^{\tau'} \int_B D_{\xi} G(x - \xi', t - \tau') dxdt \Big|,$$

$$W_3 = \frac{d^{\alpha}}{d(P, Q)^{\alpha}} \Big| \int_{\tau'}^{\tau} \int_B [D_{\xi}^2 G(x - \xi, t - \tau)] \times [\varphi(x, t)f(x, t) - \varphi(\xi, \tau)f(\xi, \tau)] dxdt \Big|,$$

$$W_4 = \frac{d^\alpha}{d(P, Q)^\alpha} \left| \varphi(\xi, \tau) f(\xi, \tau) D_\xi \int_{\tau'}^{\tau} \int_B D_\xi G(x - \xi, t - \tau) dx dt \right|.$$

为了估计 W_3，我们利用(3.11)，(3.17)，然后作代换 $|x-\xi| = (\tau - t)^{1/2}\rho$ 并注意 $\tau - \tau' < d(P, Q)^2$. 我们得到(比较(3.19)的推导)

(3.31) $$W_3 \leqslant K d^\alpha H_{P,N}[f] + K \operatorname{l.u.b.}_N |f|.$$

为了估计 W_4，我们用散度定理把在 B 上的积分化为沿 ∂B 的积分，然后利用(对于 $x \in \partial B$ 的)不等式 $|x - \xi| \geqslant d$ 和代换 $z = d^2/(\tau - t)$，我们得到

(3.32) $$W_4 \leqslant K(\operatorname{l.u.b.}_N |f|) \frac{d^\alpha}{d(P, Q)^\alpha} d^{n-1} \int_A^\infty \frac{z^{(n+1)/2}}{d^{n+1}} \times \exp[-Kz] \frac{d^2}{z^2} dz \leqslant K(\operatorname{l.u.b.}_N |f|) \times \frac{d^\alpha}{d(P, Q)^\alpha} \frac{1}{A^\mu} \qquad (\mu \geqslant 0),$$

其中 $A = d^2/(\tau - \tau')$. 取 $\mu = \alpha/2$ 并利用不等式 $\tau - \tau' \leqslant d(P, Q)^2 \leqslant d^2/16$，我们得到

(3.33) $$W_4 \leqslant K \operatorname{l.u.b.}_N |f|.$$

我们来估计 W_2. 因为 $\varphi(\xi, \tau) = \varphi(\xi', \tau') = 1$，所以

(3.34) $$W_2 \leqslant W_{21} + W_{22},$$

其中

$$W_{21} = \frac{d^\alpha}{d(P, Q)^\alpha} (\operatorname{l.u.b.}_N |f|) \left| D_{\xi'} \int_{t^0}^{\tau'} \int_B D_\xi G(x - \xi, t - \tau) dx dt - D_{\xi'} \int_{t^0}^{\tau'} \int_B D_\xi G(x - \xi', t - \tau') dx dt \right|,$$

$$W_{22} = \frac{d^\alpha}{d(P, Q)^\alpha} H_{P,N}[f] d(P, Q)^\alpha \times \left| D_\xi \int_{t^0}^{\tau'} \int_B D_\xi G(x - \xi, t - \tau) dx dt \right|.$$

W_{22} 中最后的那个因子和(3.16)H_2 的定义中最后那个因子是相似的，所以可利用 (3.21) 来估计. 因此得到不等式

$$(3.35) \qquad W_{22} \leqslant K d^{\alpha} H_{P,N}[f].$$

如果我们证得

$$(3.36) \qquad W_{21} \leqslant K \operatorname*{l.u.b.}_{N} |f|,$$

那末连同(3.35),(3.34)就有

$$(3.37) \qquad W_2 \leqslant K d^{\alpha} H_{P,N}[f] + K \operatorname*{l.u.b.}_{N} |f|.$$

(3.36) 的证明　　首先考虑特殊情形 $\tau' = \tau$. 据中值定理，W_{21} 中最后那个因子不超过

$$(3.38) \qquad K|\xi - \xi'| \int_{t^0}^{\tau}\int_{\partial B} |D_{\bar{\xi}}^2 G(x - \bar{\xi}, t - \tau)| dS_x dt,$$

其中 $\bar{\xi}$ 在区间 (ξ, ξ') 内. 借助不等式 $|x-\bar{\xi}| \geqslant 3d/4 \ (x \in \partial B)$，用估计出(3.20)中的积分那样的方法，可以估计这个积分，于是利用 $|\xi - \xi'| = d(P, Q) \leqslant d/4$，就得到不等式 (3.36).

其次考虑特殊情形 $\xi = \xi'$. 此时

$$(3.39) \qquad W_{21} \leqslant \frac{d^{\alpha}}{d(P, Q)^{\alpha}} (\operatorname*{l.u.b.}_{N} |f|) \int_{\tau'}^{\tau} d\sigma \times \left[\left|\int_{t^0}^{\tau'} dt \int_{\partial B} |D_{\xi} D_{\sigma} G(x - \xi, t - \sigma)| dS_x\right|\right].$$

括号里的积分可以用估计 (3.38)，(3.20) 中那些积分的同样方法来估计，于是我们得到一个界 K/d^2. 把它代入 (3.39) 并利用 $\tau-\tau' = d(P, Q)^2 \leqslant d^2/16$，我们又得到不等式 (3.36).

最后，如果把 W_{21} 的最后那个因子写成如下形式

$$\left[D_{\xi} \int_{t^0}^{\tau'}\int_{B} D_{\xi} G(x - \xi, t - \tau) dx dt - D_{\xi}\int_{t^0}^{\tau'}\int_{B} D_{\xi} G(x - \xi, t - \tau') dx dt\right] + \left[D_{\xi} \int_{t^0}^{\tau'}\int_{B} D_{\xi} G(x - \xi, t - \tau') dx dt - D_{\xi'} \int_{t^0}^{\tau'} D_{\xi} G(x - \xi', t - \tau') dx dt\right],$$

并利用前面两种特殊情形的结果，就可以推出一般情况下 (3.36) 的证明.

为了完成 H' 的估计，还要考虑 W_1. 这比以前对 W_i 考虑的要多得多，不过，一旦完成了对 W_1 的估计，定理 2 的证明就容易完成了.

对 W_1 的估计　利用 (3.17) 我们把 W_1 分成四项，

$$W_1 \leqslant V_1 + V_2 + V_3 + V_4, \tag{3.40}$$

其中

$$\begin{aligned}
V_1 = K \frac{d^\alpha}{d(P,Q)^\alpha} & \times \int_{t^0}^{\tau'-\eta}\int_B |D_\xi^2 G(x-\xi, t-\tau) - D_\xi^2 G(x-\xi', t-\tau')| \\
& \times \left[(|x-\xi|^\alpha + (\tau-t)^{\alpha/2}) H_{P,N}[f] + \left(\frac{|x-\xi|}{d} + \frac{\tau-t}{d^2}\right) \right. \\
& \left. \times \underset{N}{\text{l. u. b.}} |f| \right] dx dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 = K \frac{d^\alpha}{d(P,Q)^\alpha} & \left| \int_{t^0}^{\tau'-\eta}\int_B D_{\xi'}^2 G(x-\xi', t-\tau') dx dt \right| \\
& \times \left[(|\xi-\xi'|^\alpha + (\tau-\tau')^{\alpha/2}) H_{P,N}[f] \right. \\
& \left. + \left(\frac{|\xi-\xi'|}{d} + \frac{\tau-\tau'}{d^2}\right) \underset{N}{\text{l. u. b.}} |f| \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3 = K \frac{d^\alpha}{d(P,Q)^\alpha} & \int_{\tau'-\eta}^{\tau'}\int_B |D_\xi^2 G(x-\xi, t-\tau)| \\
& \times \left[(|x-\xi|^\alpha + (\tau-t)^{\alpha/2}) H_{P,N}[f] \right. \\
& \left. + \left(\frac{|x-\xi|}{d} + \frac{\tau-t}{d^2}\right) \underset{N}{\text{l. u. b.}} |f| \right] dx dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_4 = K \frac{d^\alpha}{d(P,Q)^\alpha} & \int_{\tau'-\eta}^{\tau'}\int_B |D_{\xi'}^2 G(x-\xi', t-\tau')| \\
& \times \left[(|x-\xi'|^\alpha + (\tau'-t)^{\alpha/2}) H_{Q,N}[f] \right. \\
& \left. + \left(\frac{|x-\xi'|}{d} + \frac{\tau'-t}{d^2}\right) \underset{N}{\text{l. u. b.}} |f| \right] dx dt.
\end{aligned}$$

这里 $\eta = d(P,Q)^2/4$.

利用(3.11)并作代换 $|x-\xi|=(\tau-t)^{1/2}\rho$，我们得到 V_3 中 $H_{P,N}[f]$ 的系数不超过

$$K\frac{d^\alpha}{d(P,Q)^\alpha}\int_{\tau'-\eta}^{\tau'}\int_0^\infty\frac{(\tau-t)^{\alpha/2}\rho^\alpha+(\tau-t)^{\alpha/2}}{(\tau-t)^{(n+2)/2}}$$

$$\times\exp[-K\rho](\tau-t)^{n/2}\rho^{n-1}d\rho dt\leqslant K\frac{d^\alpha}{d(P,Q)^\alpha}$$

$$\times\int_{\tau'-\eta}^{\tau'}\frac{dt}{(\tau-t)^{1-\alpha/2}}\leqslant K\frac{d^\alpha}{d(P,Q)^\alpha}\eta^{\alpha/2}=Kd^\alpha.$$

类似地我们得到 V_3 中 $\text{l.u.b.}|f|$ 的系数不超过K. 因此

$$V_3\leqslant Kd^\alpha H_{P,N}[f]+K\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|f|. \tag{3.41}$$

同样,我们有

$$V_4\leqslant Kd^\alpha H_{Q,N}[f]+K\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|f|. \tag{3.42}$$

利用散度定理和(3.21)中类似的计算，我们得到 V_2 中的积分不超过 K。因此，

$$V_2\leqslant Kd^\alpha H_{P,N}[f]+K\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|f|. \tag{3.43}$$

剩下要估计 V_1. 为简单计，首先考虑特殊情形 $\tau=\tau'$. 设 $V_1=V_{11}+V_{12}$，其中 V_{11} 为 V_1 中 $H_{P,N}[f]$ 的系数,而 V_{12} 为 V_1 中 $\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|f|$ 的系数. 如果 ζ 为区间 (ξ,ξ') 中的变点,则

$$V_{11}\leqslant K\frac{d^\alpha}{d(P,Q)^\alpha}\left|\int_\xi^{\xi'}d\zeta\int_{t^0}^{\tau'-\eta}dt\int_B|D_\zeta^2G(x-\zeta,t-\tau)|\right.$$

$$\left.\times[|x-\zeta|^\alpha+(\tau-t)^{\alpha/2}+|\zeta-\xi|^\alpha]dx\right|.$$

利用(3.11)并作代换 $|x-\zeta|=(\tau-t)^{1/2}\rho$，我们得到

$$V_{11}\leqslant K\frac{d^\alpha}{d(P,Q)^\alpha}\left|\int_\xi^{\xi'}\left(\frac{1}{\eta^{(1-\alpha)/2}}+\frac{|\zeta-\xi|^\alpha}{\eta^{1/2}}\right)\right. \tag{3.44}$$

$$\left.\times d\zeta\right|\leqslant Kd^\alpha.$$

同样地可以估计 V_{12}. 于是我们得到

$$V_1\leqslant Kd^\alpha H_{P,N}[f]+K\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|f|. \tag{3.45}$$

其次我们考虑特殊情形 $\xi=\xi'$，并如前把 V_1 拆成 $V_{11}+V_{12}$.

写成

$$V_{11} \leqslant K \frac{d^{\alpha}}{d(P,Q)^{\alpha}} \int_{\tau'}^{\tau} d\sigma \int_{t^0}^{\tau'-\eta} dt \int_B |D_\xi^2 D_\sigma G(x-\xi, t-\sigma)|$$

$$\times [|x-\xi|^{\alpha} + (\sigma - t)^{\alpha/2} + (\tau - \sigma)^{\alpha/2}] dx.$$

利用(3.11)并作代换 $|x-\xi| = (t-\sigma)^{1/2}\rho$ 就可以象前一情形那样进行下去．我们得到 $V_{11} \leqslant Kd^{\alpha}$．同样地处理 V_{12}，于是推出(3.45)．

对于一般情形，我们把 V_1 分成 $V_{11}+V_{12}$，得到

$$V_{11} \leqslant K \frac{d^{\alpha}}{d(P,Q)^{\alpha}} \int_{t^0}^{\tau'-\eta} \int_B |D_\xi^2 G(x-\xi, t-\tau)$$

$$- D_\xi^2 G(x-\xi, t-\tau')| [|x-\xi|^{\alpha} + (\tau - t)^{\alpha/2}] dx dt$$

$$+ K \frac{d^{\alpha}}{d(P,Q)^{\alpha}} \int_{t^0}^{\tau'-\eta} \int_B |D_\xi^2 G(x-\xi, t-\tau')$$

$$- D_{\xi'}^2 G(x-\xi', t-\tau')| [|x-\xi'|^{\alpha} + (\tau' - t)^{\alpha/2}] dx dt$$

$$+ K \frac{d^{\alpha}}{d(P,Q)^{\alpha}} \int_{t^0}^{\tau'-\eta} \int_B |D_\xi^2 G(x-\xi, t-\tau')$$

$$- D_{\xi'}^2 G(x-\xi', t-\tau')| dx dt [|\xi-\xi'|^{\alpha} + (\tau - \tau')^{\alpha/2}].$$

前两项可由前两种特殊情形估计，最后那一项不超过

$$Kd^{\alpha} \left| \int_{\xi}^{\xi'} d\zeta \int_{t^0}^{\tau'-\eta} dt \int_B |D_\zeta^3(x-\zeta, t-\tau')| dx \right|.$$

利用(3.11)并作代换 $|x-\xi| = (\tau - t)^{1/2}\rho$，我们发现最后那个式子不超过

$$Kd^{\alpha} \left| \int_{\xi}^{\xi'} \frac{d\zeta}{\eta^{1/2}} \right| \leqslant Kd^{\alpha} \frac{|\xi' - \xi|}{d(P,Q)} \leqslant Kd^{\alpha}.$$

于是就证明了 $V_{11} \leqslant Kd^{\alpha} H_{P,N}[f]$．类似地估计 V_{12}，从而建立(3.45)．

综合(3.45)，(3.41)—(3.43)并利用(3.40)我们得到

$$W_1 \leqslant Kd^{\alpha} H_{P,N}[f] + Kd^{\alpha} H_{Q,N}[f] + K \operatorname*{l.u.b.}_N |f|. \tag{3.46}$$

把(3.46)和(3.37)，(3.33)，(3.31)综合起来就得到 H' 的估计(见(3.30))，而当我们把这个估计式和(3.29)，(3.23)综合起来时，就完成 $i=2$ 时(3.3)的证明．

于是对于 $i=2$ 的情形我们证明了(3.2)和(3.3). 为了对于 $i=0,1$ 证明这些不等式,我们把 D_ξ^i 作用于(3.7)的两边,然后按照以前对于 $i=2$ 的证明那样逐步进行下去. 其细节留给读者.

我们把定理2推广到方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial t}=f \tag{3.47}$$

来结束本节,其中 a_{ij} 为常数, $|a_{ij}|\leqslant k_1$, 且对于任何实矢量 ξ, 有

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant k_2|\xi|^2 \qquad (k_2>0). \tag{3.48}$$

定理 2′ 如果方程(3.1)由方程(3.47)代替,但现在不等式(3.2),(3.3)中的常数 K 依赖于 k_1, k_2, n 和 α, 则定理2仍为真.

现在如果把 $G(x-\xi, t-\tau)$ 定义为

$$\frac{(\det(a^{ij}))^{1/2}}{(2\sqrt{\pi})^n}(\tau-t)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\sum a^{ij}(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(\tau-t),}\right],$$

((a^{ij}) 为 (a_{ij}) 的逆矩阵)则定理 2′ 的证明和定理2的证明是类似的. 以某个 K 代替(指数中的) 1/5 时,不等式(3.11)还是成立的. 假如以 $\sum a_{ij}\partial^2/\partial x_i\partial x_j$ 代替 Δx, 所有其他计算还是一样的.

4. 内估计的推导

在这一节里,我们要证明第1节定理1. 它可从第2节引理2推出,但只要证明

$$M\equiv M_{0,2}[u]\leqslant K(\underset{D}{\mathrm{l.u.b}}\,|u|+|f|_{2,\alpha}), \tag{4.1}$$

$$M_i'\equiv M_{0,i+\alpha}[u]\leqslant K(\underset{D}{\mathrm{l.u.b.}}\,|u|+|f|_{2,\alpha}) \tag{4.2}$$

$$(i=0,1,2)$$

就够了. 令 $M_{0,i}=M_{0,i}[u]$, $M_{0,i+\alpha}=M_{0,i+\alpha}[u]$. 不失一般性,可以假定 $M_{0,i}$, $M_{0,i+\alpha}$ 都是有限的,否则我们可以用和引理2证明中的第一段同样的推理,首先在 D_ε 中建立不等式(4.1),(4.2),然后让 $\varepsilon\to 0$.

因为 M 有限,于是存在点 $P\in D$ 和导数 D_x^2, 使得

$$(4.3)\qquad \frac{1}{2}M \leqslant d_P^2|D_x^2u(P)|.$$

设 N 为以 P 为顶，棱长为 λd_P 的半立方体，其中 $\lambda < 1/2(n+1)^{1/2}$，其值将在下文进一步确定．把(1.1)写成如下形式：

$$(4.4)\qquad \sum a_{ij}(P)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t} = \sum[a_{ij}(P) - a_{ij}(Q)]\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum b_i(Q)\frac{\partial u}{\partial x_i} - c(Q)u + f(Q) \equiv F(Q)$$
$$(Q = (x, t)),$$

由定理 2′，我们得到

$$(4.5)\qquad |D_x^2u(P)| \leqslant Kd^{-2}\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|u| + K\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|F| + Kd^{\alpha}H_{P,N}[F] \equiv KI.$$

后面我们要用到不等式

$$(4.6)\qquad H_{P,N}[gh] \leqslant |g(P)|H_{P,N}(h) + (\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|h|)H_{P,N}[g].$$

为了估计 I，首先我们注意到

$$(4.7)\qquad d^{-2}\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|u| \leqslant \lambda^{-2}d_P^{-2}\,\underset{D}{\text{l.u.b.}}\,|u|.$$

由定义 (1.4)—(1.7) 和假定 (1.8) 并注意到 $d_Q \geqslant [1 - \lambda(n+1)^{1/2}]d_P > d_P/2\ (Q \in N)$，我们得到

$$(4.8)\qquad \underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|F| \leqslant \underset{N}{\text{l.u.b.}}\left\{|f| + \sum|b_i|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + |c||u| + \sum|a_{ij}(P) - a_{ij}(Q)|\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|\right\}$$
$$\leqslant Kd_P^{-2}(|f|_{2,\alpha} + |u|_{0,1}) + K\frac{(\lambda d_P)^{\alpha}}{(d_P/2)^{\alpha}}d_P^{-2}M$$
$$\leqslant Kd_P^{-2}\{|f|_{2,\alpha} + |u|_{0,1} + \lambda^{\alpha}M\}.$$

利用 (1.4)—(1.8) 以及规则 (4.6)，我们有

$$(4.9)\qquad d^{\alpha}H_{P,N}[F] \leqslant Kd^{\alpha}d_P^{-2-\alpha}|f|_{2,\alpha} + Kd^{\alpha}\{\sum|b_i(P)|H_{P,N}[D_xu] + |c(P)|H_{P,N}[u]\} + Kd^{\alpha}\{\sum H_{P,N}[a_{ij}](\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|D_x^2u|) + \sum H_{P,N}[b_i](\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|D_xu|) + H_{P,N}[c](\underset{N}{\text{l.u.b.}}\,|u|)\}$$

$$\leqslant K\lambda^\alpha d_P^{-2}|f|_{2,\alpha} + K\lambda^\alpha d_P^\alpha \sum_{i=0}^{1} d_P^{i-2} H_{P,N}[D_x^i u]$$

$$+ K\lambda^\alpha d_P^{-2}|u|_{0,2}.$$

因为 $H_{P,N}[D_x^i u] \leqslant K d_P^{-i-\alpha} M_{0,i+\alpha}$, 所以有

$$(4.10) \quad d^\alpha H_{P,N}[F] \leqslant K\lambda^\alpha d_P^{-2}\left\{|f|_{2,\alpha} + |u|_{0,2} + \sum_{i=0}^{1} M_{0,i+\alpha}\right\}.$$

把不等式 (4.7), (4.8), (4.10) 代入 (4.5) 的右边,我们得到

$$(4.11) \quad d_P^2 I \leqslant K\lambda^{-2}|u|_0 + K|f|_{2,\alpha} + K|u|_{0,1} + K\lambda^\alpha(M + M_0' + M_1').$$

据(2.3),因为对任何 $\varepsilon > 0$

$$(4.12) \quad |u|_{0,1} \leqslant \varepsilon M + \frac{C}{\varepsilon}|u|_0,$$

其中 C 不依赖于 ε. 取 $\varepsilon = \lambda^\alpha$, 从 (4.11) 和 (4.5) 我们得到

$$(4.13) \quad d_P^2|D_x^2 u(P)| \leqslant d_P^2 I \leqslant K\lambda^{-2}|u|_0 + K|f|_{2,\alpha} + K\lambda^\alpha(M + M_0' + M_1').$$

把它代入(4.3)就有

$$(4.14) \quad M \leqslant K\lambda^{-2}|u|_0 + K|f|_{2,\alpha} + K\lambda^\alpha(M + M_0' + M_1').$$

现在我们推导 M_i' 的界. 从 M_2' 开始. 因为 M_2' 为有限, 于是在 D 内存在两点 P, Q 以及导数 D_x^2, 使得

$$(4.15) \quad \frac{1}{2} M_2' \leqslant d_{PQ}^{2+\alpha} \frac{|D_x^2 u(P) - D_x^2 u(Q)|}{d(P, Q)^\alpha}.$$

可以假定 P 的 t 坐标大于或等于 Q 的 t 坐标.

有两种情形:

(a) $d(P, Q) \geqslant \lambda d_{PQ}/4(n+1)^{1/2}$. 于是,

$$(4.16) \quad M_2' \leqslant K d_P^2 \lambda^{-\alpha}|D_x^2 u(P)| + K d_Q^2 \lambda^{-\alpha}|D_x^2 u(Q)| \leqslant K\lambda^{-\alpha} M.$$

(b) $d(P, Q) < \lambda d_{PQ}/4(n+1)^{1/2}$. 于是, $d(P, Q) < \lambda d_P/4(n+1)^{1/2}$. 设 N 为以 P 为顶点,棱长为 λd_P 的半立方体. 在第 3 节定理 2′ 中令 $d = \lambda d_P/(n+1)^{1/2}$ 并将之应用于方程(4.4),我们得到

(4.17) $$d^{\alpha}\frac{|D_x^2u(P)-D_x^2u(Q)|}{d(P,Q)^{\alpha}}\leqslant KI+Kd^{\alpha}H_{Q,N}[F].$$

因为在 (4.13) 中已经估计了 I，剩下要估计 $d^{\alpha}H_{Q,N}[F]$. 类似于(4.9)和(4.10)我们得到

(4.18) $$d^{\alpha}H_{Q,N}[F]\leqslant K\lambda^{\alpha}d_P^{-2}\left\{|f|_{2,\alpha}+|u|_{0,2}+\sum_{i=0}^{1}M_{0,i+\alpha}\right\}$$
$$+Kd^{\alpha}\sum|a_{ij}(P)-a_{ij}(Q)|H_{Q,N}[D_x^2u].$$

右边最后的一项不超过

$$Kd^{\alpha}d_{PQ}^{-\alpha}d(P,Q)^{\alpha}H_{Q,N}[D_x^2u]\leqslant K\lambda^{\alpha}H_{Q,N}[D_x^2u]\leqslant K\lambda^{2\alpha}d_P^{-2}M_2'.$$

把它代入 (4.18)，我们就得到 $d^{\alpha}H_{Q,N}[F]$ 的界. 利用这个界和(4.13)，从 (4.15)、(4.17) 我们得到

(4.19) $$M_2'\leqslant K\lambda^{-\alpha}d_P^2I+K\lambda^{-\alpha}d_P^2d^{\alpha}H_{Q,N}[F]$$
$$\leqslant K\lambda^{-2-\alpha}|u|_0+K\lambda^{-\alpha}|f|_{2,\alpha}$$
$$+K(M+M_0'+M_1')+K\lambda^{\alpha}M_2'.$$

用推导 (4.16)，(4.19) 的方法也可证明，如果 $i=0,1$，那么或者（情形 (a)）

(4.20) $$M_i'\leqslant K\lambda^{-\alpha}M_{0,i},$$

或者（情形 (b)）

(4.21) $$M_i'\leqslant K\lambda^{-i-\alpha}|u|_0+K\lambda^{2-i-\alpha}|f|_{2,\alpha}$$
$$+K\lambda^{2-i}(M+M_0'+M_1')+K\lambda^{2-i+\alpha}M_2'.$$

因此，M_i' 就不超过(4.20)和(4.21)右边的和. 其次，取（仅依赖于 K 的）λ 充分小，我们得到

(4.22) $$M_0'+M_1'\leqslant K\lambda^{-1-\alpha}|u|_0+K\lambda^{1-\alpha}|f|_{2,\alpha}$$
$$+K\lambda M+K\lambda^{1+\alpha}M_2'+K\lambda^{-\alpha}M_{0,1}.$$

把它代入(4.19)，取（仅与 K 有关的）λ 充分小，即可得到

(4.23) $$M_2'\leqslant K\lambda^{-2-\alpha}|u|_0+K\lambda^{-\alpha}|f|_{2,\alpha}+KM+K\lambda^{-\alpha}M_{0,1}.$$

现在，容易完成本定理的证明. 事实上，关于情形 (a)，将(4.14)，(4.22)加起来，其中(4.22)右边的 M_2' 可以应用(4.16)得到它的估计，我们得到

(4.24) $$M+M_0'+M_1'\leqslant K\lambda^{-2}|u|_0+K|f|_{2,\alpha}$$

$$+K\lambda^{\alpha}(M+M_0'+M_1')+K\lambda^{-\alpha}M_{0,1}.$$

取 λ 使 $K\lambda^{\alpha}<1/4$，然后利用引理 2 就推断出（对于现已固定的 λ）

$$K\lambda^{-\alpha}M_{0,1}<\frac{1}{4}M+C|u|,\qquad (C=C(K)).$$

从(4.24)我们得到

$$M+M_0'+M_1'\leqslant K|u|_0+K|f|_{2,\alpha}. \tag{4.25}$$

据(4.16)，因为 M_2' 有类似的界，于是对情形 (a) 定理证明完毕.

对于情形 (b)，把(4.23)代入(4.22)，我们得到

$$M_0'+M_1'\leqslant K\lambda^{-1-\alpha}|u|_0+K\lambda^{1-\alpha}|f|_{2,\alpha}+K\lambda M+K\lambda^{-\alpha}M_{0,1}.$$

把这个不等式和(4.14)综合起来，我们得到

$$M+M_0'+M_1'\leqslant K\lambda^{-2}|u|_0+K|f|_{2,\alpha}$$
$$+K\lambda^{\alpha}(M+M_0'+M_1')+K\lambda^{-\alpha}M_{0,1}.$$

因为这个不等式与(4.24)相同，所以，如上可推出不等式(4.25). 从(4.23)我们还得到所需要的 M_2' 的界. 于是第 1 节定理 1 证毕.

5. 基本引理

在第 6，7 节推导边界估计时，要用到类似于在第 3，4 节推导内估计时所用的那些计算结果，还要用到的一个辅助引理，在本节中给以交代.

设 R 记区间 $-1<x<1$，$S_\tau(S_1=S)$ 记矩形 $-1<x<1$，$0<t<\tau$. 设

$$V_j(x,t;\xi,\tau)=\frac{(\tau-t)^{-j/2}}{2\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-t)}\right], \tag{5.1}$$
$$V_1=V.$$

显然，对某个常数 C，有

$$\left|\frac{\partial}{\partial\xi}V(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant C|x-\xi|V_3(x,t;\xi,\tau), \tag{5.2}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}V(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant C|x-\xi|^2V_5(x,t;\xi,\tau) \tag{5.3}$$
$$+CV_3(x,t;\xi,\tau).$$

以及

$$(5.4)\qquad \left|\frac{\partial^k}{\partial\tau^k}\frac{\partial^j}{\partial\xi^j}V(x,t;\xi,\tau)\right|\leqslant C'V_{j+2k+1}(x,2t;\xi,2\tau),$$

其中 C' 仅依赖于 k,j.

设 f 为 S 的闭包 $\bar{S}$ 上的 Hölder 连续函数(指数为 α),即

$$(5.5)\qquad \frac{|f(x,t)-f(x',t')|}{[(x-x')^2+|t-t'|]^{\alpha/2}}\leqslant H[f]<\infty$$
$$((x,t)\in\bar{S},\ (x',t')\in\bar{S}),$$

其中 $H[f]$ 是 f 的 Hölder 系数.

在这一节,A 记种种仅依赖于 α 的正的常数.

本节主要是证实以下的引理.

引理 6　如果 $f(\pm1,0)=0$, 则函数

$$(5.6)\qquad v(\xi,\tau)=\int_0^\tau\int_R V(x,t;\xi,\tau)f(x,t)dxdt$$

对于所有的 $(\xi,\tau)\in S$, $(\xi',\tau')\in S$ 满足 Hölder 条件

$$(5.7)\qquad \frac{|v_\tau(\xi,\tau)-v_{\tau'}(\xi',\tau')|}{[(\xi-\xi')^2+|\tau-\tau'|]^{\alpha/2}}\leqslant AH[f],$$

其中 $v_\tau=\partial v/\partial\tau$.

证明　首先考虑特殊情形 $\tau=\tau'$. 我们可以假定 $\xi'<\xi$. 只要就

$$(5.8)\qquad 0\leqslant\xi'<\xi<1$$

证明(5.7)就够了. 事实上,对于 $-1<\xi'<\xi\leqslant0$ 的情形,在(5.6)中作变换 $\xi\to-\xi$, $x\to-x$, 并更换 ξ' 和 ξ 的作用, 就可化为前面的情形. 写成

$$v_\tau(\xi,\tau)-v_\tau(\xi',\tau)=[v_\tau(\xi,\tau)-v_\tau(0,\tau)]$$
$$+[v_\tau(0,\tau)-v_\tau(\xi',0)]$$

并利用前两种情形就推出 $-1<\xi'<0<\xi<1$ 的情形.

从第一章定理 5 的论断 (1.3.27), 当限定于 $a_{ij}=\delta_{ij}$, $n=1$ 的范围时我们立即得到

$$(5.9)\qquad v_\tau(\xi,\tau)=-f(\xi,\tau)-w_1(\xi,\tau)+w_2(\xi,\tau),$$

其中

$$(5.10)\qquad w_1(\xi,\tau)=\sum\pm\int_0^\tau\left[\frac{\partial}{\partial\xi}V(\pm1,t;\xi,\tau)\right]f(\xi,t)dt,$$

$$(5.11)\qquad w_2(\xi,\tau)=\iint_{S_\tau}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}V(x,t;\xi,\tau)\right]\times[f(x,t)-f(\xi,t)]dx\,dt.$$

首先考虑 w_2. 令 $\gamma=(\xi-\xi')^2$, $B_\gamma=S_\tau-S_{\tau-\gamma}$ (若 $\tau-\gamma<0$, 则 $B_\gamma=S_\tau$), 我们可以写成

$$(5.12)\qquad w_2(\xi,\tau)-w_2(\xi',\tau)=J_1-J_2+J_3-J_4,$$

其中

$$J_1=J_1(\xi,\tau)=\iint_{B_\gamma}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}V(x,t;\xi,\tau)\right][f(x,t)-f(\xi,t)]dx\,dt,$$

$$J_2=J_1(\xi',\tau),$$

$$J_3=\iint_{S_{\tau-\gamma}}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}V(x,t;\xi,\tau)-\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}V(x,t;\xi',\tau)\right]\times[f(x,t)-f(\xi,t)]dx\,dt,$$

$$J_4=\iint_{S_{\tau-\gamma}}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}V(x,t;\xi',\tau)\right][f(\xi,t)-f(\xi',t)]dx\,dt.$$

利用(5.4)并作代换 $|x-\xi|=(\tau-t)^{1/2}\rho$, 我们得到

$$|J_1|\leqslant AH[f]\int_{\tau-\gamma}^{\tau}\int_R V_3(x,2t;\xi,2\tau)|x-\xi|^\alpha dx\,dt$$
$$\leqslant AH[f]\int_{\tau-\gamma}^{\tau}\frac{dt}{(\tau-t)^{1-\alpha/2}}\leqslant AH[f]\gamma^{\alpha/2}.$$

由 γ 的定义有

$$(5.13)\qquad |J_1|\leqslant AH[f](\xi-\xi')^\alpha.$$

同样地,

$$(5.14)\qquad |J_2|\leqslant AH[f](\xi-\xi')^\alpha.$$

为了估计 J_3, 利用(5.4)和关系 ($g=\partial^2V/\partial\xi^2$)

$$(5.15)\qquad g(\xi)-g(\xi')=\int_{\xi'}^{\xi}g'(\zeta)d\zeta,$$

我们得到

$$|J_3| \leqslant AH[f]\int_{\xi'}^{\xi} d\zeta \int_0^{\tau-\gamma} V_4(x, 2t; \zeta, 2\tau)|x-\xi|^{\alpha} dx\, dt.$$

利用不等式 $|x-\xi|^{\alpha} \leqslant |x-\zeta|^{\alpha} + |\zeta-\xi|^{\alpha}$ 并作代换 $|x-\zeta| = (\tau-t)^{1/2}\rho$，我们得到

$$|J_3| \leqslant AH[f]\int_{\xi'}^{\xi} d\zeta \int_0^{\tau-\gamma} \frac{dt}{(\tau-t)^{(3-\alpha)/2}}$$

$$+ AH[f]\int_{\xi'}^{\xi} (\xi-\zeta)^{\alpha} d\zeta \int_0^{\tau-\gamma} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{3/2}}$$

$$\leqslant AH[f]\int_{\xi'}^{\xi} \frac{d\zeta}{\gamma^{(1-\alpha)/2}} + AH[f]\int_{\xi'}^{\xi} \frac{(\xi-\zeta)^{\alpha}}{\gamma^{1/2}} d\zeta.$$

因此，

(5.16) $$|J_3| \leqslant AH[f](\xi-\xi')^{\alpha}.$$

立刻看出，并不需要估计 J_4.

回到 w_1，我们可以写成

(5.17) $$w_1(\xi, \tau) - w_1(\xi', \tau) = K_1 + K_2 + K_3,$$

其中

$$K_1 = \sum \pm \int_0^{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} V(\pm 1, t; \xi, \tau) - \frac{\partial}{\partial \xi'} V(\pm 1, t; \xi', \tau)\right] \times f(\xi, t) dt,$$

$$K_2 = \sum \pm \int_{\tau-\gamma}^{\tau} \left[\frac{\partial}{\partial \xi'} V(\pm 1, t; \xi', \tau)\right][f(\xi, t) - f(\xi', t)] dt,$$

$$K_3 = \sum \pm \int_0^{\tau-\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \xi'} V(\pm 1, t; \xi', \tau)\right][f(\xi, t) - f(\xi', t)] dt.$$

注意到在 J_4 中可用 $-\partial/\partial x_i$ 代替 $\partial/\partial \xi'$，然后对 x 积分，我们得到关系式

(5.18) $$K_3 + J_4 = 0.$$

剩下估计 K_1, K_2. 据 (5.2)，

$$|K_2| \leqslant AH[f]\sum \int_{\tau-\gamma}^{\tau} |\pm 1 - \xi'| V_3(\pm 1, t; \xi', \tau)(\xi-\xi')^{\alpha} dt,$$

作代换 $z=(\pm 1-\xi')^2/(\tau-t)$，我们得到

$$|K_2| \leqslant AH[f](\xi-\xi')^\alpha \int_0^\infty z^{-1/2} \exp\left[-\frac{z}{4}\right] dz.$$

因此

(5.19) $$|K_2| \leqslant AH[f](\xi-\xi')^\alpha.$$

为了估计 K_1，把它写成

(5.20) $$K_1 = L_1 + L_2$$

其中

$$L_1 = \sum \pm \int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial \xi} V(\pm 1, t; \xi, \tau) - \frac{\partial}{\partial \xi'} V(\pm 1, t; \xi', \tau)\right] \times [f(\xi, t) - f(\pm 1, t)] dt,$$

$$L_2 = \sum \pm \int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial \xi} V(\pm 1, t; \xi, \tau) - \frac{\partial}{\partial \xi'} V(\pm 1, t; \xi', \tau)\right] \times f(\pm 1, t) dt.$$

在(5.15)中令 $g = \partial V/\partial \xi$,再利用(5.4),我们得到

$$|L_1| \leqslant AH[f] \sum \int_{\xi'}^{\xi} d\zeta \int_0^\tau V_3(\pm 1, 2t; \zeta, 2\tau) |\pm 1 - \xi|^\alpha dt.$$

利用不等式 $|\pm 1-\xi|^\alpha \leqslant |\pm 1-\zeta|^\alpha + (\xi-\zeta)^\alpha$ 并作代换 $z=(\pm 1-\zeta)^2/(\tau-t)$，可得不等式

$$|L_1| \leqslant AH[f] \sum \int_{\xi'}^{\xi} \left[\frac{1}{|\pm 1-\zeta|^{1-\alpha}} + \frac{(\xi-\zeta)^\alpha}{|\pm 1-\zeta|}\right] d\zeta.$$

注意到 $\xi-\zeta \leqslant |\pm 1-\zeta|$ (这里我们使用(5.8)),我们得到

(5.21) $$|L_1| \leqslant AH[f](\xi-\xi')^\alpha.$$

为了估计 L_2，我们引进函数

$$g_\pm(t) = \begin{cases} f(\pm 1, t) & (0 \leqslant t < 1) \\ 0 & (-\infty < t < 0). \end{cases}$$

于是

(5.22) $$L_2 = \sum \pm \int_{-\infty}^\tau \left[\frac{\partial}{\partial \xi} V(\pm 1, t; \xi, \tau) - \frac{\partial}{\partial \xi'} V(\pm 1, t; \xi', \tau)\right] [g_\pm(t) - g_\pm(\tau)] dt$$

$$+ \sum \pm g_{\pm}(\tau)\int_{-\infty}^{\tau}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} V(\pm 1, t; \xi, \tau) - \frac{\partial}{\partial \xi'} V(\pm 1, t; \xi', \tau)\right] dt = L_{21} + L_{22}.$$

容易验证

$$L_{22} = 0. \tag{5.23}$$

事实上，L_{22} 的那个积分等于

$$\int_{\xi'}^{\xi} d\zeta \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} V(\pm 1, t; \zeta, \tau) dt$$
$$= -\int_{\xi'}^{\xi} d\zeta \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial t} V(\pm 1, t; \zeta, \tau) dt$$
$$= -\int_{\xi'}^{\xi} \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ B \to -\infty}} [V(\pm 1, t; \zeta, \tau)]_B^{\tau-\epsilon} dt = 0.$$

为了估计 L_{21}，我们利用 $f(\pm 1, 0) = 0$ 的假定，由此推知 $g_{\pm}(t)$ 不仅是连续函数，而且对于 $-\infty < t \leqslant 1$ 还是 Hölder 连续的（指数为 α）. 由此和 (5.4)，就得到

$$|L_{21}| \leqslant AH[f]\sum\int_{\xi'}^{\xi} d\zeta \int_{-\infty}^{\tau} V_3(\pm 1, 2t; \zeta, 2\tau)(\tau - t)^{\alpha/2} dt.$$

作代换 $z = (\pm 1 - \zeta)^2/(\tau - t)$ 就有

$$|L_{21}| \leqslant AH[f]\sum\int_{\xi'}^{\xi} |\pm 1 - \zeta|^{-1+\alpha} d\zeta \leqslant AH[f](\xi - \xi')^{\alpha}.$$

把它和 (5.23), (5.22) 综合起来，我们得到

$$|L_2| \leqslant AH[f](\xi - \xi')^{\alpha}. \tag{5.24}$$

从 (5.24), (5.21), (5.20) 和 (5.19) 推出

$$|K_1 + K_2| \leqslant AH[f](\xi - \xi')^{\alpha}.$$

把这个不等式和(5.18),(5.17),(5.16),(5.14),(5.13),(5.12)以及(5.9) 统统综合起来，就完成了在 $\tau' = \tau$ 情况下 (5.7) 的证明.

如果 $\xi = \xi'$, $\tau = \tau'$，我们利用可从(1.3.27)推出的 v_τ 的表达式：

$$v_\tau(\xi, \tau) = -2f(\xi, \tau) + \int_R V(x, 0; \xi, \tau) f(x, \tau) dx \tag{5.25}$$

$$+\iint_{S_\tau}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}V(x,t;\xi,\tau)\right]$$
$$\times[f(x,t)-f(x,\tau)]dx\,dt.$$

然后以如下方法着手估计 $v_\tau(\xi,\tau)-v_\tau(\xi,\tau')$. 令

$$w_3(\xi,\tau)=\iint_{S_\tau}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}V(x,t;\xi,\tau)\right]$$
$$\times[f(x,t)-f(x,\tau)]dx\,dt,$$
$$w_3(\xi,\tau')=\iint_{S'_\tau}=\iint_{S_\tau}+\iint_{S'_\tau-S_\tau}$$
$$=w_{31}(\xi,\tau')+w_{32}(\xi,\tau').$$

把 $w_3(\xi,\tau)-w_{31}(\xi,\tau')$ 分成类似于 (5.12) 的四项. 同样地, 把

$$\int_R V(x,0;\xi,\tau)f(x,\tau)dx-\int_R V(x,0;\xi,\tau')f(x,\tau')dx$$

分成两个差 (类似于 $\gamma=0$ 的 (5.17)), 并和前面的证明类似地进行下去. w_{32} 可直接由

$$AH[f](\tau'-\tau)^{\alpha/2}$$

估计. 其细节留给读者.

在 $\tau=\tau'$ 和 $\xi=\xi'$ 这两种特殊情况证明了 (5.7) 之后, 我们可立即推出一般情况的证明.

现在我们把引理 6 推广到 n 维的情况. 设 R 是矩形:

$$-\beta_i<x_i<\beta_i\qquad(i=1,\cdots,n).$$

令 $S_\tau=R\times(0,\tau)$, $S=S_1$. 以 ∂R_n 记集合

$$\{(x,t);\ x_n=\pm\beta_n,\ t=0,\ -\beta_i<x_i<\beta_i\ (i=1,\cdots,n-1)\}.$$

假定 $f(x,t)$ 在 $\bar{S}$ 上 Hölder 连续 (指数为 α), 并令

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{(\tau-t)^{n/2}}{(2\sqrt{\pi})^n}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4(\tau-t)}\right]\quad(t<\tau).\tag{5.26}$$

引理 6′ 假定在 ∂R_n 上 $f(x,t)=0$, 考虑函数

$$v(\xi,\tau)=\int_0^\tau\int_R G(x,t;\xi,\tau)f(x,t)dx\,dt.\tag{5.27}$$

设 N 为 S 的任意子域, 它的每个极限点或者在 S 内, 或者在 S 的某

一个 (n 维) 开面上，或者在 ∂R_n 上，或者在 $\partial R_n \times \{t=1\}$ 上。那么存在仅依赖于 n, α, N 和 β_i 的常数 A'，使得对于所有的 $(\xi, \tau) \in N$，$(\xi', \tau') \in N$，有

$$(5.28) \qquad \frac{|v_\tau(\xi, \tau) - v_{\tau'}(\xi', \tau')|}{(|\xi-\xi'|^2 + |\tau-\tau'|)^{\alpha/2}} \leqslant A'H[f].$$

证明　　考虑 $\tau' = \tau$ 的情形就够了. 一个类似于 (5.9) 的式子成立. 现在 w_2 是下面的积分

$$w_2 = \int_{S_\tau}\int [\Delta_\xi G(x, t; \xi, \tau)][f(x, t) - f(\xi, t)]dx\,dt,$$

其中 Δ_ξ 是 Laplace 算子. 象前面那样可以把 $w_2(\xi, \tau) - w_2(\xi', \tau)$ 分成四项来处理. w_1 由 $2n$ 个边界积分组成，它们都是在 S 侧边界的 $2n$ 个面上取的. 象 (5.17) 那样，我们可以把 $w_1(\xi, \tau) - w_1(\xi', \tau)$ 分成三项，于是关系式(5.18)有效. K_2 也可以象上面那样处理. 我们继续估计 K_1. 首先注意到，对于 K_1 中任何一个在 $x_i = \pm\beta (i<n)$ 面上所取的边界积分，N的点到这个面上的点的距离总是有界的，于是立即可得到这些积分所期望的估计. 注意，所得到的估界含有 l. u. b. $|f|$，但是因为在 ∂R_n 上 $f=0$，所以 l. u. b. $|f| \leqslant (\sum\beta_i^2+1)^{\alpha/2}H[f]$. 剩下考虑 K_1 中的在 $x_n = \pm\beta_n$ 面上的那些边界积分. 以 K_{11} 记 K_1 中包含这些积分的那两项的和.

类似于 (5.20) 拆开 K_{11}，就可以象以前那样处理 L_1. 类似于 (5.22) 那样拆开 L_2，并利用在 ∂R_n 上 $f=0$，就可以象以前那样估计 L_{21}.

为了考虑 L_{22}，首先假定 $f=1$. 可以假定仅对一个 i，有 $\xi_i' \neq \xi_i$，且 $\xi_i' < \xi_i$. 如果 $i=n$，则 L_{22} 是和 $\sum \pm I_\pm$，其中

$$I_\pm = \int\!\!\int\left[\int_{\xi_n'}^{\xi_n} d\zeta_n \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2}{\partial\zeta_n^2} G(x_1, \cdots, x_{n-1}, \pm\beta_n, t; \right.$$

$$\left. \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, \zeta_n, \tau)dt\right] dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

$$= \int\!\!\int\left[\int_{\xi_n'}^{\xi_n} d\zeta_n \int_{-\infty}^{\tau} \left(-\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2 G}{\partial x_{n-1}^2}\right)dt\right]$$

$\times dx_1\cdots dx_{n-1}.$

相应于 $\partial G/dt$ 的那个积分为零(如同 $n=1$ 的情形),而相应于 $\partial^2 G/\partial x_j^2$ $(1\leqslant j\leqslant n-1)$ 的每一个积分,我们可以把它又写成在 $x_j=\pm\beta_j$ 上的边界积分之差,因此立刻可推出所需要的界.

如果恰好对于 $i(i<n)$ 有 $\xi_i'\neq\xi_i$,则 $L_{22}=\sum\pm I_\pm$,其中

$$I_\pm=\iint\left[\int_{\xi_i'}^{\xi_i}d\zeta_i\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial^2 G}{\partial\xi_n\partial\zeta_i}\,dt\right]dx_1\cdots dx_{n-1}.$$

(利用$\partial G/\partial\zeta_i=-\partial G/\partial x_i$)对 x_i 积分,我们就把这个积分变换为在 $x_i=\pm\beta_i$ 面上的边界积分之差,从而推出所需要的界.

如果 $f\not\equiv 1$,则可把 L_{22} 中的 f 写成如下形式:

$$(5.29)\qquad [f(\bar{x},\pm\beta_n,\tau)-f(\bar{\xi},\pm\beta_n,\tau)]+f(\bar{\xi},\pm\beta_n,\tau),$$

其中 $\bar{x}=(x_1,\cdots,x_{n-1})$,$\bar{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1})$. L_{22} 的含有 $f(\bar{\xi},\pm\beta_n,\tau)$ 的那些项可由前面特殊情形来估计. 于是剩下估计相应于(5.29)括号中表达式的那些积分. 我们把对 t 的积分拆成

$$\int_{-\infty}^{\tau-\gamma}+\int_{\tau-\gamma}^{\tau},$$

其中 $\gamma=|\xi'-\xi|^2$. 利用中值定理我们发现,相应于$\int_{-\infty}^{\tau-\gamma}$ 的那个对 $(\bar{x},t)$ 的积分不超过

$$A_1H[f]|\xi'-\xi|\int_{-\infty}^{\tau-\gamma}\int(\tau-t)^{-(n+2)/2}$$

$$\times\exp\left[-\frac{|\bar{x}-\bar{\zeta}|^2}{5(\tau-t)}\right]|\bar{x}-\bar{\xi}|^{\alpha}d\bar{x}\,dt,$$

这里 A_i 用来表示仅与 n,α,β_j 有关的常数,$\bar{\zeta}$ 是区间 $(\bar{\xi},\bar{\xi}')$ 中某个点,而 $d\bar{x}=dx_1\cdots dx_n$. 利用不等式 $|\bar{x}-\bar{\xi}|\leqslant|\bar{x}-\bar{\zeta}|+|\xi'-\xi|$ 就不难发现最后那个式子不超过 $A_2H[f]|\xi'-\xi|^{\alpha}$.

至于相应于$\int_{\tau-\gamma}^{\tau}$ 的那个对 $(\bar{x},t)$ 的积分,分别估计

$$\int_{\tau-\gamma}^{\tau}\int\frac{\partial}{\partial\xi_n}G(\bar{x},\pm\beta_n,t;\xi,\tau)$$

$$\times[f(\bar{x},\pm\beta_n,\tau)-f(\bar{\xi},\pm\beta_n,\tau)]d\bar{x}\,dt$$

和

$$(5.30)\quad \int_{\tau-\gamma}^{\tau}\int \frac{\partial}{\partial \xi_n'} G(\bar{x}, \pm\beta_n, t; \xi', \tau)$$
$$\times[f(\bar{x}, \pm\beta_n, \tau) - f(\bar{\xi}, \pm\beta_n, \tau)]d\bar{x}\,dt$$

就够了．不难看出，第一个积分不超过

$$(5.31)\quad A_3H[f]\int_{\tau-\gamma}^{\tau}\frac{dt}{(\tau-t)^{(2-\alpha)/2}} = A_4H[f]|\xi'-\xi|^{\alpha}.$$

如果在第二个积分的括号中以 $\bar{\xi}'$ 代 $\bar{\xi}$，我们就得到 (5.31) 那样的界．因此剩下还要估计在 (5.30) 中以 $f(\bar{\xi}', \pm\beta_n, \tau) - f(\bar{\xi}, \pm\beta_n, \tau)$ 代替括号内的式子的积分．我们得到这个积分的界为：

$$A_5H[f]\left\{\int_{\tau-\gamma}^{\tau}\int|\pm\beta_n - \xi_n'|(\tau-t)^{-(n+2)/2}\right.$$
$$\left.\times\exp\left[-\frac{|\bar{x}-\bar{\xi}'| + (\pm\beta_n - \xi_n')^2}{4(\tau-t)}\right]d\bar{x}\,dt\right\}|\xi'-\xi|^{\alpha}$$
$$\leqslant A_6H[f]\left\{\int_{\tau-\gamma}^{\tau}|\pm\beta_n - \xi_n'|(\tau-t)^{-3/2}\right.$$
$$\left.\times\exp\left[-\frac{(\pm\beta_n-\xi_n')^2}{4(\tau-t)}\right]dt\right\}|\xi'-\xi|^{\alpha}.$$

作代换 $z = (\pm\beta_n - \xi_n')^2/(\tau - t)$，我们得到界 $A_7H[f]|\xi'-\xi|^{\alpha}$．从而，$|L_{22}|$ 不超过 $A_8H[f]|\xi'-\xi|^{\alpha}$，证毕．

我们叙述引理 6′ 的下列推论供以后查阅．

引理 6″ 以 ∂R 记 S 的下底的所有 $(n-1)$ 维开面的并集，假定 f 在 $\bar{S}$ 上 Hölder 连续(指数为 α)，在 ∂R 上 $f=0$．设 N 为 S 的任何子域，使得它的每个极限点或者在 S 内，或者在 S 的某一个 n 维开面上，或者在 ∂R 上，或者在 $\partial R\times\{t=1\}$ 上．那么(5.27)所定义的函数 $v(\xi, \tau)$ 对所有的 $(\xi, \tau)\in N$，$(\xi', \tau')\in N$ 满足 (5.28)，其中 A' 为只与 n, α, N 以及 $\min\beta_i$, $\max\beta_i$ 有关的常数．

通过把 N 分成能使引理 6′ 得以应用的若干个集合(适当的 x_i 充当 x_n 的角色)，就得到本引理的证明．A' 通过依赖于 $\min\beta_i$ 和 $\max\beta_i$ 而依赖于 β_i 这一事实可从引理 6′ 的证明推出．

6. 边界估计的辅助定理

设 $\xi^0=(\xi_1^0,\cdots,\xi_n^0)$ 是一固定的点，B 记 n 维矩形：

$$-d\leqslant x_i-\xi_i^0\leqslant d\quad(i=1,\cdots,n-1),$$

$$-d\leqslant x_n-\xi_n^0\leqslant\bar d,$$

N_τ 记集合 $B\times\{0\leqslant t\leqslant\tau\}$. 我们总是取

$$\bar d\leqslant d,\quad \tau\leqslant\tau^0\leqslant d^2$$

并且令 $N=N_{\tau^0}$. 和定理 2 具有同一性质的下列定理在下一节推导边界估计时将起决定性的作用.

定理 3 设 $f(x,t)$ 在N内 Hölder 连续（指数为 α），而 u, D_xu, D_x^2u 及 D_tu 为N内的 Hölder 连续函数（指数 α），假定 (3.1) 在N内成立，u 在N的两个面 $x_n=\bar d$ 和 $t=0$ 上为零，那么存在仅依赖于 n 和 α 的常数 K，使得

$$(6.1)\qquad |D_x^iu(P)|\leqslant d^{-2}K\operatorname*{l.u.b.}_N|u|+d^{2-i}K\operatorname*{l.u.b.}_N|f|+d^{2-i+\alpha}KH_{P,N}[f]\equiv KI,$$

$$(6.2)\qquad d^\alpha\frac{|D_x^iu(P)-D_x^iu(Q)|}{d(P,Q)^\alpha}\leqslant KI+Kd^{2-i+\alpha}H[f],$$

$$\left(i=0,1,2\quad d(P,Q)<\frac{d}{4},\quad Q\in N\right),$$

其中 $P=(\xi^0,\tau^0)$，而 $H[f]$ 为 f 在N中的 Hölder 系数（指数为 α）.

注意，(6.2)的右边和(3.3)的右边并不一样，因为现在是 $H[f]$ 替代了 $H_{Q,N}[f]$.

证明　我们仍沿用第 3 节的记号. 对函数 $u(x,t)$ 和 $\varphi(x,t)\bar G(x,t;\xi,\tau)$ 利用 Green 恒等式 (1.8.4)，其中

$$(6.3)\qquad \bar G(x,t;\xi,\tau)=G(x,t;\xi,\tau)-G(x,t;\xi',\tau),$$

这里G由 (5.26) 定义，而 $\xi'=(\xi_1',\cdots,\xi_n')$ 由

$$\xi_i'=\xi_i\quad(1\leqslant i\leqslant n-1),\quad \xi_n'=2\bar d-\xi_n$$

定义，注意到在 $x_n=\bar d$ 上 $\bar G(x,t;\xi,\tau)$ 为零，在 $x_n=\bar d$ 和 $t=0$ 上 u 为零我们立即得到

$$(6.4)\qquad u(\xi,\tau)=-\int_0^\tau\int_B\varphi(x,t)f(x,t)\bar G(x,t;\xi,\tau)dx\,dt$$

$$+\int_0^\tau\int_B u(x,t)L_0^*[\varphi(x,t)\overline{G}(x,t;\xi,\tau)]dx\,dt$$

$$= -H_0 + J_0.$$

H_0, J_0 类似于第 3 节的 H_0, J_0.

注意，$\overline{G}$ 及其导数与 G 及其导数满足同样的不等式 (3.11). 注意到当 $x\in B$ 时 $|x-\xi'|\geqslant|x-\xi|$，即可推出这一事实. 我们把这些不等式写下来供以后查阅.

(6.5)
$$|D_t^iD_x^jD_\tau^kD_\xi^m\overline{G}(x,t;\xi,\tau)|$$
$$\leqslant C(\tau-t)^{-(2i+j+2k+m+n)/2}\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{5(\tau-t)}\right],$$

其中 C 仅依赖于 i, j, k, m, n.

我们以后需要如下事实:

(6.6)
$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\int_0^\tau\int_B\overline{G}(x,t;\xi,\tau)dx\,dt \quad 有界, \quad (i\neq n).$$

注意到 $\partial\overline{G}/\partial\xi_j=-\partial\overline{G}/\partial x_i$，并对 x_i 积分(利用散度定理)，然后利用(6.5)并作代换 $z=d^2/(\tau-t)^{1/2}$ 即可得到证明.

借助于 (6.5) 和 (6.6) 可对所有不同于 $\partial^2u/\partial x_n^2$ 的那些导数 D_x^iu 来证明(6.1). 这证明几乎和(3.2)的证明逐字一样，因此省略其细节. 至于 $\partial^2u/\partial x_n^2$，我们首先估计 $\partial u/\partial t$，然后利用微分方程 (3.1) 得到 $\partial^2u/\partial x_n^2$ 的界. 为了估计 $\frac{\partial u}{\partial t}$，我们对 τ 微分 (6.4)，于是得到

(6.7)
$$\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau}=-\int_0^\tau\int_B[D_\tau\overline{G}(x,t;\xi,\tau)]$$
$$\times[\varphi(x,t)f(x,t)-\varphi(\xi,\tau)f(\xi,\tau)]dx\,dt$$
$$-\left[\varphi(\xi,\tau)\ f(\xi,\tau)\lim_{\epsilon\to0}\int_0^{\tau-\epsilon}\int_B D_\tau\overline{G}(x,t;\xi,\tau)dx\,dt\right.$$
$$\left.+\int_0^\tau\int_B\varphi(x,t)f(x,t)(\Delta_x+D_t)D_\tau\overline{G}(x,t;\xi,\tau)\right]dx\,dt.$$

注意到 $D_\tau\overline{G}$ 及其导数的界 (据 (6.5)) 和 D_ξ^2G 及其导数的界 (据

(3.11)) 相同，再通过第 3 节那些计算就可估计第一和第三个积分．最后，(6.7)右边第二个积分是有界的，因为写成 $D_\tau \overline{G} = -D_t \overline{G}$ 并积分，我们得到

$$\int_B \overline{G}(x, 0; \xi, \tau)dx - \lim_{\epsilon \to 0} \int_B \overline{G}(x, \tau - \epsilon; \xi, \tau)dx$$

$$= \int_B \overline{G}(x, 0; \xi, \tau)dx - 1.$$

于是得到所需要的 $\partial u/\partial \tau$ 的界．

至于 (6.2)，当 $i = 0, 1$ 时，可用和证明相应的不等式(3.3)同样的方法证明它．对于 $i = 2$，当 $D_x^2 \neq \partial^2/\partial x_n^2$ 时，(6.2) 的证明仍然和第 3 节中类似不等式的证明十分相似．因此剩下对 $D_x^2 = \partial^2/\partial x_n^2$ 证明 (6.2)．因为 u 满足 (3.1)，所以只要证明

$$d^\alpha \frac{|D_t u(P) - D_t u(Q)|}{d(P, Q)^\alpha} \leqslant KI + Kd^\alpha H[f] \quad \left(d(P, Q) \leqslant \frac{d}{4}\right) \tag{6.8}$$

就够了．

为了证明(6.8)，我们写成

$$D_\tau u(\xi, \tau) = -H + J,$$

其中 $-H$ 记(6.7)右边前两项的和，而 J 记 (6.7) 右边最后的那个积分．对 J 所需考虑的问题同第 3 节一样，我们得到

$$d^\alpha \frac{|J(P) - J(Q)|}{d(P, Q)^\alpha} \leqslant Kd^{-2} \operatorname*{l.u.b.}_N |u|. \tag{6.9}$$

以 $g(Q)$ 记 $\varphi(Q) f(Q)$，注意到

$$H[g] \leqslant (\operatorname*{l.u.b.}_N |\varphi|)H[f] + Kd^{-\alpha} \operatorname*{l.u.b.}_N |f|$$

就可得知，如果

$$d^\alpha \frac{|H(P) - H(Q)|}{d(P, Q)^\alpha} \leqslant Kd^\alpha H[g] \tag{6.10}$$

则(6.2)的证明完毕．

为了证明(6.10)，把 H 写成如下形式

$$
(6.11) \qquad H = \frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau\int_B g(x, t)G(x, t; \xi, \tau)dx\,dt
$$
$$
- \frac{\partial}{\partial \tau'}\int_0^{\tau'}\int_B g(x, t)G(x, t; \xi', \tau')dx\,dt.
$$

(x, t) 到 $(\bar{x}, \bar{t})$ 的变换：$x = d\bar{x}$，$t = d^2\bar{t}$，把 B 映射成 $\bar{B}$，N 映射成 $\bar{N}$，$g(x, t)$ 映射成 $\bar{g}(\bar{x}, \bar{t})$（即是 $\bar{g}(\bar{x}, \bar{t}) = g(x, t)$），$H(Q)$ 映射成 $\bar{H}(\bar{Q})$，而把 $G(x, t; \xi, \tau)$ 映射成 $G(\bar{x}, \bar{t}; \bar{\xi}, \bar{\tau})/d^n$。为要应用第 5 节引理 6″，因此我们必须证明 $\bar{g}$ 在 $\bar{N}$ 下底的边界上为零．因为在 N 的所有侧面上可能除 $x_n = \bar{d}$ 外，φ 为零，所以只需证明 f 在面 $x_n = \bar{d}$ 和面 $t = 0$ 的交上为零就够了．这一点可从方程 $L_0u = f$ 推出，因为当在 $x_n = \bar{d}$ 和 $t = 0$ 上有 $u = 0$ 时，在这两个面的交集上有 $L_0u = 0$.

现在我们应用引理 6″．（注意到如以 $G(x, t; \xi', \tau)$ 代替 $G(x, t; \xi, \tau)$ 引理 6″ 仍为真）我们得到

$$
(6.12) \qquad \frac{|\bar{H}(\bar{P}) - \bar{H}(\bar{Q})|}{d(\bar{P}, \bar{Q})^\alpha} \leqslant KH[\bar{g}]
$$

在满足引理 6″ 中关于 N 的限制的任何子域 E 的闭包上成立．注意到在某个 $\bar{N} - E$ 的邻域内 $\bar{g} = 0$，且这个邻域的大小与 d 无关（用 φ 的性质 (3.4)），就可从 H 的形式推出 (6.12) 在整个 $\bar{N}$ 上成立．因为 $\bar{B}$ 的棱长在 1 和 2 之间，所以从引理 6″ 还可推出，在 (6.12) 中的常数 K 只与 n 和 α 有关．

回到原来的坐标系，从(6.12)就得到不等式(6.10)．

我们把定理 3 推广到方程(3.47)以结束本节．

定理 3′　对抛物型方程(3.47)定理 3 仍为真．(6.1)，(6.2) 中的常数 K 仅依赖于 n, α, k_1 和 k_2，其中 $k_1 > |a_{ij}|$，而 k_2 为使 (3.48) 成立的常数．

证明　首先注意，如果以如下形式的 n 维矩形 B_0：

$$
-d\alpha_i \leqslant x_i - \xi_i^0 \leqslant d\alpha_i \quad (i = 1, \cdots, n-1),
$$
$$
-d\alpha_n \leqslant x_n - \xi_n \leqslant \bar{d}\alpha_n,
$$

（α_i 为任意的数）代替 n 维矩形 B，则定理 3 仍为真．再注意到，

如果把 B_0 旋转而得到新的矩形 B^*，则对于 B^* 定理 3 仍为真.由（x 空间中的）正交变换使方程（3.1）和欧几里得距离都不变即可推出这一结论.

现在不难完成定理 3′ 的证明．适当的线性变换

$$(6.13)\qquad x_i' = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j \qquad (g_{ij}\text{ 为常数})$$

把方程（3.47）变成（对于变量 $x_1', \cdots, x_n', t$ 的）方程（3.1）．B 变成 B'．B' 为上面所考虑的 B^* 型 n 维矩形．从前面的附注推知，我们可以把定理 3 应用于变换后的区域 B'．如果使用明显的不等式

$$\text{const.}|x-y| \leqslant |x'-y'| \leqslant \text{const.}|x-y|$$

（y' 是在（6.13）之下 y 的象，而常数是正的），再回到原来的坐标系定理 3′ 的证明就顺利完成.

7. 边界估计的推导

在这一节，我们要证明比第三章定理 6 更一般的定理．首先引进某些记号.

设 R 是在流形 $\bar{B}+S$ 上确定的区域．对于 D 内任意一点 $P=(\xi,\tau)$，我们定义 $\bar{d}_P$ 为 P 到 $(\bar{B}+S_\tau)-R$ 的距离．对 D 内任何两点 P, Q，令 $\bar{d}_{PQ}=\min(\bar{d}_P,\bar{d}_Q)$．类似于（1.4）—（1.7），我们令

$$(7.1)\qquad |g|_{p,m}^{R,D} = \sum_{j=0}^{m} M_{p,j}^{R,D}[g],$$

$$(7.2)\qquad |g|_{p,m+\alpha}^{R,D} = |g|_{p,m}^{R,D} + \sum_{j=0}^{m} M_{p,j+\alpha}^{R,D}[g],$$

其中

$$(7.3)\qquad M_{p,j}^{R,D}[g] = \underset{P\in D}{\text{l. u. b.}}\ \bar{d}_P^{p+j}|D_x^j g(P)|,$$

$$(7.4)\qquad M_{p,j+\alpha}^{R,D}[g] = \underset{P,Q\in D}{\text{l. u. b.}}\ \bar{d}_{PQ}^{p+j+\alpha}\frac{|D_x^j g(P)-D_x^j g(Q)|}{d(P,Q)^\alpha},$$

在不致混乱时，我们把 $|g|_{p,m}^{R,D}$，$|g|_{p,m+\alpha}^{R,D}$ 等缩写成 $|g|_{p,m}^{R}$，$|g|_{p,m+\alpha}^{R}$．对于现在这些范数，第 2 节的引理 1，2，3 仍为真.

设 ψ 是定义在 R 上的函数，假定存在一个定义在 $D+B_T+R$

上的函数 Ψ，使得在 R 上有 $\Psi = \phi$，且

$$|\Psi|^* = |\Psi|_{0,2+\alpha}^R + \left|\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right|_{2,\alpha}^R < \infty.$$

于是我们定义

(7.5) $$|\phi|_{2+\alpha}^R = \text{g. l. b. } |\Psi|^*,$$

其中下确界是对 ϕ 的所有这样的扩张函数 Ψ 取的.

我们作如下假定:

(A^R) $\quad |a_{ij}|_{0,\alpha}^{R,D} \leqslant \bar{K}_1, \quad |b_i|_{1,\alpha}^{R,D} \leqslant \bar{K}_1, \quad |c|_{2,\alpha}^{R,D} \leqslant \bar{K}_1;$

(B) 对任何实矢量 ξ 和任何 $(x, t) \in D$,

$$\sum a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geqslant K_2|\xi|^2 \qquad (K_2 > 0);$$

(C^R) $$|f|_{2,\alpha}^{R,D} < \infty.$$

如果仅假定局部表达式(3.2.17) 在 $R \cap \bar{S}$ 的点的邻域内成立，而 h, $D_x h$, $D_x^2 h$, 和 $D_t h$ 都是 Hölder 连续的（指数为 α），那末我们就说 D 有性质 (E^R).

本节的主要结果是如下定理.

定理 4 设 u 是 (1.1) 在 D 内的解，假定 (A^R), (B), (C^R) 成立，D 有性质 (E^R), u, $D_x u$, $D_x^2 u$, $D_t u$ 在每一开集内一致 Hölder 连续（指数为 α），这些开集的闭包在 $D + B_T + R$ 中. 再设 $\text{l. u. b. } |u| < \infty$，在 R 上 $u = \phi$，其中 $|\phi|_{2+\alpha}^R < \infty$. 设 R_0 是 $\bar{B} + S$ 中一任意区域，它含于 R 中，并且它到 R（关于 $\bar{B} + S$）的余集的距离是正的，则存在仅与 $\bar{K}_1$, K_2, R_0, R 和 D 有关的常数 $\bar{K}$，使

(7.6) $$|u|_{0,2+\alpha}^{R_0,D} \leqslant \bar{K}(|u|_0 + |\phi|_{2+\alpha}^R + |f|_{2,\alpha}^{R,D}).$$

在证明定理之前，先建立下面的推论.

推论 第三章定理 6 是定理 4 的结果.

证明 如果我们证得

(7.7) $$\overline{|u|}_\alpha + \Sigma \overline{|D_x u|}_\alpha + \Sigma \overline{|D_x^2 u|}_\alpha \leqslant \bar{K}(|u|_0 + \overline{|\phi|}_{2+\alpha} + \overline{|f|}_\alpha),$$

那末利用 (1.1) 就得到 $\overline{|D_t u|}_\alpha$ 类似的界. 因为据极值原理（见 (2.3.12)）有

$$|u|_0 \leqslant \text{const.}(\text{l. u. b. } |\phi| + |f|_0),$$

于是，从 (7.7) 就得到第三章定理 6 的证明. 为了证明(7.7)，我们

在 $\bar{B}+S$ 上取任意两个分离的点 P_1, P_2，设 R_1, R_2 分别为 P_1, P_2 关于 $\bar{B}+S$ 的余集．设 R_{01}, R_{02} 分别与 R_1, R_2 相关，象（在定理 4 中）R_0 和 R 那样，并使得对每个点 $Q \in \bar{B}+S$，存在 $(n+1)$ 维邻域 V，使对某个 i 有

$$V \cap (\bar{B}+S) = V \cap R_{0i}.$$

把定理 4 应用于这一对 R_j, R_{0j} $(j=1, 2)$，就得出(7.7)的证明．

定理 4 的证明　因为对于 D 的每一个区域 D_0 $(\bar{D}_0 \cap R_0 = \phi)$ 第 1 节定理 1 的估计给出 u, $D_x u$, $D_x^2 u$ 和它们的 Hölder 系数的必要的界，所以不必在整个区域 D，而仅需在区域 Ω 证明 (7.6) 就够了，其中 Ω 为 D 和某个以 R_0 上的点 P 为心，充分小的 r 为半径的球 V 的交集．

有三种可能性：点 P 或者在 D 的底 B 上，或者在 D 的边界 S 上，或者属于 $\bar{B}$ 和 $\bar{S}$ 的交集．前两种情形可作为第三种情形的特殊情形来处理．因此，只要考虑 $P \in \bar{B} \cap \bar{S}$ 的情形就够了．

我们可以取 r 充分小，使得 $R \cap V = (\bar{B}+S) \cap V$，并使表达式 (3.2.17) 对于 $\bar{S} \cap V$ 仍有效．为简单起见，在 (3.2.17) 中假定 $i=n$．变换

$$t'=t, \quad x_i'=x_i \quad (i=1, 2, \cdots, n-1) \tag{7.8}$$
$$x_n'=x_n-h(x_1, \cdots, x_{n-1}, t)$$

把 $S \cap V$ 映射到 $x_n'=0$ 的集合上，同样地，我们可以假定它把 Ω 映射到 $x_n'>0$, $t'>0$ 的区域 Ω' 上．映射(7.8)是一对一的．此外，

$$\text{const.}\, d(P', Q') \leqslant d(P, Q) \leqslant \text{const.}\, d(P', Q') \tag{7.9}$$

（常数是正的），因为 $\partial h/\partial x_i$ 和 $\partial h/\partial t$ 是有界函数．

定义 $v(x', t')=u(x, t)$, $\varphi(x', t')=\phi(x, t)$, $\Phi(x', t')=\Psi(x, t)$．于是 v 取 Φ 在 Ω' 的边界 $x_n'=0$, $t'=0$ 上的边界值．方程(1.1)变换成方程

$$L'v \equiv \Sigma a_{ij}'(x', t') \frac{\partial^2 v}{\partial x_i' \partial x_j'} + \Sigma b_i'(x', t') \frac{\partial v}{\partial x'} + c'(x', t')v - \frac{\partial v}{\partial t'} = f'(x', t') \tag{7.10}$$

其中 $c'(x',t')=c(x,t)$, $f'(x',t')=f(x,t)$, 不难看出, $a'_{\lambda\mu}(x',t')$ 可以通过 $a_{ij}(x,t)$, $\partial h/\partial x_i$ 表出, 而 $b'_\lambda(x',t')$ 可以通过 $b_i(x,t)$, $\partial h/\partial x_i$, $\partial^2 h/\partial x_i\partial x_j$, $\partial h/\partial t$ 表出. 利用 h 的可微性质和(7.9), 我们可以推出 L' 的系数满足第三章第 2 节的假定 $(\bar{A})$, 现在那里的 $\bar{K}_1$ 依赖于 h 和条件 (A^R) 中的 $\bar{K}_1$. 显然, (B) 也有效 (常数 k_2 不同, 且 K_2 还与 h 有关). 最后, 因为 $f'(x',t')=f(x,t)$, 所以 f' 在 Ω' 内一致 Hölder 连续 (指数为 α).

因为从 $(\bar{B}+S)-R$ 到 Ω 的距离为有界, (因而当 $Q\in\Omega$ 时, $\bar{d}_Q\geqslant\text{const.}>0$), 所以如能证得

$$(7.11)\qquad \overline{|v|}_\alpha^{\Omega'}+\Sigma\overline{|D_{x'}v|}_\alpha^{\Omega'}+\Sigma\overline{|D_{x'}^2v|}_\alpha^{\Omega'} \leqslant K'(|v|_0^{\Omega'}+\overline{|\Phi|}_{2+\alpha}^{\Omega'}+\overline{|f'|}_\alpha^{\Omega'})$$

就可得出所需要的 u 的界, 从而完成定理 4 的证明.

引进

$$(7.12)\qquad w(x',t')=v(x',t')-\Phi(x',t')$$

我们得到, 在 $\Omega'+[\bar{\Omega}'\cap\{t=0\}]+[\bar{\Omega}'\cap\{x'_n=0\}]$ 内有

$$(7.13)\qquad L'w=f'',$$

其中 $f''=f'-L'\Phi$, 而在 $[\bar{\Omega}'\cap\{t'=0\}]+[\bar{\Omega}'\cap\{x'_n=0\}]$ 上

$$(7.14)\qquad w(x',t')=0.$$

我们有

$$(7.15)\qquad \overline{|f''|}_\alpha^{\Omega'}\leqslant\text{const.}\ \overline{|\Phi|}_{2+\alpha}^{\Omega'}+\overline{|f|}_\alpha^{\Omega'},$$

常数仅依赖于 $\bar{K}_1$, R, R_0, D 和 h.

我们把定理 1 的证明用于定解问题 (7.13), (7.14), 以 $\overline{|\ |}_{j,\alpha}$ 代替 $|\ |_{j,\alpha}$, 等等; 现在我们用第 6 节定理 3′ 而不用第 3 节定理 2′. 因为几乎可以逐字地把那个证明移到现在的情形, 我们省略其细节. 不过我们注意, 定理 3′ 比定理 2′ 稍弱些, 因为(6.2)中的 $H[f]$ 可代替 (3.3) 的 $H_{Q,N}[f]$. 这在本定理的证明中无关重要, 因为实际参与第 4 节计算的并不是 $H_{Q,N}[f]$ 的界, 而且 $\text{l.u.b}\,H_{Q,N}[f]\equiv H[f]$. 于是我们导出不等式

$$(7.16)\qquad \overline{|w|}_\alpha^{\Omega'}+\Sigma\overline{|D_{x'}w|}_\alpha^{\Omega'}+\Sigma\overline{|D_{x'}^2w|}_\alpha^{\Omega'} \leqslant K^*(|w|_0^{\Omega'}+\overline{|f''|}_\alpha^{\Omega'}),$$

其中 K^* 依赖于在 L' 的条件 $(\bar{A})$, (B) 中的 $\bar{K}_1$ 和 K_2. 利用 (7.15)、(7.16) 就推出不等式 (7.11).

定理 4 的证明使我们对第三章定理 6 中的常数 $\bar{K}$ 了解得更清楚了. 即是

设 H 是局部表示式 (3.2.17) 中所有函数 h 和导数 $D_x h$, $D_x^2 h$, $D_t h$ 及其 Hölder 系数(指数为 α) 的界. 设 $\bar{S}$ 的邻域 D^* 被 m 个球 V_i 所覆盖, 这些球的球心在 $\bar{S}$ 上, 使各部分 $V_i \cap \bar{S}$ 都可整体地表示为 (3.2.17) 的形式. 假设对每一点 $P \in D^* \cap D$ 存在中心在点 P 半径 $\geqslant r$ 的球 V_P, 使得 $V_P \cap (D^* \cap D)$ 含于某个 $V_i \cap (D^* \cap D)$ 内. 最后, 设 D 的直径 $\leqslant d$, 则 (3.2.21) 中的常数 $\bar{K}$ 仅依赖于 $\bar{K}_1$, K_2, H, m, r, d, n, 及 α.

8. 热传导方程解的存在定理

在这一节, 我们要证明第三章定理 7, 9 证明中的断言 (a), 从而完成定理 7, 9 和第三章定理 10—12 的证明. 对于 $p=0$, 定理 10—12 的证明是基于定理 7, 9 的.

我们从热传导方程的基本存在定理开始.

定理 5 假定 S 有局部闸函数, 那么对于 $\bar{B}+S$ 上任何连续的 ϕ, 问题

$$(8.1)\qquad L_0 u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (\text{在 } D+B_T \text{ 中}),$$
$$u = \phi \qquad (\text{在 } \bar{B}+S \text{ 上})$$

的唯一解存在.

其证明在本章末了的问题 1—13 中给出.

利用定理 5 下面我们证明

定理 5′ 假定 S 有局部闸函数, f 在 D 内 Hölder 连续 (指数为 α), 那末问题

$$(8.2)\qquad \begin{aligned} L_0 u &= f \qquad (\text{在 } D+B_T \text{ 中}),\\ u &= 0 \qquad (\text{在 } \bar{B}+S \text{ 上}) \end{aligned}$$

存在唯一解.

证明　考虑函数

$$(8.3) \qquad v(x, t) = -\iint_{D_t} \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{(2\sqrt{\pi})^n} \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

由第一章第 3 节的结果可知，v 是方程 $L_0 v = f$ 在 $D + B_T$ 内的解.

据定理 5，因为问题

$$(8.4) \qquad \begin{aligned} L_0 w &= 0 \qquad (\text{在 } D + B_T \text{ 中}), \\ w &= -v \qquad (\text{在 } \bar{B} + S \text{ 上}) \end{aligned}$$

存在唯一解 w，由此推出(8.2)的解 u，存在，即 $u = v + w$. 其唯一性可由极值原理推出.

现在我们证明第三章定理 9 证明中的断言 (a)，即

定理 6 假定 S 有局部闸函数，设 $|f|_\alpha < \infty$，那么(8.2)的唯一解存在，且属于 $C_{2+\alpha}$.

证明 由定理 5′ 的证明知道，u 存在且可写成 $v + w$ 的形式，其中 v 由(8.3)给出，而 w 满足(8.4). 我们要证明在 $D + B_T$ 内 w 是无穷可微函数. 只要对 $D + B_T$ 内任意柱体 $D_1 = B_1 \times (t_0, t_1]$ 来证明就够了，其中 B_1 是一个球. 对于 w 和 G 利用 Green 公式(1.8.4)，其中 G 由(5.26)给出，积分后我们立即得到

$$w(x, t) = \int_{B_1} G(x, t; t_0, \tau) w(\xi, t_0) d\xi + \int_{t_0}^{t} \int_{\partial B_1} I(x, t; \xi, \tau) dS_\xi d\tau,$$

其中 ∂B_1 为 B_1 的边界. 假定 $(x, t) \neq (\xi, \tau)$，则被积函数 I 及其对 x, t 的所有导数都是 $(x, t; \xi, \tau)$ 的连续函数. 于是推出 $w(x, t)$ 是无穷可微的.

其次，在 $D + B_T$ 的任何闭子域 D_0 上考虑函数 $v(x, t)$. 设 D_1 为 $D + B_T$ 的闭子域，使得 $D_0 \subset D_1$，且使 D_0 到 D_1 的余集的距离为正 $(0 \leqslant t \leqslant T)$. 以在 D_0 的某个邻域内等于 1，在 D_1 关于 $0 \leqslant t \leqslant T$ 的余集内为零，在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上连续可微的函数 h（见第 1 章问题 1）去乘 f，并以 F 记这个乘积，而令在 $D + B_T$ 之外 $F = 0$，我们造函数

$$V(x, t) = -\int_0 \int_{B_2} \frac{(t-\tau)^{-n/2}}{(2\sqrt{\pi})^n} \times \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right] F(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

其中 B_2 为包含 $\{x; (x, t) \in \bar{D}$对某个 $t\}$ 的任何立方体. 显然, $V(x, t) - v(x, t)$ 是 D_0 内的无穷可微函数. 由第 5 节引理 6′, V_t 在 D_0 内 Hölder 连续(指数为 α). 假定 $i<n$, 证明 $\partial^2 V/\partial x_i \partial x_j$ 是 Hölder 连续的(指数为 α)要比引理 6′ 的证明简单得多, 我们把它留给读者. 因为(从 $L_0 V = F$)可借助于 $\partial V/\partial t$ 和 $\partial^2 V/\partial x_i^2$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 表示 $\partial^2 V/\partial x_n^2$, 所以 $\partial v/\partial t$ 和所有的导数 $D_x^2 v$ 在 D_0 内 Hölder 连续(指数为 α). 也可以从 V 的类似结果推出 $D_x v$ 的 Hölder 连续性.

把 v 和 w 的可微性质综合起来, 即知 u, $D_x u$, $D_x^2 u$, $D_t u$ 是 $D + B_T$ 内的 Hölder 连续函数. 又因为 $|f|_\alpha < \infty$, 且 $\underset{D}{\text{l. u. b}}|u| \leqslant (\text{const.}) \underset{D}{\text{l. u. b.}} |f| < \infty$, 定理 1 意味着 $u \in C_{2+\alpha}(D)$. 定理 6 证毕.

在证明第三章定理 7 证明中的 (a) 时, 我们需要下列引理.

引理 7 设 $D = B \times (0, T)$, 其中

$$B = \{x; -\beta_i < x_i < \beta_i \ (i = 1, \cdots, n)\}.$$

以 π 记 D 在 $x_n = 0$ 上的开面. 设 R 为 $\bar{\pi} + \bar{B}$ 的一个开集, R_0 为 R 的开子集, $\bar{R}_0 \subset R_0$ 如果 ψ 为 $\bar{S} - \pi$ 上的一个连续函数, 在 $(\bar{S} - \pi) \cap (\bar{\pi} + \bar{B})$ 上为零, 如果 $|f|_{2,\alpha}^R < \infty$, 且在 $\bar{\pi} \cap \bar{B}$ 上 $f = 0$, 那末问题

$$(8.5) \qquad \begin{aligned} L_0 u &= f \qquad (\text{在 } D + B_T \text{ 内}), \\ u &= 0 \qquad (\text{在 } \bar{\pi} + \bar{B} \text{ 上}), \\ u &= \psi \qquad (\text{在 } S - \pi \text{ 上}) \end{aligned}$$

存在唯一解 u, 并且

$$(8.6) \qquad |u|_{0,2+\alpha}^{R_0} \leqslant K(\underset{S-\pi}{\text{l. u. b.}} |\psi| + |f|_{2,\alpha}^R).$$

证明 考虑函数

$$u_1(x, t) = -\iint_{D_t} \overline{G}(\xi, \tau; x, t) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

其中 $\overline{G}(x, t; \xi, \tau)$ 由 (6.3) 定义，ξ' 为点 ξ 关于超平面 $x_n = \beta_n$ 的反射. u_1 满足

$$\begin{aligned} L_0 u_1 &= f \qquad (\text{在 } D + B_T \text{ 内}), \\ u_1 &= 0 \qquad (\text{在 } \bar{\pi} + \overline{B} \text{ 上}). \end{aligned} \tag{8.7}$$

设 D_0 为任何一个开柱体，其闭包在 $D + R$ 内. 由修改 f 在 D_0 外的定义(象定理 6 证明中考虑 v 那样)，我们可以断定函数

$$u_1, \ D_x u_1, \ D_x^2 u_1, \ D_t u_1$$

在 D_0 内一致 Hölder 连续(指数为 α).

鉴于 (8.7)，当且仅当 $u = u_1 + u_2$ 时，u 是 (8.5) 的解，其中 u_2 为问题

$$\begin{aligned} L_0 u_2 &= 0 \qquad (\text{在 } D + B_T \text{ 内}), \\ u_2 &= 0 \qquad (\text{在 } \bar{\pi} + \overline{B} \text{ 上}), \\ u_2 &= \psi - u_1 \qquad (\text{在 } S - \pi \text{ 上}) \end{aligned} \tag{8.8}$$

的解.

由直接计算可以验证，函数

$$u_2(x, t) = \int_{S-\pi} \frac{\partial \hat{G}(x, t; \xi, \tau)}{\partial \nu(\xi, \tau)} \times [\psi(\xi, \tau) - u_1(\xi, \tau)] d\sigma(\xi, \tau)$$

是 (8.8) 的解，这里 $d\sigma(\xi, \tau)$ 是 $S - \pi$ 上的面积元素，$\nu(\xi, \tau)$ 为 $S - \pi$ 在 (ξ, τ) 处的内向法线，而 $\hat{G}(x, t; \xi, \tau)$ 为 $L_0 u = 0$ 关于矩形 D 的 Green 函数. 在验证 $u_2(x, t)$ 满足(8.8)时，我们用 $\hat{G}$ 的显式(见 (3.7.8)，(3.7.9)).

由 $\hat{G}$ 的显式还可推出，$u_2(x, t)$ 在含于 $D + R$ 的任何闭区域上是无穷可微的. 把它和先前证明的 u_1 的可微性质结合起来，(利用第 1 节定理 1) 就推出 $u = u_1 + u_2$ 的范数 $|u|_{0,2+\alpha}^{R_0}$ 是有限的. 现在由第 7 节定理 4 就可推出 (8.6).

我们把引理 7 推广到一般抛物型方程. 代替 (8.5) 我们考虑如下问题:

$$
(8.9)\qquad \begin{aligned}
Lu &= f \qquad (\text{在 } D+B_T \text{ 内}),\\
u &= 0 \qquad (\text{在 } \bar{\pi}+\bar{B} \text{ 上}),\\
u &= \phi \qquad (\text{在 } S-\pi \text{ 上}).
\end{aligned}
$$

引理 8 设 D, R, R_0, ϕ, f 如引理 7 中所述. 假定 L 满足第 7 节的(A^R)和(B)，那么(8.9)的存在唯一解,并且它满足(8.6).

证明 这个证明是基于连续性方法,它和第三章定理7,9 的证明是类似的.现在类似于(a)的断言是: 若 f 满足引理 7 中所有的假定,那么(8.5)的唯一解存在,它有有限的范数 $|u|_{0,2+\alpha}^{R_0}$ 且范数满足(8.6).断言(b)的证明是以定理 4 的边界估计为基础的,其细节留给读者. 为了证明(c), 即证明: 如果 $\lambda_m\in\Sigma$, 且 $\lambda_m\to\sigma$, 则 $\sigma\in\Sigma$.(如同在定理 7.9 的证明中那样)我们首先证明 $\lim u_m=u$ 满足(8.6).(为简单计,我们又以$\{u_m\}$记$\{u_m\}$的收敛子序列.)最后,剩下证明 u 直到边界 $\bar{S}-\pi$ 是连续的,并且在 $S-\pi$上 $u=\phi$, 即要证明当 $P\to Q$, $P\in D+B_T$ 时

$$
(8.10)\qquad u(P)\to\phi(Q).
$$

其证明与第三章定理 9 中类似断言的证明有些不同, 因为在那个证明中 $\phi=0$. 在下文中我们可以假定 $c\leqslant 0$.

令在 $\bar{\pi}+\bar{B}$ 上 $\phi=0$, 并把ϕ扩张为在 $\bar{B}+S$ 上的连续函数. 在每点 $Q\in\bar{S}-\pi$ 存在对于(由(3.4.3)给出的)所有 L_λ 的闸函数 w_Q. 容易看出,任给 $\varepsilon>0$, 存在充分大的 k, 使在 $\bar{B}+S$ 上

$$
|\phi-\phi(Q)|<\varepsilon+kw_Q.
$$

函数 $W=\varepsilon+k_1w_Q(k_1=\max(k,\text{l. u. b. }|f-c\phi(Q)|))$ 在 $\bar{B}+S$ 上满足

$$
(8.11)\qquad |\phi-\phi(Q)|<W.
$$

其次,因为 $c\leqslant 0$, 在 $D+B_T$ 内就有

$$
(8.12)\qquad L_{\lambda_m}W=c\varepsilon+k_1L_{\lambda_m}w_Q\leqslant-\text{l. u. b. }|f-c\phi(Q)|.
$$

引进函数 $\widetilde{W}=W\pm[u_m-\phi(Q)]$. 据(8.11), 在 $\bar{B}+S$ 上 $\widetilde{W}>0$, 而据(8.12),在 $D+B_T$ 内 $L\widetilde{W}\leqslant 0$. 因此,由极值原理在 $\bar{D}$ 上 $\widetilde{W}>0$, 即对所有 $P\in D+B_T$ 有

$$
|u_m(P)-\phi(Q)|<\varepsilon+k_1w_Q(P).
$$

令 $m \to \infty$，我们得到

$$|u(P) - \phi(Q)| \leqslant \varepsilon + k_1 w_Q(P).$$

如果设 $P \to Q$，且顾及 ε 是任意的正数，就推出 (8.10).

现在我们可以证明第三章定理 7 证明中的断言 (a)，即

定理 7 设 D 有性质 $(\bar{\bar{E}})$，且 $\overline{|f|}_\alpha < \infty$，在 ∂B 上 $f = 0$，那么 (8.2) 存在唯一解，并且属于 $\bar{C}_{2+\alpha}$.

证明 据第三章第 4 节定理 $8'$，S 有局部闸函数. 因此，由定理 6，存在唯一解 u，且 $u \in C_{2+\alpha}$. 于是剩下要证明函数

$$u, \; D_x u, \; D_x^2 u, \; D_t u \tag{8.13}$$

在 $\bar{B} + S$ 的某个 $(D + B_T)$ 邻域内一致 Hölder 连续(指数为 α)，即要证明对任何 $P \in \bar{B} + S$，存在 P 的直径充分小的 $(n+1)$ 维邻域 V，使得函数 (8.13) 在 $(D + B_T) \cap V$ 内一致 Hölder 连续（指数为 α). 只要考虑 $P \in \bar{B} \cap \bar{S}$ 的情形就够了.

不失一般性，我们可以假定对于 P 的某个 $(n+1)$ 维邻域 W，$D \cap W$ 是一个底为矩形的柱体，$S \cap W$ 是一个侧面，而 $B \cap W$ 是下底. 事实上，如果不是这种情形，那末我们可以在 P 的邻域内首先作坐标变换（比较定理 4 的证明，尤其是 (7.8)—(7.10))，于是对那个邻域的象就限于底为矩形的柱体.

因为在 $S \cap W$ 和 $\bar{B} \cap W$ 上 u 为零，于是我们可以应用引理 8，从而函数(8.13)在 $D \cap W$ 内一致 Hölder 连续（指数为 α).定理 7 证明完毕.

我们以若干附带的结果结束本节. 这些结果可从本章和前一章的某些定理和证明中立即推出.

定理 8 即使省略 $u \in \bar{C}_{2+\alpha}(D_1)$ 的假定，第三章定理 12 的推论 1 仍为真.

事实上，只须对 $p = 0$ 在 $(D + B_T) \cap V$ 内证明这一论断，其中 V 是以 P 为心，半径充分小的球，而 P 为 S_0 上任意的点. 作一个使引理 8 得以应用的变换（比较定理 7 的证明)，就可推出这一情形的论断.

定理 9 设 (A^R)，(B)，(C^R)，(E^R) 得到满足，而 R，R_0，

ψ 满足定理 4 的假定，且在 $R\cap\partial B$ 上 $L\psi=f$. 如果 S 有局部闸函数，那末第一初值边值问题

$$
(8.14)\qquad \begin{aligned} Lu &= f \qquad (\text{在 } D+B_T \text{ 内}) \\ u &= \psi \qquad (\text{在 } \bar{B}+S \text{ 上}) \end{aligned}
$$

有唯一解 u，且 $|u|^{R_0;D}_{0,2+\alpha}<\infty$.

证明　解 u 的存在性可从第三章定理 9 推出. 为了证明 $|u|^{R_0;D}_{0,2+\alpha}<\infty$，我们在 $P(P\in R_0)$ 的 $(D+B_T)$ 邻域内考虑 u，作一个局部变换，然后应用引理 8 即可.

证明定理 8 的另一种方法是按照连续性方法.

我们已证明了第 1 节定理 1，第 7 节定理 4，第三章的存在性定理 7，9，第三章的可微性定理 12—14 以及它们的推论，现在我们可以给出定理 1 的一个明显改进，即：如果省略 u，D_xu，D_x^2u，D_tu 的 Hölder 连续性的假定，定理 1 仍为真. 假如 D 有性质 $(\bar{\bar{E}})$，那末定理 4 也可作类似的推广.

9. 椭圆型方程

按照在抛物型方程时的思路，我们可以证明椭圆型方程的 Schauder 型估计. 现在函数

$$
\Gamma(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_n}|x-y|^{2-n}, & \text{当 } n>2 \text{ 时},\\[2mm] \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{|x-y|}, & \text{当 } n=2 \text{ 时}\end{cases}
$$

起着热传导方程基本解的作用，其中 ω_n 为 R^n 中单位超球面的面积.

我们可以把 $\Delta u=f$ 的解表为如下形式：

$$
\begin{aligned} u(x) = &-\int f(y)\varphi(y)\Gamma(x-y)dy \\ &+\int u(y)\Delta[\varphi(y)\Gamma(x-y)]dy, \end{aligned}
$$

其中 Δ 为 Laplace 算子 $\Sigma\partial^2/\partial x_i^2$.

推导 Schauder 型估计时的实际计算，在技巧上和抛物型方程不同（见 [19]）.

在边界估计的推导中，

$$\Gamma(x, y) = \frac{1}{\omega_n}(|x-y|^{2-n} - |x-y'|^{2-n})$$

起着(6.3)中 $\bar{G}$ 的作用，其中 y' 是 y 对于某个超平面 $x_n=\text{const.}$ 的反射．在证明第6节定理3的类似定理时，唯一"危险的"导数是 $\partial^2 u/\partial x_n^2$，而它可从方程 $\Delta u = f$ 来估计．因此与抛物型方程的情形完全不同，在那里我们必须同时处理两个"危险的"项，即 $\partial u/\partial t$ 和 $\partial^2 u/\partial x_n^2$．因而对于椭圆的情形，不必证明第5节引理 6′ 的类似引理．

下面考虑证明断言 (a) 的问题，它们在第三章定理18，19的证明中是必需的．类似于第8节的考虑，我们可以证实这些断言．因此需要引理 6′ 相类似的引理，即必须证明：对于所有的区域 R_0 $(\bar{R}_0 \subset R + \pi)$，若 f 属于 $\bar{C}_{2+\alpha}(R)$，那么函数

$$v(x, t) = \int_R \Gamma(x-y) f(y) dy$$

属于 $\bar{C}_{2+\alpha}(R_0)$，其中 $R = \{x; -\beta_i < x_i < \beta_i\ (i=1,\cdots,n-1), -\beta_n < x_n < 0\}$，而 $\pi = \{x; -\beta_i < x_i < \beta_i\ (i=1,\cdots,n-1), x_n = 0\}$．因为我们可以证明 $\Delta v = -f$（见[63]）．从 $\partial^2 v/\partial x_i^2$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 的 Hölder 连续性可以推出唯一"危险"项 $\partial^2 v/\partial x_n^2$ 的 Hölder 连续性．

不用 Schauder 型估计，证实 (a) 的更直接的(但也是更复杂的)方法是通过直接证明下列：

Kellogg 引理　设 ∂D 属于 $C^{2+\alpha}$，$\phi \in C^{2+\alpha}$，则 Dirichlet 问题

$$\Delta u = 0 \quad (\text{在} D \text{内})$$

$$u = \phi \quad (\text{在} \partial D \text{上})$$

存在唯一解，且 $u \in \bar{C}_{2+\alpha}(D)$．

证明见[62]．

问　　题

1．我们把集合 $\{(x, t); a_i < x_i < b_i (i=1, \cdots, n), a_0 < t < b_0\}$ 理解为一

矩形 R，它的正则边界记作 ∂R. L_0 是热传导算子. 我们说 $v(x, t)$ 在 $D+B_T$ 内是上热函数 (supercaloric)，如果

(i) $v(x, t)$ 在 $D+B_T$ 内分段连续，它在有限个超平面 $t=\tau$ 上有间断，其中 $v(x, \tau+0) \geqslant v(x, \tau-0)$ (于是我们定义 $v(x, \tau)=v(x, \tau-0)$)，而 $v(x, \tau)$ 是 x 的连续函数，并且

(ii) 对于所有的 $(\xi, \tau) \in D+B_T$，都存在这样一个 $\delta>0$，使得对于任何以 (ξ, τ) 为其上底中心，直径小于 δ 的矩形 R，对于在 R 内任何满足 $L_0 u=0$ 的 u，有 $v \geqslant u$，在 ∂R 上 $u \leqslant v$. 在 (ii) 中，并不要求 u 在 ∂R 上连续. 在有限多个集合 $\partial B \cap\{t=\tau\}$ 上允许有间断 (那时 $u(x, \tau)=u(x, \tau-0)$)，假定 $u(x, \tau)$ 是 x 的连续函数. 试证明: 如果 $G^*(x, t ; \xi, \tau)$ 是 $L_0^* u=0$ 关于 R 的 Green 函数，如果我们令 $R_0=\bar{R} \cap\{t=a_0\}$，$R_{1i}=R_0 \cap\{x_i=a_i\}$，$R_{2i}=R_0 \cap\{x_i=b_i\}$，那末 $L_0 u=0$ 在 ∂R 上有边界值 u 的解存在，并由下式给出

$$
(*) \qquad \begin{aligned}
u(y, \sigma)= & \int_{R_0} u(x, a_0) G^*(x, a_0 ; y, \sigma) d x \\
& +\sum_{i=1}^n \int_{a_0}^\sigma \int_{R_{1i}}\left[u \frac{\partial G^*}{\partial x_i}\right]_{x_i=a_i} \frac{d x}{d x_i} d t \\
& -\sum_{i=1}^n \int_{a_0}^\sigma \int_{R_{2i}}\left[u \frac{\partial G^*}{\partial x_i}\right]_{x_i=b_i} \frac{d x}{d x_i} d t
\end{aligned}
$$

其中 $dx/dx_i=dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1}, \cdots dx_n$. 因此

$$
(**) \qquad \begin{aligned}
v(\xi, \tau) \geqslant & \int_{R_0} u(x, a_0) G^*(x, a_0 ; \xi, \tau) d x \\
& +\sum_{i=1}^n \int_{a_0}^\tau \int_{R_{1i}}\left[u \frac{\partial G^*}{\partial x_i}\right]_{x_i=a_i} \frac{d x}{d x_i} d t \\
& -\sum_{i=1}^n \int_{a_0}^\tau \int_{R_{2i}}\left[u \frac{\partial G^*}{\partial x_i}\right]_{x_i=b_i} \frac{d x}{d x_i} d t .
\end{aligned}
$$

[提示: 利用第三章第 7 节末的 G 的形式去验证 (*) 的右边(把它叫做 w) 在 R 内满足 $L_0 w=0$，在 ∂R 上(除有限多个集合 $\partial R \cap\{t=\tau\}$ 外)满足 $w=u$. 把极值原理应用于 $u_\varepsilon \pm(\omega-u)$ 来证明在 R 内 $w=u$，这里 u_ε 由 (*)右边定义，其中 u 由在 u，w 不连续点的 ε 邻域内等于 $\underset{R}{\text{l. u. b.}}(|u|+|w|)$，在别处为零的函数 f 来代替.]

2. 试证明: 如果不等式(* *)关于(在 ∂R 上的)边界值 $u=v$ 成立，那末对于(在 ∂R 上的)任何边界值 $u \leqslant v$ 它也成立.

[提示: 在(* *)中证明

$(***) G^* \geqslant 0, \quad \left.\frac{\partial G^*}{\partial x_i}\right|_{x_i=a_i} \geqslant 0, \quad \left.\frac{\partial G^*}{\partial x_i}\right|_{x_i=b_i} \leqslant 0.$]

3．利用(*)右边 u 的表达式证明：如果 $\{u_m\}$ 是 $L_0u=0$ 在 $D+B_T$ 内解的一致有界序列，那末对于任何 i, j，$\{D_x^i D_t^j u_m\}$ 是 $D+B_T$ 的闭子集上的一致有界序列(基于先验估计的证明见第三章第6节)．

4．试证明：如果 v 为 $D+B_T$ 内的上热函数，而在 $D+B_T$ 内 $L_0u=0$，则 $v+u$ 为 $D+B_T$ 内的上热函数．

5．试证明：如果 v 为 $D+B_T$ 内的上热函数，在 $D+B_T$ 内 $L_0u=0$，且对所有的 $Q\in\bar{B}+S$ 有 $\liminf\limits_{P\to Q}(v-u)\geqslant 0$，则在 $D+B_T$ 内 $v\geqslant u$．

[提示：如果 $w\equiv v-u$ 取负的极小值 $-M$，那末对于某点 $P\in D+B_T$ 和某个以 P 为其上底中心的矩形 R 有 $w(P)=-M$，在 ∂R 的某些点处 $w>-M$．利用(**)、(***)推出 $-M>-M$]．

6．试证明：如果 v 满足(i)，且对于所有的 (ξ,τ) 和右边当 $u=v$ 时，(*)成立，R 如同(ii)，那末(ii)成立，因此 v 为上热函数．

[提示：利用问题5的证明．]

7．设 v 为 $D+B_T$ 内的上热函数，D_0 为含于 D 内的矩形．定义

$$w=\begin{cases} v & (\text{在 } D-\bar{D}_0 \text{ 内}) \\ u & (\text{在 } \bar{D}_0 \text{ 上}), \end{cases}$$

其中 $L_0u=0$，在 ∂D_0 (D_0 的正则边界)上 $u=v$．试证明 w 是上热函数．

[提示：如果 (ξ,τ) 不属于 ∂D_0，则当 R 的直径充分小时(**)成立．如果 $(\xi,\tau)\in\partial D_0$，利用在 $\bar{D}_0$ 上 $v\geqslant u$ 和(***)去证明(**)．再利用问题6．]

8．设 v 为 $D+B_T$ 内的连续上热函数，$\{D_m\}$ 是矩形序列，$\bar{D}_m\subset D+B_T$．归纳地定义函数序列 $\{v_m\}$ 如下：

$$v_m(x,t)=\begin{cases} v_{m-1}(x,t) & (\text{在 } D-\bar{D}_m \text{ 内}) \\ u(x,t) & (\text{在 } \bar{D}_m \text{ 上}) \end{cases}$$

其中在 D_m 内 $L_0u=0$，在 ∂D_m 上 $u=v_{m-1}$．试证明 $\{v_m(x,t)\}$ 为上热函数的单调减序列，且 v_m 最多有 m 个间断超平面 $t=\tau$．

9．试证明：在 $D+B_T$ 内满足 $L_0v\leqslant 0$ 的任何函数为上热函数．

[提示：在矩形 R 内对 v, G^* 利用 Green 公式．]

10．在 $Q(Q\in\bar{B}+S)$ 处的弱闸函数是一个在 $\bar{D}$ 上连续的函数 w_Q，它在 Q 处为零，在 $\bar{D}-Q$ 内为正，而在 $D+B_T$ 内为上热函数．据问题9，闸函数是弱闸函数．试证明：如果在 S 的所有点上存在弱闸函数，则下列问题

的解存在：

$$L_0u = 0 \qquad (\text{在 } D + B_T \text{ 内})$$
$$u = \phi \qquad (\text{在 } \bar{B} + S \text{ 上}),$$

其中 ϕ 为 $\bar{B} + S$ 上的任意连续函数，且可以把 ϕ 扩张成为 $\bar{D}$ 上的连续函数 v，它在 $D + B_T$ 内是上热函数.

[提示：象在问题 8 那样构造 v_m. D_m 构造如下：

$\bigcup\limits_m \bar{D}_m = D + B_T$，且使每个 D_j 在序列 $\{D_m\}$ 中重复无穷多次．由问题 8 和 3，$u = \lim u_m$ 存在且满足 $L_0u = 0$．其次，如果 $Q \in \bar{B} + S$，则在 $\bar{D}$ 上有 $v < \phi(Q) + \varepsilon + kw_Q$．因此 $v_m < \phi(Q) + \varepsilon + kw_Q$，$u < \phi(Q) + \varepsilon + kw_Q$．同样地，$u > \phi(Q) - \varepsilon - kw_Q$.]

11．试把问题 10 的结果推广到 ϕ 为多项式的情形.

[提示：写成 $\phi = (\phi + ct) - ct$ 并利用问题 9．]

12．试把问题 11 的结果扩广到 ϕ 为任意连续函数的情形.

[提示：用多项式逼近 ϕ.]

13．试证明第 8 节定理 5.

[提示：对 t 区间一步一步地利用问题 12.]

第 五 章

第二初值边值问题

引言 在第三章我们已用先验估计和连续性方法解决了第一初值边值问题．本章将借助于位势把问题化为积分方程来解第二初值边值问题．为了简单描述这一方法，我们在柱体 $D\times(0, T]$ 内考虑热传导方程 $L_0u=0$ 的情形．函数

$$U(x, t)=\int_0^t\int_S \Gamma(x, t; \xi, \tau)\varphi(\xi, \tau)dS_\xi\, d\tau \tag{0.1}$$

称为(关于 Γ 的)**密度**为 φ 的**单层位势**，其中 S 为 D 的边界，dS_ξ 为 S 的曲面元素，Γ 为热传导方程的基本解．$U(x, t)$ 定义在 $\overline{D}\times[0, \Gamma]$ 上，且在其上连续，当 D 内的 x 沿着非相切的方向趋于 S 上的点 x^0 时，

$$\frac{\partial}{\partial\nu}U(x, t)\to-\frac{1}{2}\varphi(x^0, t)+\frac{\partial}{\partial\nu}U(x^0, t) \tag{0.2}$$

其中 ν 为 S 在 x^0 处的内法线．这个**跳跃关系**是单层位势最重要的特征．

如果取 u 为函数(0.1)，其中 φ 满足 Volterra 型积分方程

$$\frac{1}{2}\varphi(x^0, t)=\int_0^t\int_S\left[\frac{\partial}{\partial\nu}\Gamma(x^0,t;\xi,\tau)+\beta(x^0,t)\Gamma(x^0,t;\xi,\tau)\right]\times\varphi(\xi, \tau)dS_\xi\, d\tau-g(x^0, t),$$

我们就可以解问题：

$$\begin{aligned} &L_0u=0 && (\text{在 } D\times(0, T] \text{ 内}),\\ &u(x,0)=0 && (\text{在 } \overline{D} \text{ 上}),\\ &\frac{\partial u}{\partial\nu}+\beta u=g && (\text{在 } S\times(0, T] \text{ 上}). \end{aligned} \tag{0.3}$$

同样地，我们也可以解一般第二初值边值问题，其中

$$L_0u = f,\ u(x, 0) = \psi(x).$$

在本章最后一节，我们将把基本解和位势的概念推广到椭圆型方程，并考虑 Neumann 问题.

1. 基本解的结果概要

在这一章我们使用第一章的结果和记号，不过，为方便读者起见，我们将以在后面各节便于使用的形式总结主要的事实.

设

$$(1.1)\qquad Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u - \frac{\partial u}{\partial t}$$

是在有界闭区域 $\Omega = \overline{D} \times [0, T]$ 上定义的算子，其中 D 为 R^n 中的区域，并假定:

(A_1) L 在 Ω 上是抛物的，

(A_2) L 的系数在 Ω 上满足 Hölder 条件 (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6).

利用第三章 第 1 节定理 2 的后面叙述的断言，我们可以把 L 的系数扩张到较大的集合 $\Omega_0 = \overline{D}_0 \times [0, T]$ 上，以便(A_1),(A_2)对 Ω_0 成立，其中 D_0 是包含 $\overline{D}$ 的有界区域.

现在我们可以在 Ω_0 内构造基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$. 它有如下形式

$$(1.2)\qquad \Gamma(x, t; \xi, \tau) = Z(x, t; \xi, \tau) + \int_\tau^t \int_{D_0} Z(x, t; \eta, \sigma)\Phi(\eta, \sigma; \xi, \tau)\, d\eta\, d\sigma,$$

其中 Z 由 (1.2.5), (1.2.6), (1.2.4) 给出，Φ 是以 D_0 代 D 的积分方程 (1.4.1) 的解，且可以把它展成级数 (1.4.4). Φ 满足不等式 (1.4.8).

还可以把 Γ 写成下面的形式.

$$(1.3)\qquad \Gamma(x, t; \xi, \tau) = Z(x, t; \xi, \tau) + Z_0(x, t; \xi, \tau),$$

其中 Z_0 为(1.2)右边的积分. 下列不等式对于 D_0 内的 x, ξ 和 $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ 成立:

$$(1.4) \qquad |\Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2\mu}}$$

$$(0 < \mu < 1),$$

$$(1.5) \qquad |D_x Z(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu}}$$

$$\left(\frac{1}{2} < \mu < 1\right),$$

$$(1.6) \qquad |D_x Z_0(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu-\alpha}}$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{2} < \mu < 1\right).$$

利用第一章第 4 节引理 2 可以从(1.5),(1.4.8)得出(1.6).

在 $\bar{D}_0 \times [0, T]$ (代替 $\bar{D} \times [0, T]$) 上构造 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$, 其原因是我们需要 $D_x\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 不仅对于 D 内的 x, ξ, 而且对 $\bar{D}$ 邻域内的 x, ξ 也有定义并且连续.

我们以 S 记 D 的边界. 我们说 S 是 $C^{1+\lambda}(0 < \lambda < 1)$ 类的,如果局部地可以把 S 表为 (3.8.6) 的形式, 其中 h 为 $C^{1+\lambda}$ 类的. 今后我们(在这一章)总假定 S 是 $C^{1+\lambda}$ 类的.

设 $x_0 \in S$ 并以 π 记 S 在 x^0 处的切超平面. 考虑中心在 x^0 半径为 δ 的闭球 B_δ. 它与 S 相交于某一部分 S_δ, 并且当 δ 充分小时, S_δ 在 π 上的正交投影定义一个 S_δ 的点 ξ 和某个集合 S'_δ 的点 ξ'(ξ' 是 ξ 的投影) 之间的一对一的映射. 函数 $\xi = \grave{\xi}(\xi')$ 和 $\xi' = \xi'(\xi)$ 是 Hölder 连续的(指数为 λ). S'_δ 是 π 中的闭区域, x^0 在它的内部.

设 x 为 S 在 x^0 处内法线 N_{x^0} 上的一点, 设 $|x - x^0|$ 充分小, 比如, $|x - x^0| < \delta_0$. 因为 S 是 $C^{1+\lambda}$ 类的,所以对任何 $\xi \in S_\delta$, 有

$$(1.7) \qquad |\xi - \xi'| \leqslant \text{const.} |x^0 - \xi|^{1+\lambda}.$$

现在我们证明

(1.8) $$0 < \text{const.} \leqslant \frac{|x-\xi|}{|x-\xi'|} \leqslant \text{const.}.$$

如果 $|x^0-\xi| > 2|x-x^0|$，则由(1.7)有

$$|x-\xi'| \leqslant |x-x^0| + |x^0-\xi| + |\xi-\xi'|$$
$$\leqslant \text{const.}|x^0-\xi|.$$

又因

$$|x-\xi| \geqslant |x^0-\xi| - |x-x^0| > |x^0-\xi|/2$$

这就推出不等式

(1.9) $$\frac{|x-\xi'|}{|x-\xi|} \leqslant \text{const.}.$$

如果 $|x^0-\xi| \leqslant 2|x-x^0|$，那么利用(1.7)和 x^0 是 S 上到 x 最近的点（若 $|x-x^0|$ 充分小）这一事实，我们就得到

$$|x-\xi'| \leqslant |x-\xi| + |\xi-\xi'|$$
$$\leqslant |x-\xi| + \text{const.}|x^0-\xi|^{1+\lambda}$$
$$\leqslant |x-\xi| + \text{const.}|x-\xi|^{1+\lambda}$$
$$\leqslant \text{const.}|x-\xi|,$$

于是(1.9)证毕．(1.8)右边不等式的证明是类似的。

注意，我们可以取(1.7)，(1.8)中的常数以及 δ 和 δ_0 都与 x_0 和 x 无关。

2. 单层位势的跳跃关系

设 $\varphi(x,t)$ 为 $S\times[0,T]$ 上的连续函数，并引进（在 $D_0\times(0,T]$ 内）

(2.1) $$U(x,t) = \int_0^t \int_S \Gamma(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)dS_\xi\, d\tau,$$

其中 dS_ξ 为 S 上的曲面元素． U 称为（关于 Γ 的）密度为 φ 的单层位势．

如果 $x\in S$，那么 (2.1) 中的积分是广义积分，并定义为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}\int_S.$$

由(1.4)推出，这个广义积分是绝对收敛的．而且，利用类似于第一章第 3 节引理 1 证明中所用的论证，我们可以断定 $U(x,t)$ 不仅

对于 $x \in \widetilde{D}_0 - S$，而且对于 $\widetilde{D}_0$ 上的 x 是连续函数．容易看出，当我们定义 U 在 $t=0$ 上为零时，$U(x, t)$ 在闭区域 Ω_0 上是连续的．

据 (1.3)，有

(2.2) $$U(x, t) = V(x, t) + W(x, t),$$

其中

(2.3) $$V(x, t) = \int_0^t \int_S Z(x, t; \xi, \tau)\varphi(\xi, \tau) dS_\xi \, d\tau,$$

(2.4) $$W(x, t) = \int_0^t \int_S Z_0(x, t; \xi, \tau)\varphi(\xi, \tau) dS_\xi \, d\tau.$$

显然，如果 $x \in D_0 - S$，则有

(2.5) $$D_x W(x, t) = \int_0^t \int_S D_x Z_0(x, t; \xi, \tau)\varphi(\xi, \tau) dS_\xi \, d\tau.$$

利用(1.6)和类似于第一章第 3 节引理 1 证明中所用的论证，可以证明(2.5)的右边（记作 $W_1(x, t)$）当 $x \in S$ 时（作为一个绝对收敛的广义积分）也存在，并且对于 S 邻域内的 x，$W_1(x, t)$ 还是一个连续函数．于是，特别地，对于任何 S 上的 x^0，有

(2.6) $$\lim_{x \to x^0} D_x W(x, t) = \int_0^t \int_S D_x Z_0(x^0, t; \xi, \tau)\varphi(\xi, \tau) dS_\xi \, d\tau.$$

显然，如果 $x \in D$，则

(2.7) $$D_x V(x, t) = \int_0^t \int_S D_x Z(x, t; \xi, \tau)\varphi(\xi, \tau) dS_\xi \, d\tau,$$

但当 x 趋于 S 上的点 x^0 时，$D_x V(x, t)$ 的性态与 $D_x W(x, t)$ 完全不同．我们感兴趣的是 U 或 V 的一阶导数的性态，首先是它们沿特殊方向，即在 x^0 处的内补法线方向上导数的性态．在陈述主要结果之前，我们引进若干记号．

设 $x^0 \in S$，并以 $\nu(x^0, t^0)$ 记在 (x^0, t^0) 处的内补法线，即 $\nu(x^0, t^0)$ 的分量 $\nu^i(x^0, t^0)$ 由下式给出

(2.8) $$\nu^i(x^0, t^0) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x^0, t^0) N_{x^0}^j \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$
$$\nu^{n+1}(x^0, t^0) = 0,$$

其中 $N_{x^0}=(N_{x^0}^1,\cdots\cdots N_{x^0}^n)$ 为 S 在 x^0 处的内法线. 因为 (a_{ij}) 是正定矩阵，所以 $\nu(x^0,t^0)$ 指向 $\Omega\cap\{t=t^0\}$ 的内部. $U(x,t)$ 沿 $((x^0,t^0)$ 处) 补法线方向的导数由下式给出

$$(2.9)\qquad \frac{\partial U(x,t)}{\partial\nu(x^0,t)}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x^0,t)\cos(N_{x^0},x_j)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_i}$$

其中 $\cos(N_{x^0},x_j)$ 为 N_{x^0} 方向和 x_j 轴正向之间夹角的余弦.

设 $K=K(x^0)$ 为 R^n 中的任意有限闭锥，其顶点为 x^0，使得 $K\subset D+\{x^0\}$. 于是，任何从 x_0 到 K 内的点 x 的方向都指向 D 的内部.

现在我们陈述这一节的主要结果，

定理 1 设假定 (A_1), (A_2) 成立，设 S 是对某个 $0<\lambda<1$ 属于 $C^{1+\lambda}$ 类的，设 φ 是 $S\times[0,T]$ 上的连续函数，则对于任何 $x^0\in S$, $0<t\leqslant T$，函数 $U(x,t)$ 满足关系

$$(2.10)\qquad \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in K}}\frac{\partial U(x,t)}{\partial\nu(x^0 t)}=-\frac{1}{2}\varphi(x^0,t)$$
$$+\int_0^t\int_S\frac{\partial\Gamma(x^0,t,\xi,\tau)}{\partial\nu(x^0,t)}\varphi(\xi,\tau)dS_\xi\,d\tau.$$

于是单层位势在穿过密度 φ 所在的 Ω 的侧边界时发生跳跃. 关系式(2.10)称为跳跃关系式.

证明 我们首先证明 (2.10) 右边的广义积分存在，并且是绝对收敛的. 我们需要一条类似于第一章第 4 节引理 2 那样的初等引理(其证明，见问题 1):

引理 1 如果 $0\leqslant a<n-1$ $0\leqslant b<n-1$，则

$$(2.11)\qquad \int_S\frac{dy}{|x-y|^a|y-\xi|^b}$$
$$\leqslant\begin{cases}\text{const.}|x-\xi|^{n-1-a-b} & (a+b>n-1),\\ \text{const.} & (a+b<n-1).\end{cases}$$

如果我们证得：对于任何的 $(1-\beta/2)<\mu<1$，有

$$(2.12)\qquad \left|\frac{\partial\Gamma(x^0,t;\xi,\tau)}{\partial\nu(x^0,t)}\right|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu}\frac{1}{|x^0-\xi|^{n+1-2\mu-\beta}},$$

$$(\beta = \min(\alpha, \lambda)),$$

那么对 $a = n + 1 - 2\mu - \beta$, $b = 0$ 应用引理 1 就可推出 (2.10) 右边那个积分的绝对收敛性。

为了证明 (2.12)，我们首先考虑 $\partial Z/\partial \nu$:

$$(2.13)\qquad \frac{\partial Z(x, t; \xi, \tau)}{\partial \nu(x^0, t^0)} \exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x, \xi)}{4(t-\tau)}\right]$$
$$= -\frac{1}{2} C(\xi, \tau)(t-\tau)^{-1-n/2}$$
$$\cdot \sum_{i,j,k} a_{ij}(x^0, t) a^{ik}(\xi, \tau)(x_k - \xi_k) \cos(N_{x^0}, x_j)$$
$$= F_0(x, t; \xi, \tau) + F_1(x, t; \xi, \tau),$$

其中

$$(2.14)\qquad F_0(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{2} C(\xi, \tau)(t-\tau)^{-1-n/2}$$
$$\times \exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x, \xi)}{4(t-\tau)}\right] |x - \xi| \cos(N_{x^0} - \overrightarrow{x\xi}),$$

$$(2.15)\qquad F_1(x, t; \xi, \tau) = -\frac{1}{2} C(\xi, \tau)(t-\tau)^{-1-n/2}$$
$$\times \exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x, t)}{4(t-\tau)}\right] \cdot \sum_{i,j,k} [a_{ij}(x^0, t) - a_{ij}(\xi, \tau)]$$
$$\times a^{ik}(\xi, \tau)(x_k - \xi_k) \cos(N_{x^0}, x_j);$$

$\overrightarrow{x\xi}$ 记联结 x 到 ξ 的矢量.

因为 $|\cos(N_{x^0}, \overrightarrow{x^0\xi})| \leqslant \text{const.}|x^0 - \xi|^\lambda$，所以

$$(2.16)\qquad |F_0(x^0, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{|x^0 - \xi|^{n+1-2\mu-\lambda}}.$$

其次，利用 (1.1.4) 我们得到，对于任何 $(1 - \alpha/2) < \mu_0 < 1$, $1 < \mu_1 < 1 + \alpha/2$, 有

$$(2.17)\qquad |F_1(x^0, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu_0}} \frac{1}{|x^0 - \xi|^{n+1-2\mu_0-\alpha}}$$
$$+ \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu_1-\alpha/2}} \frac{1}{|x^0 - \xi|^{n+1-2\mu_1}}.$$

因此，

$$(2.18)\qquad |F_1(x^0,\ t;\ \xi,\ \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}}\frac{1}{|x^0-\xi|^{n+1-2\mu-\alpha}}$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{2}<\mu<1\right).$$

结合(2.17)，我们就得到 $\partial Z/\partial \nu$ 的界，而当我们把它和关于 $x=x^0$ 的 (1.6) 结合起来时，就得出所需要的不等式(2.12)。

下面我们对于 $x\to x^0$，且 x 在法线 N_{x^0} 上的情形证明跳跃关系(2.10)。因为 $|x^0-\xi|\leqslant \text{const.}\,|x-\xi|$，所以

$$|a_{ij}(x^0,\ t)-a_{ij}(\xi,\ t)|\leqslant \text{const.}\,|x-\xi|^{\alpha}.$$

因此可以象前面(2.17)，(2.18)中对 $F_1(x^0,\ t;\ \xi,\ \tau)$ 进行估计那样来估计 $F_1(x,\ t;\ \xi,\ \tau)$，于是得到

$$(2.19)\qquad |F_1(x,\ t;\ \xi,\ \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}}\frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu-\alpha}}.$$

因而，$F_1(x,t;\xi,\tau)$ 和 $D_xZ_0(x,t;\xi,\tau)$ 有同样的界．如象对 D_xZ_0 那样，我们断定积分

$$V_1(x,\ t)=\int_0^t\int_S F_1(x,\ t;\ \xi,\ \tau)\varphi(\xi,\ \tau)dS_\xi d\tau$$

当 $x\to x^0$ 时满足关系

$$V_1(x,\ t)\to V_1(x^0,\ t).$$

把这一事实同(2.6)结合起来，于是，所剩下的是证明积分

$$(2.20)\qquad V_0(x,\ t)=\int_0^t\int_S F_0(x,\ t;\ \xi,\ \tau)\varphi(\xi,\ \tau)dS_\xi d\tau$$

满足跳跃关系

$$(2.21)\qquad \lim_{x\to x^0} V_0(x,t)=\frac{-1}{2}\varphi(x^0,\ t)+V_0(x^0,\ t).$$

令

$$(2.22)\qquad V_0(x,\ t)=I_\delta(x,\ t)+J_\delta(x,\ t),$$

其中（回顾(2.14)）

$$(2.23)\qquad I_\delta(x,\ t)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{S_\delta}\frac{C(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)}{(t-\tau)^{1+n/2}}\exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]$$
$$\times|x-\xi|\cos(N_{x^0},\overrightarrow{x\xi})\,dS_\xi\,d\tau,$$

而 J_δ 为其余部分(记号 π, S_δ, S'_δ, ξ' 见第 1 节).

最后我们把 I_δ 与下面的 I'_δ 进行比较.

(2.24) $\quad I'_\delta(x,t)$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t\int_{S'_\delta}\frac{C(x^0,\tau)\varphi(x^0,\tau)}{(t-\tau)^{1+n/2}}\exp\left[-\frac{\vartheta^{x^0,t}(x,\xi')}{4(t-\tau)}\right]$$
$$\times|x-\xi'|\cos(N_{x^0},\overrightarrow{x\xi'})\,dS'_\xi\,d\tau,$$

其中 dS'_ξ 是超平面 π 上(在 ξ' 处)的曲面元素.

至于 I'_δ 的性态,我们建立关系

(2.25) $$\lim_{x\to x^0} I'_\delta(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x^0,t).$$

对 τ 积分并作代换 $t-\tau=\vartheta^{x^0,t}(x,\xi')/4\rho$, 我们就得到

(2.26) $\quad I'_\delta(x,t)$

$$= 2^{n-1}\int_{S'_\delta}\frac{|x-\xi'|\cos(N_{x^0},\overrightarrow{x\xi'})}{[\vartheta^{x^0,t}(x,\xi')]^{n/2}}\psi(x,\xi',t)\,dS'_\xi,$$

其中

(2.27) $$\psi(x,\xi',t)=\int_{\vartheta^{x^0,t}(x,\xi')/4t}^{\infty}\rho^{n/2-1}e^{-\rho}\,C$$
$$\times\left(x^0,t-\frac{\vartheta^{x^0,t}(x,\xi')}{4\rho}\right)\varphi\left(x^0,t-\frac{\vartheta^{x^0,t}(x,\xi')}{4\rho}\right)d\rho.$$

对 N_{x^0} 上所有(充分靠近 x^0)的 x 和所有的 $\xi'\in S'_\delta$, $\psi(x,\xi',t)$ 是 (x,ξ') 的连续函数. 特别地(当 $x\to x^0$, $\xi'\to x^0$ 时),

$$\psi(x^0,x^0,t)=\lim\psi(x,\xi',t),$$

且

$$\psi(x^0,x^0,t)=C(x^0,t)\varphi(x^0,t)\int_0^\infty\rho^{n/2-1}e^{-\rho}\,d\rho.$$

因为最后这个积分等于 $\Gamma(n/2)=2\pi^{n/2}/\omega_n$, 我们得到

$$(2.28) \qquad \phi(x^0, x^0, t) = C(x^0, t)\varphi(x^0, t)2\pi^{n/2}/\omega_n,$$

其中 ω_n 为 R^n 中单位超球面的面积，

设 Λ 是中心在 $x \in R^n$ 的单位超球面，以 ξ'' 记 Λ 和起点在 x，而方向为 $\overrightarrow{x\xi'}$ 的射线的交点．对 ξ'' 引进坐标 $(\xi_1'', \cdots, \xi_n'')$，它们和 $(\xi_1' - x_1, \cdots, \xi_n' - x_n)$ 成比例，使 $\Sigma(\xi_i'')^2 = 1$．以 $d\omega(\xi'')$ 记 Λ (在 ξ'') 的曲面元素． 把 S_δ' 分成两个区域 $S_{1\delta}'$ 和 $S_{2\delta}'$，其中 $S_{1\delta}'$ 使 x_0 为其内点；$S_{2\delta}'$ 为关于 S_δ' 的余．当 ξ' 在 $S_{1\delta}'$ 内变化时，ξ'' 在 $S_{1\delta}''$ 内变化．因为 x 在 N_{x^0} 上，所以有

$$(2.29) \qquad I_\delta'(x, t)' = -2^{n-1}\phi(x^0, x^0, t)\int_{S_{1\delta}''} \frac{d\omega(\xi'')}{[\Sigma a^{ij}(x^0, t)\xi_i''\xi_j'']^{n/2}}$$

$$- 2^{n-1}\int_{S_{1\delta}''} \frac{[\phi(x, \xi', t) - \phi(x^0, x^0, t)]}{[\Sigma a^{ij}(x^0, t)\xi_i''\xi_j'']^{n/2}} d\omega(\xi'')$$

$$+ 2^{n-1}\int_{S_{2\delta}'} \frac{|x - \xi'| \cos(N_{x^0}, \overrightarrow{x\xi'})}{[\vartheta^{x_0, t}(x, \xi')]^{n/2}} \phi(x, \xi', i) dS_{\xi'}.$$

因为 $\phi(x, \xi', t)$ 为一连续函数，所以给定了任意的 $\epsilon > 0$，我们就能找到 $\eta = \eta(\epsilon)$，使当 $S_{1\delta}$ 的直径小于 η 时，(2.29) 右边第二项不超过 ϵ．以后 η 将被固定．因为当 $x \to x^0$ 时，$\cos(N_{x^0}, \overrightarrow{x\xi'}) \to 0$，又因为当 $\xi' \in S_{2\delta}'$ 时，$|x - \xi'| \neq 0$ 但为有界，所以我们断定：如果(对某个依赖于 η 和 ϵ 的 η_0) $|x \to \xi'| < \eta_0$，则 (2.29) 右边第三项不超过 ϵ．

至于(2.29)右边第一项，鉴于(2.28)，它等于

$$(2.30) \qquad -\frac{2^n \pi^{n/2}}{\omega_n} C(x^0, t)\varphi(x^0, t)\int_{S_{1\delta}''} \frac{d\omega(\xi'')}{[\Sigma a^{ij}(x^0, t)\xi_i''\xi_j'']^{n/2}}.$$

为了估计 (2.30) 中的积分在 $x \to x^0$ 时的值，我们考虑函数．

$$I(t) = \int_{|\xi|<1} t^{-n/2} \exp\left[-\frac{\Sigma a^{ij}\xi_i\xi_j}{4t}\right] d\xi,$$

其中 (a^{ij}) 为正定矩阵，而 a^{ij} 为常数．先作代换 $\xi_i = \rho\xi_i'$，于是 $\sigma = \rho^2\vartheta/4t$ (其中 $\vartheta = \Sigma a^{ij}\xi_i'\xi_j'$)，我们就得到

$$I(t) = 2^{n-1}\int_{\Lambda} \vartheta^{-n/2}\left[\int_0^{\vartheta/4t} \sigma^{n/2-1} e^{-\sigma}\, d\sigma\right] d\omega(\xi'')$$

因此，有

$$\lim_{t\to 0} I(t) = 2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int_{\Lambda} \vartheta^{-n/2}\, d\omega(\xi'').$$

另一方面，据第一章第 2 节定理 1，因为

$$\lim_{t\to 0} I(t) = [\det(a^{ij})]^{-1/2}(2\sqrt{\pi})^n,$$

所以我们断定

$$\int_{\Lambda} \frac{d\omega(\xi'')}{[\Sigma a^{ij}\xi_i''\xi_j'']^{n/2}} = [\det(a^{ij})]^{-1/2}\omega_n.$$

如果我们把左边的积分 $\int_{\Lambda}$ 分解为两个积分 $\int_{\Lambda_1} + \int_{\Lambda_2}$，其中 Λ_1, Λ_2 为 Λ 上两个互补的半球，因为映射 $\xi'' \to -\xi''$ 使 Λ_1, Λ_2 的点彼此一一对应，而使 $d\omega(\xi'')$ 和 $[\Sigma a^{ij}\xi_i''\xi_j'']^{n/2}$ 保持不变，所以

$$\int_{\Lambda_1} = \int_{\Lambda_2},$$

因此我们有：

$$\int_{\Lambda_1} \frac{d\omega(\xi'')}{[\Sigma a^{ij}\xi_i''\xi_j'']^{n/2}} = [\det(a^{ij})]^{-1/2}\omega_n/2.$$

注意到当 $x \to x^0$ 时，$S''_{1\delta}$ 趋于 Λ 上的半球，并利用上面的等式令 $a^{ij} = a^{ij}(x^0, t)$，我们就得到，当 $x \to x^0$ 时，(2.30) 中的积分趋于

$$[\det(a^{ij}(x^0, t))]^{-1/2}\omega_n/2.$$

回顾 (1.2.6) 中 $C(x^0, t)$ 的定义就推出式子 (2.30). 因此，当 $x \to x_0$ 时，(2.29) 右边的第一项收敛于 $-\varphi(x^0, t)/2$. 因为其他两项的每一项仍不超过任意给定的 ε，于是关系式(2.25)成立.

回顾 (2.22) 中 J_δ 的定义，可知，对于 J_δ 积分中的积分变量 ξ 以及所有充分靠近于 x^0 的 x，有 $|x-\xi| \geqslant \text{const.} > 0$. 因此那个积分在 x^0 的某个小邻域内是连续函数. 由此推出

(2.31) $$\lim_{x\to x^0} J_\delta(x, t) = J_\delta(x^0, t).$$

如能证明，当 $x \to x^0$ 时，

$$I_\delta(x, t) - I'_\delta(x, t) \to I_\delta(x^0, t), \tag{2.32}$$

那么把(2.31)，(2.25)和(2.22)结合起来，并注意到 $I'_\delta(x^0, t) = 0$，就可推出跳跃关系 (2.21).

为了证明 (2.32)，取 $\delta_1 < \delta$，并写成

$$\begin{aligned} I_\delta(x, t) &= I_{\delta_1}(x, t) + \bar{I}_{\delta_1}(x, t), \\ I_\delta(x^0, t) &= I_{\delta_1}(x^0, t) + \bar{I}_{\delta_1}(x^0, t), \\ I'_\delta(x, t) &= I'_{\delta_1}(x, t) + \bar{I}'_{\delta_1}(x, t), \end{aligned} \tag{2.33}$$

其中 $\bar{I}_{\delta_1}(x, t)$ 是 $I_{\delta_1}(x, t)$ 的其余部分（也就是在集合 $S_\delta - S_{\delta_1}$ 上取的对 ξ 的积分），等等.

我们首先证明，只要 δ_1 充分小并与 x 无关，那么对于任何 $\varepsilon > 0$ 有

$$|I_{\delta_1}(x, t) - I'_{\delta_1}(x, t)| < \varepsilon. \tag{2.34}$$

利用 (1.7)，(1.8)，我们得到.

$$\begin{aligned} &\left| |x - \xi| \cos(N_{x^0}, \overrightarrow{x\xi}) - |x - \xi'| \cos(N_{x^0}, \overrightarrow{x\xi'}) \right| \\ &= |\xi - \xi'| \leqslant \text{const.} |x^0 - \xi|^{1+\lambda} \leqslant \text{const.} |x - \xi|^{1+\lambda}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| \exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x, \xi)}{4(t - \tau)} \right] - \exp\left[-\frac{\vartheta^{x^0,t}(x, \xi')}{4(t - \tau)} \right] \right| \\ &\leqslant \exp\left[-\frac{K|x - \xi|^2}{t - \tau} \right] \frac{|\vartheta^{\xi,\tau}(x, \xi) - \vartheta^{x^0,t}(x, \xi')|}{4(t - \tau)} \end{aligned}$$

（K 是常数）

$$\begin{aligned} &|\vartheta^{\xi,\tau}(x, \xi) - \vartheta^{x^0,t}(x, \xi')| \\ &\quad \leqslant \text{const.}[(|x^0 - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\alpha/2})|x - \xi|^2 \\ &\qquad + |\xi - \xi'||x - \xi|] \\ &\quad \leqslant \text{const.}[(|x - \xi|^\alpha + |t - \tau|^{\alpha/2})|x - \xi|^2 \\ &\qquad + |x - \xi|^{2+\lambda}]. \end{aligned}$$

利用这些不等式我们推出

$$\left| \frac{|x - \xi| \cos(N_{x^0}, \overrightarrow{x\xi})}{2(t - \tau)^{1+n/2}} \exp\left[-\frac{\vartheta^{\xi,\tau}(x, \xi)}{4(t - \tau)} \right] \right.$$

$$- \frac{|x-\xi'|\cos(N_{x^0}, \overrightarrow{x\xi'})}{2(t-\tau)^{1+n/2}} \exp\left[-\frac{\vartheta^{x^0,t}(x,\xi')}{4(t-\tau)}\right]\Bigg|$$

$$\leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu-\beta}} \qquad (\beta = \min(\alpha, \lambda)).$$

因此，

$$(2.35) \qquad |I_{\delta_1}(x, t) - I'_{\delta_1}(x, t)|$$

$$\leqslant \text{const.} \int_0^t \int_{S_{\delta_1}} \frac{1}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu-\beta}} dS_\xi \, d\tau$$

$$+ \text{l.u.b.} \left| \frac{C(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)}{\cos\gamma(\xi)} - C(x^0, \tau)\varphi(x^0, \tau) \right|$$

$$\times \left| \int_0^t \int_{S_{\delta_1}} \frac{|x-\xi'|\cos(N_{x^0}, \overrightarrow{x\xi})}{2(t-\tau)^{1+n/2}} \right.$$

$$\left. \times \exp\left[-\frac{\vartheta^{x^0,t}(x,\xi')}{4(t-\tau)}\right] dS_{\xi'} \, d\tau \right|,$$

其中 $\gamma(\xi)$ 是法线 N_{x^0} 和 N_ξ 之间的夹角．(2.35)右边第一个积分是绝对收敛的，而且当 δ_1 充分小时，可以使它任意小．(2.35)右边第二个积分是有界的，且与 δ_1 无关，因为当 $\delta = \delta_1$ 且

$$C(x^0, \tau)\varphi(x^0, \tau) \equiv 1$$

时，它与(已证明为有界的) $I'_\delta(x, t)$重合．因为 C, φ 都是连续的，而当 $\delta_1 \to 0$ 时 $\cos\gamma(\xi) \to 1$，所以当 $\delta_1 \to 0$ 时第二个积分前面的因子趋于零．(2.34)证明完毕．

因为 $I_{\delta_1}(x^0, t)$的被积函数不超过 $|F_0(x^0, t; \xi, \tau)|$ 的常数倍，所以利用(2.16)，当 δ_1 充分小时，有

$$(2.36) \qquad |I_{\delta_1}(x^0, t)| < \varepsilon.$$

因为在 $\bar{I}_{\delta_1}(x, t)$, $\bar{I}_{\delta_1}(x^0, t)$, $\bar{I}'_{\delta_1}(x, t)$的被积函数中，$|x-\xi|$, $|x^0-\xi|$, $|x-\xi'|$ 分别都不为零但有界，如果现在固定 δ_1，又因当 $x \to x^0$ 时 $\cos(N_{x^0}, \overrightarrow{x\xi'}) \to 0$，所以当 x 充分靠近 x^0 时有

$$(2.37) \quad |\bar{I}_{\delta_1}(x, t) - \bar{I}_{\delta_1}(x^0, t)| < \varepsilon, \qquad |\bar{I}'_{\delta_1}(x, t)| < \varepsilon.$$

综合(2.37)，(2.36)，(2.34)和(2.33)，(2.32)证明完毕．同时

完成了当 x 沿法线 N_{x^0} 趋于 x^0 时(2.10)的证明.

现在考虑 $x \in K$ 而逼近于 x^0 的一般情形. 设 $\bar{x}$ 为到 S 上的 x 最近的点. 我们首先估计

$$(2.38)\qquad \frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu(x^0,t)}-\frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu(\bar{x},t)} =\sum_{i,j=1}^{n}[a_{ij}(x^0,t)\cos(N_{x^0},x_j)-a_{ij}(\bar{x},t)\cos(N_{\bar{x}},x_j)] \times\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_i}.$$

据(1.5), (1.6), 因为 μ 为任何小于 1 的正数, 且 $|x-\bar{x}|\leqslant|x-\xi|$, 所以对于任何 $\varepsilon>0$, 有

$$(2.39)\qquad \left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial x_i}\right|\leqslant \text{const.}\int_S\frac{dS_\xi}{|x-\xi|^{n+1-2\mu}} \leqslant\frac{\text{const.}}{|x-\bar{x}|^{\varepsilon}}\int_S\frac{dS_\xi}{|x-\xi|^{n+1-2\mu-\varepsilon}}\leqslant\frac{\text{const}}{|x-\bar{x}|^{\varepsilon}}.$$

因为 N_{x^0} 在 S 上 Hölder 连续 (指数为 λ), 所以(2.38)右边括号里的式子就不超过 $0(|x^0-\bar{x}|^{\beta})$. 因此, 如果把 (2.39) 中的 ε 取得小于 β, 则当 $x\to x^0$ 时有

$$(2.40)\qquad \left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu(x^0,t)}-\frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu(\bar{x},t)}\right|\leqslant \text{const.}\frac{|x^0-\bar{x}|^{\beta}}{|x-\bar{x}|^{\varepsilon}}\to 0,$$

这里我们已利用了 $x\in K$, 它意味着

$$|x^0-\bar{x}|\leqslant \text{const.}|x-\bar{x}|.$$

另一方面, 当 $|x-\bar{x}|<\delta$ 时我们已经证明

$$\left|\frac{\partial U(x,t)}{\partial \nu(\bar{x},t)}+\frac{1}{2}\varphi(\bar{x},t) -\int_0^t\int_S\frac{\partial \Gamma(\bar{x},t;\xi,\tau)}{\partial \nu(\bar{x},t)}\varphi(\xi,\tau)dS_\xi\, d\tau\right|<\varepsilon,$$

从证明得知可取 δ 与 $\bar{x}$ 无关. 因为当 $\bar{x}\to x^0$ 时 $\varphi(\bar{x},t)\to\varphi(x^0,t)$, 所以我们如能证得当 $\bar{x}\to x^0$ 时积分

$$M(\bar{x},t)=\int_0^t\int_S\frac{\partial \Gamma(\bar{x},t;\xi,\tau)}{\partial \nu(\bar{x},t)}\varphi(\xi,\tau)dS_\xi\, d\tau$$

收敛于 $M(x^0, t)$，就能证明 (2.10)．不过，通过利用不等式(2.12)和类似于证明第一章第 3 节引理 1 时所用的那些论证，我们就能推出 $M(\bar{x}, t)$ 的连续性.

3. 第二初值边值问题的解

在这一节我们要用第 2 节定理 1 来解第二初值边值问题．对于由(1.1)定义的 Lu 和在 $S\times[0,T]$ 上给定的连续函数 $\beta(x,t)$，目前的问题是寻求

(3.1) $Lu(x,t)=f(x,t)$ （在 $D\times(0,T]$ 内）

(3.2) $u(x,0)=\phi(x)$ （在 $\bar{D}$ 上）

(3.3) $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial\nu(x,t)}+\beta(x,t)u(x,t)=g(x,t)$ （在 $S\times(0,T]$ 上）

的解 u，其中 f、ϕ、g 为任意给定的函数，而(3.3)中的补法线导数由下式定义

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu(x,t)}=\lim_{\substack{y\to x\\ y\in K}}\frac{\partial u(y,t)}{\partial\nu(x,t)}, \tag{3.4}$$

其中 K 是以 x 为顶点且含于 $D+\{x\}$ 内的任何有限闭锥． 定义(3.4)比(2.5.8)中的定义所受限制多些.

定理 2 设 L 满足 (A_1)、(A_2)，且 S 属于 $C^{1+\lambda}$．如果 f 关于 x Hölder 连续（指数为 α），在 $\Omega=\bar{D}\times[0,T]$ 上是一致的，如果 ϕ 在 $\bar{D}$ 上连续，而且在 D 的边界 ∂D 的某个 D 邻域内为零，如果 g 在 $S\times[0,T]$ 上连续，则第二初值边值问题(3.1)—(3.3)存在唯一解.

证明　首先证明解 $u(x,t)$ 的存在性．我们来求如下形式的解

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\int_0^t\int_S\Gamma(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)dS_\xi\,d\tau\\&+\int_D\Gamma(x,t;\xi,0)\phi(\xi)d\xi\\&-\int_0^t\int_D\Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau,\end{aligned}\tag{3.5}$$

其中 φ 是待定的函数。

在 $S\times(0,T]$ 上考虑函数

$$(3.6)\quad F(x,t)=\int_D \frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,0)}{\partial\nu(x,t)}\phi(\xi)d\xi - \int_0^t\int_D \frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu(x,t)} f(\xi,\tau)d\xi\, d\tau + \beta(x,t)\int_D \Gamma(x,t:\xi,0)\phi(\xi)d\xi - \beta(x,t)\int_0^t\int_D \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau - g(x,t).$$

利用 (1.4)—(1.6) 我们得到 $F(x,t)$ 为满足

$$(3.7)\quad |F(x,t)|\leqslant \text{const.}$$

的连续函数.

如果 $\varphi(x,t)$ 是 $S\times[0,T]$ 上的连续函数，则利用第 2 节定理 1 并由 F 的定义，我们立即可知，边界条件(3.3)化为条件

$$(3.8)\quad \varphi(x,t)=2\int_0^t\int_S\left[\frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu(x,t)}+\beta(x,t)\Gamma(x,t;\xi,\tau)\right] \times\varphi(\xi,\tau)dS_\xi\, d\tau + 2F(x,t).$$

令

$$M(x,t;\xi,\tau)=2\frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu(x,t)}+2\beta(x,t)\Gamma(x,t;\xi,\tau)$$

并利用(1.4),(2.12),我们得到

$$(3.9)\quad |M(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{\text{const.}}{(t-\tau)^\mu}\cdot\frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu-\beta}}.$$

容易证明，积分方程(3.8)存在如下形式表示的连续有界解 φ:

$$(3.10)\quad \varphi(x,t)=2F(x,t)+2\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^t\int_S M_\nu(x,t;\xi,\tau) \times F(\xi,\tau)dS_\xi\, d\tau,$$

其中 $M_1=M$，而

$$M_{\nu+1}(x,t;\xi,\tau)=\int_0^t\int_S M(x,t;y,\sigma)M_\nu(y,\sigma;\xi,\tau)dS_y\, d\sigma.$$

让我们来证实 (3.10) 右边那个级数的收敛性. 只要利用 (3.9) 和第 2 节引理 1，通过类似于第一章第 4 节中与积分方程 (1.4.1) 有关的计算,就可推出(3.10)右边级数的收敛性.

证明了 u 满足 (3.3) 之后，我们再来证明(3.1)和(3.2). 从第一章第 5 节定理 9 和 $L\Gamma=0$,即可推出 (3.1). 至于 (3.2)，利用 (1.4) 可知，对所有的 $x\in\overline{D}$，(3.5) 右边第一个和第三个积分当 $t\to 0$ 时都趋于零. 由基本解的性质 (1.1.7)，因为第二个积分收敛于 $\phi(x)$，于是推出(3.2).

从下面更一般的事实可推出唯一性的证明

引理 2 如果 u 是 (3.1)—(3.3) 的解，而且 (A_1)，(A_2) 成立，$S\in C^{1+\lambda}$，那么对所有的 $(x, t)\in\Omega$，有

$$|u(x, t)|\leqslant K(\underset{\Omega}{\mathrm{l.u.b.}}|f|+\underset{S\times[0,T]}{\mathrm{l.u.b.}}|g|+\underset{D}{\mathrm{l.u.b.}}|\phi|) \tag{3.11}$$

其中K是仅依赖于 L，β，Ω 的常数.

证明 由用于 $u=v-1$ 的定理 2 的存在性证明，存在满足下列条件的函数 $v(x, t)$:

$$Lv(x, t)=-1 \quad (\text{在 } D\times(0, T]\text{内}),$$

$$v(x, 0)=1 \quad (\text{在 } \overline{D}\text{ 上}),$$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial\nu(x, t)}+\beta(x, t)v(x, t)=-1 \quad (\text{在 } S\times(0, T]\text{上}).$$

把第二章第 6 节定理 17 应用于函数 u 和 $\pm Av$，我们就得到$|u(x, t)|\leqslant Av(x, t)$,由这个不等式即可推出 (3.11),其中

$$A=\mathrm{l.u.b.}|f|+\mathrm{l.u.b.}|g|+\mathrm{l.u.b.}|\phi|.$$

现在我们考虑省略在 ∂D 的某个D邻域中假定 $\phi=0$ 的情形. 如果对定理 2 不添加新的假定,则代替 (3.7)，有

$$|F(x, t)|\leqslant\frac{\text{const.}}{t^{\varepsilon}} \qquad \left(\frac{1}{2}<\varepsilon<1\right) \tag{3.12}$$

而且从 (3.10),我们得到

$$|\varphi(x, t)|\leqslant\frac{\text{const.}}{t^{\varepsilon}} \qquad \left(\frac{1}{2}<\varepsilon<1\right). \tag{3.13}$$

现在注意到，即使不假定 $\varphi(x, t)$ 为有界，但假定φ满足

(3.13) 也可应用第 2 节定理 1. 事实上，把单层位势分成两部分 $\int_0^\delta\int_S + \int_\delta^t\int_S$ 就可推出这一点；对于 $x\in\overline{D}$, $t>\delta$ 第一个积分显然是连续可微的，而对第 2 节定理 1 的证明稍加修改就可应用于第 2 个积分(如果 $t>\delta$). 于是我们断定，如果积分方程(3.8)有连续解 $\varphi(x,t)$, $(x\in S, 0<t\leqslant T)$，并且这个解满足(3.13)，则 $u(x,t)$ 满足边界条件 (3.3). 因此，当 φ 和 u 分别由 (3.10) 和 (3.5) 定义时，则 u 满足 (3.3).

$u(x,t)$ 也满足(3.1)，并且

$$u(x,0)=\psi(x)\qquad (x\in D). \tag{3.14}$$

我们总结如下:

推论 1 如果在定理 2 中我们取消 ψ 在 ∂D 的某个 D 邻域内为零的假定，则(3.1)，(3.14)，(3.3)的解存在.

注意，我们并没有断言这个解在 Ω 内连续甚至有界，即它在 $\partial D\cap\{t=0\}$ 近旁可以是无界的. 在对 ψ 和 a_{ij} 作了某些补充假定后，我们可以断定这个解是 Ω 内的连续函数，即:

推论 2 倘若在定理 2 中我们省略了在 ∂D 的某个 D 邻域内 $\psi=0$ 的假定，而代之以假定在 ∂D 的某个邻域 D' 内函数 $\psi(x)$ 和 $a_{ij}(x,0)$ 有定义，而且是连续可微的，则定理 2 的论断仍为真.

证明　我们象在定理 1 的证明中那样进行，但以

$$A(x,t)=\int_{D^*}\Gamma(x,t;\xi,0)\psi(\xi)d\xi$$

来代替(3.5)右边的第二个积分. 其中 $D^*\supset\overline{D}$, $\overline{D}^*\subset D+D'$. 如果我们能证明对于某个 $\varepsilon<\frac{1}{2}$ 有

$$|D_xA(x,t)|\leqslant\frac{\text{const.}}{t^\varepsilon}, \tag{3.15}$$

则 (3.12), (3.13) 对某个 $\varepsilon<\frac{1}{2}$ 成立，于是把定理 2 及其第一个推论的证明综合起来，就得出推论 2 的证明.

只要对函数

$$\widetilde{A}(x, t) = \int_{D_0} \Gamma(x, t; \xi, 0)\phi(\xi)d\xi$$

证明(3.15)就够了,其中 D_0 是 ∂D 含于 D' 中的某个邻域. 首先考虑热传导方程的情形. 于是

$$D_x\widetilde{A}(x, t) = \int_{D_0} D_x\Gamma(x, t; \xi, 0)\phi(\xi)d\xi$$

$$= -\int_{D_0} [D_\xi\Gamma(x, t; \xi, 0)]\phi(\xi)d\xi$$

$$= \int_{D_0} \Gamma(x, t; \xi, 0)D_\xi\phi(\xi)d\xi + \text{边界积分}$$

于是推出 $\varepsilon = 0$ 的 (3.15).

对于一般情形, 我们写成 $\Gamma = Z + \int Z\Phi$ (见(1.2.8))并相应地分解 $\widetilde{A}$.(利用 $a_{ij}(x, 0)$ 的可微性) 第一个积分可类似于热传导方程的情形来处理. 第二个积分的导数(利用(1.5), (1.4.8))可直接估计,所得到的界是 const.$/t^\varepsilon$ $(\varepsilon > (1-\alpha)/2)$.

我们证明一条类似于引理 2 的有用引理来结束本节, 这条引理关于 β 的假定多些,关于 L, S 的假定少些. 它类似于第二章第 3 节的 (d).

引理 3 设 u 是(3.1)—(3.3)的解,假定 L 在 $\Omega = \overline{D} \times [0, T]$ 上是抛物的,且有连续的系数, $\beta(x, t) \leqslant -\mu_0 < 0$, 且 S 是属于 C' 类的,则

$$(3.16) \quad |u(x, t)| \leqslant K(\underset{\Omega}{\text{l.u.b.}}|f| + \underset{S\times[0,T]}{\text{l.u.b.}}|g| + \underset{D}{\text{l.u.b.}}|\phi|),$$

其中 K 是仅依赖于 L, β 和 Ω 的常数.

证明 不失一般性, 我们可以假定 $c(x, t) \leqslant 0$. 考虑函数(比较(2.3.11))

$$h(x) = A - \exp[\lambda(x_1 - x_1^0)] \qquad (A > 1).$$

取 λ 充分大,使 $Lh < 0$. 其次取 A 充分大,使在 S 上有

$$\frac{\partial h(x)}{\partial \nu(x, t)} + \beta(x, t)h(x) \leqslant \lambda\exp[\lambda(x - x_1^0)]$$

$$-\mu_0\{A-\exp[\lambda(x_1-x_1^0)]\}<0.$$

现在我们可以把第二章第 6 节定理 17 应用于 $\pm u$ 和

$$w(x)=A'(\text{l.u.b.}|f|+\text{l.u.b.}|g|+\text{l.u.b.}|\phi|)h(x),$$

其中 A' 为某个仅依赖于 h 的常数，因而断定 $|u(x,t)|\leqslant w(x)$，由此推出 (3.16).

4. 单层位势的进一步结果

我们不加证明地陈述单层位势的若干补充结果（在定理 1 的假定下）.

定理 3 由 (2.1) 定义的函数 $U(x,t)$ 在 $\Omega=\bar{D}\times[0,T]$ 上对于任何 $0<\vartheta<1$ 是 Hölder 连续的（指数为 ϑ），也就是说对于所有的 $(x,t)\in\Omega$, $(x^0,t^0)\in\Omega$ 有

$$\frac{|U(x,t)-U(x^0,t^0)|}{|x-x^0|^\vartheta+|t-t^0|^{\vartheta/2}}\leqslant\text{const.}<\infty.$$

定理 4 函数

$$H(x,t)=\int_0^t\int_S\frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial\nu(x,t)}\varphi(\xi,\tau)dS_\xi\,d\tau$$

在 $S\times[0,T]$ 上 Hölder 连续，其指数为小于 $2\beta/3$ 的任何数，其中 $\beta=\min(\alpha,\lambda)$.

定理 5 如果 $\varphi(x,t)$ 关于 x 是 Hölder 连续的，关于 $x\in S$, $\varepsilon\leqslant t\leqslant T$ 是一致的（ε 为任意正数），则 $\partial U(x,t)/\partial x_i(i=1,\cdots,n)$ 在 $D\times[\varepsilon,T]$ 内一致连续（ε 为任意正数）.

我们陈述有关体位势的结果.

定理 6 如果 $f(x,t)$ 是 Ω 内的连续函数，则体位势

$$M(x,t)=\int_0^t\int_D\Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau$$

以及它的一阶导数 $\partial M/\partial x_i$ 在 Ω 内 Hölder 连续（指数为 ϑ），ϑ 为小于 1 的任意正数.

定理 3，4，6 的证明都基于研究位势性质时所用的那种考虑方法（见第一章和本章第 2 节），其细节见 [98]. 定理 5 的证明（其细节见 [100]）稍微难些，在其证明中还要证明：如果 $x^0\in S$,

而 D_{x^0} 是在 x^0 处与 S 相切方向的导数，则

$$(4.1)\qquad \lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in D}} D_{x^0}U(x,t)=\int_0^t\int_S D_{x^0}\Gamma(x^0,t;\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)dS_\xi\,d\tau.$$

(4.1) 右边的广义积分一般说来并不是绝对可积的；它在 Cauchy 主值意义下收敛.

(4.1) 表明，切向导数在穿过边界 S 时连续地变化，这和单层位势的补法向导数的跳跃大不相同.

从定理 6 推出，(3.6)所定义的函数 $F(x,t)$ 在 $S\times(0,T]$ 上 Hölder 连续．利用定理 3，4，对于(3.10)的级数 $\Sigma M_\nu(x,t;\xi,\tau)$ 我们可以建立 Hölder 条件．由(3.10)可以导出 φ 的 Hölder 连续性．因此，我们应用定理 5 可推出 (3.5) 右边的第一个积分在 $\bar{D}\times[\varepsilon,T]$ 上(ε 为任意正数)对 x 可微，且导数一致连续．据定理 6 对于第三个积分和第二个积分也有同样的结论．因而我们得出下面的推论.

推论 定理 2 中的解 u 的导数 $\partial u/\partial x_i$ 在 $D\times(\varepsilon,T]$ 上是一致连续的 (ε 为任意正数).

5. 积分方程

线性积分方程的理论发展得很完善，它的基本结果早已为人们所熟悉，因此人们自然地试图把微分方程的问题归结为积分方程的问题．在第一章第 4 节以及在本章(第 3 节)我们都把解的存在性问题归结为求解 Volterra 型积分方程的问题．在下一节以及往后的一些章节中我们将会遇到更一般的积分方程．在这一节我们将叙述某些今后需要的有关积分方程的主要结果.

设 x 和 y 在 R^n 的有界（而且可测的）闭集 G 上变化，而设 $K(x,y)$ 为定义在 $G\times G$ 上的连续复值函数．给定了任何连续复值函数 $f(x)$ 和任何复数 λ，考虑方程

$$(5.1)\qquad \varphi(x)-\lambda\int_G K(x,y)\varphi(y)dy=f(x).$$

关于 φ 的每一形如(5.1)的方程称为(第一种) Fredholm 型的线性积分方程，或者简称为积分方程.（如果在左边不出现 $\varphi(x)$，

则称之为第二种方程) $K(x, y)$ 称为积分方程的核. 在下文中如无相反的明确说明,我们仅考虑连续解.

我们一起考虑(5.1)及其相应的齐次方程

$$\varphi(x) - \lambda \int_G K(x, y)\varphi(y)dy = 0. \tag{5.2}$$

如果对于某个 λ, (5.2) 的非平凡解存在(即 $\varphi \not\equiv 0$ 的解),则 λ 称为 (5.2) 的特征值,或者称为K的特征值,而称这个解 φ 为特征函数. 由对应于某个 λ 的所有特征函数组成的线性空间称为对应于 λ 的特征空间 (eigenspace), 其维数记作 $N(\lambda)$.

连同 (5.1), (5.2), 我们考虑积分方程

$$\psi(x) - \bar{\lambda} \int_G \overline{K(y, x)}\psi(y)dy = g(x), \tag{5.3}$$

$$\psi(x) - \bar{\lambda} \int_G \overline{K(y, x)}\psi(y)dy = 0, \tag{5.4}$$

其核 $K^*(x, y) \equiv \overline{K(y, x)}$ 称为核 $K(x, y)$ 的伴随核. 我们称 (5.3), (5.4) 分别为 (5.1), (5.2) 的伴随方程.

Fredholm 互斥性内容如下:

(a) 如果 λ 不是(5.2)的特征值, 那么 $\bar{\lambda}$ 不是(5.4)的特征值, 并且对于每一个连续函数 f 和 g, (5.1) 和 (5.3) 分别存在唯一的解 φ, ψ.

(b) 如果 λ 是 (5.2) 的特征值,则 $\bar{\lambda}$ 是 (5.4) 的特征值. 维数 $N(\lambda)$是有限的,并且等于(5.4)的解的特征空间的维数 $N^*(\bar{\lambda})$. 最后,对于任何连续函数 $f(g)$,当且仅当 $f(g)$和 (5.4)((5.2)) 的所有特征函数正交时,即对所有满足 (5.4) ((5.2)) 的 ψ 都有

$$\int_G f(x)\overline{\psi(x)}dx = 0$$

时, (5.1) ((5.3)) 才有解存在.

显然,如果 λ 是一个特征值, 且(5.1)有解,那么这个解不是唯一的. 两个解的差是一个特征函数.

从 (a), (b) 我们推出下面有用的结果.

(c) 如果齐次方程没有非平凡解, 则非齐次方程对于任何连

续的右端有唯一解.

往后我们需要 (a), (b) 的以下推广:

(d) 如果当 $x \in G$, $y \in G$, $x \neq y$ 时, $K(x, y)$ 连续,而且对某个 $\varepsilon > 0$ 有

$$|K(x, y)| \leqslant \frac{\text{const.}}{|x-y|^{n-\varepsilon}} \tag{5.5}$$

则 Fredholm 互斥性 (即 (a), (b)) 仍然有效.

当 $x \to y$ 时核 $K(x, y)$ 变为无界的，称之为奇异核. 满足 (5.5) 的奇异核称为可积的.

(e) 欧氏测度 dx 由一般测度 $d\mu(x)$ 代替，前面所有的结果仍为真. 若 G 是在连续可微的 n 维流形上的紧区域，则当以 G 的曲面元素代替 dx 时, (a)—(d) 仍然有效.

(f) 如果 $K(x,y)$ 在 $G \times G$ 内分段连续,且 f, φ 和 g, ψ 也是分段连续,则前面所有的结果仍为真.

(g) 存在一个正数 λ_0，使得每个 $\lambda(|\lambda| < \lambda_0)$ 不是特征值，而且 (5.1) 的解可以表为如下形式

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_G R(x, y; \lambda) f(y) dy, \tag{5.6}$$

此处

$$R(x, y; \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, y) \tag{5.7}$$

且 $K_1(x, y) = K(x, y)$,

$$K_{j+1}(x, y) = \int_G K_j(x, \xi) K(\xi, y) d\xi.$$

函数 $R(x, y; \lambda)$ 称为 K 的预解式.

如果 $G = \{(z, t); z \in B_t, a \leqslant t \leqslant b\}$，其中 B_t 是一致有界的、闭的(可测)区域,则可把(5.1)写成如下形式

$$\varphi(z, t) - \lambda \int_a^b \int_{B_\tau} K(z, t; \zeta, \tau) \varphi(\zeta, \tau) d\zeta d\tau = f(z, t). \tag{5.8}$$

假定当 $\tau > t$ 时

$$K(z, t; \xi, \tau) = 0, \tag{5.9}$$

则(5.8)化为

$$(5.10)\quad \varphi(z,t)-\lambda\int_a^t\int_{B_\tau}K(z,t;\zeta,\tau)\varphi(\zeta,\tau)d\zeta d\tau=f(z,t).$$

我们说这个积分方程是 Volterra 型的. 如果由(5.9)扩张 K,则可以把(5.10)的任何一个 Volterra 型方程写成(5.8)那样的 Fredholm 型方程. 因为扩张后的K仅在 $t=\tau$ 有第一种间断,所以 (a)—(g) 的所有结果对于(5.10)仍为真. 此外:

(h) Volterra 型方程没有特征值,于是可以把解表为(5.6),(5.7) 的形式.

6. 椭圆型方程

设 $D\subset R^n$ 为有界区域,而

$$(6.1)\qquad Lu\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i dx_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u$$

为D内的椭圆算子. 对任何 $y\in D$,考虑常系数椭圆算子

$$(6.2)'\qquad L_0u\equiv\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}.$$

设 $(a^{ij}(y))$ 是 $(a_{ij}(y))$ 的逆矩阵,并引进

(6.3)

$$\Gamma_0(x,y)=\begin{cases}\dfrac{[\Sigma a^{ij}(y)(x_i-y_i)(x_j-y_j)]^{(2-n)/2}}{(n-2)\omega_n[\det(a^{ij}(y))]^{1/2}} & \text{当 } n>2 \text{ 时},\\[2ex] \dfrac{\log[\Sigma a^{ij}(y)(x_i-y_i)(x_j-y_j)]^{-1/2}}{2\pi[\det(a^{ij}(y))]^{1/2}} & \text{当 } n=2 \text{ 时}.\end{cases}$$

容易验证,$L_0\Gamma_0(x,y)=0$,并且

$$\Gamma_0(x,y)=0(|x-y|^{2-n}),$$
$$D_x\Gamma_0(x,y)=0(|x-y|^{1-n}),$$
$$D_x^2\Gamma_0(x,y)=0(|x-y|^{-n}).$$

定义 设函数 $\Gamma(x,y)$ 对于 $\bar{D}$ 上所有的 $x,y(x\neq y)$ 都有定义,而且对于某个 $\lambda>0$ 和D内所有的 $x,y(x\neq y)$ 满足

$$(6.4)\qquad D_x^i[\Gamma(x,y)-\Gamma_0(x,y)]=0(|x-y|^{2-i-n+\lambda})$$
$$(i=0,1,2)$$

的函数 $\Gamma(x, y)$ 称为 $Lu=0$ 的基本解，如果对于每一个 $y\in D$，Γ 作为 x 的函数，满足方程

$$LΓ(x, y)=0 \qquad (x\in D, x\neq y). \tag{6.5}$$

另外，如果对于所有的 $y\in D$ 和 $x\in S$（其中 S 为 D 的边界），$\Gamma(x, y)=0$，则称 Γ 为 Green 函数．显然，$\Gamma_0(x, y)$ 是 $L_0u=0$ 的基本解．

假定 u 在 $\bar{D}$ 上光滑，$v=\Gamma^*(x, y)$在 $\bar{D}$ 上光滑（Γ^* 为 $Lv=0$ 的伴随方程 $L^*v=0$ 的基本解），边界 S 也是光滑的，积分椭圆算子的 Green 恒等式 (1.8.4)，我们立即得到

$$\begin{aligned}u(y)=&-\int_D \Gamma^*(x, y)Lu(x)dx\\&-\sum_{i=1}^n\int_S\left\{\sum_{j=1}^n\left[\Gamma^*(x, y)a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right.\right.\\&\left.-u(x)a_{ij}(x)\frac{\partial\Gamma^*(x, y)}{\partial x_j}-u(x)\Gamma^*(x, y)\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}\right]\\&\left.+b_i(x)\Gamma^*(x, y)u(x)\right\}\cos(N_x, x_i)dS_x,\end{aligned} \tag{6.6}$$

其中 N_x 是 S 在 x 处的内法线．这是一个有用的表示公式．

在 L 是 $\bar{D}$ 上的椭圆算子，其系数在 $\bar{D}$ 上 Hölder 连续的假定下，利用拟基本解方法，可以构造如下形式的基本解

$$\begin{aligned}\Gamma(x, y)=\Gamma_0(x, y)&+\int_D\Gamma_0(x, \xi)\Phi(\xi, y)d\xi\\&+\sum_i{}'\alpha_i(x)\beta_i(y).\end{aligned} \tag{6.7}$$

在构造 Γ 的过程中，我们引进体位势

$$V(x)=\int_D\Gamma_0(x, \xi)f(\xi)d\xi.$$

可以证明，如果 f 为 Hölder 连续，则 $LV(x)=-f(x)$．对 Φ 的积分方程是 Frecholm 型的．我们选取函数 α_i, β_i 以使在遇到互斥性 (b)（见第 5 节）时，保证对 Φ 的积分方程仍然有解．

单层位势是如下形式的函数

(6.8) $$U(x)=\int_S \Gamma(x,y)\varphi(y)dS_y,$$

如果 $S\in c^{1+\lambda}$，那么可以证明：对于任何 $x^0\in S$

(6.9) $$\lim_{\substack{x\to x^0\\ x\in K}}\frac{\partial U(x^0)}{\partial \nu(x^0)}=-\frac{1}{2}\varphi(x^0)+\int_S \frac{\partial \Gamma(x^0,y)}{\partial \nu(x^0)}\varphi(y)dS_y,$$

其中$\nu(x^0)$为在 x^0 处的内补法线，K 是以 x^0 为顶点的含于 $D+\{x^0\}$ 内的任何有限闭锥. 我们可以利用这一跳跃关系把 Neumann 问题归结为求解如下形式的积分方程的问题

(6.10) $$\varphi(x)=2\int_S\left[\frac{\partial \Gamma(x,y)}{\partial \nu(x)}+\beta(x)\Gamma(x,y)\right]\varphi(y)dS_y + F(x).$$

这个方程是 Fredholm 型的. 从第 5 节推出，如果 $F=0$ 就意味着 $\varphi=0$，于是对任何连续的 F，(6.10)的唯一连续解φ存在. 因而，如果 $\beta\leqslant 0$，$\beta\not\equiv 0$，$c\leqslant 0$，则由第二章第 7 节末了所提到的唯一性结果推出：如果 $S\in c^2$，则(6.10)存在唯一解. 此外，如果对所有的 x，$\beta(x)<0$，那么只需假定 $S\in c^{1+\lambda}$ 就够了. 我们断定不论是哪一种情况，Neumann 问题

(6.11) $$Lu=f \quad \text{在}D\text{中},$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+\beta u=g \quad \text{在}S\text{上}$$

存在唯一解. 这个解在 D 内有一致连续的一阶导数(比较第 4 节的推论)

我们证明一条和第 3 节引理 3 相类似的有用引理来结束本节.

引理 4 设 L 是在 $\overline{D}$ 上有连续系数的椭圆算子，$c(x)\leqslant 0$，$\beta(x)\leqslant-\mu_0<0$，$S\in c'$. 如果 u 是(6.11)的解，则

(6.12) $$|u(x)|\leqslant K(\operatorname*{l.u.b.}_D|f|+\operatorname*{l.u.b.}_S|g|),$$

其中 K 为仅依赖于 L，D，β 的常数.

关于 Neumann 问题的解，不等式(6.12)和不等式(2.7.5)类

似.

证明　　设 $h(x)$ 是第 3 节引理 3 证明中所引进的那个函数，并设

$$v(x) = A'(\text{l.u.b.}|f| + \text{l.u.b.}|g|)h(x) \qquad (A' > 0).$$

对于某个仅依赖于 h 的 A'，函数 $\tilde{u} = v \pm u$ 在 D 内满足 $L\tilde{u} < 0$，在 S 上满足 $\partial\tilde{u}/\partial\nu + \beta\tilde{u} < 0$. 如果 $\tilde{u}$ 在 $\overline{D}$ 的某点处为负，则 $\tilde{u}$ 在某点 $y \in S$ 处取其负的极小值. 由此 $\partial\tilde{u}/\partial\nu \geqslant 0$，在 y 处 $\beta\tilde{u} > 0$，我们就得到矛盾. 因此，在 $\overline{D}$ 上 $\tilde{u} \geqslant 0$，即 $|u| \leqslant v$，证明完毕.

问　　题

1. 试证明第 2 节引理 1.

[提示: 对于充分小的 $|x-\xi|$，比较在 S_δ 上的积分和在 S'_δ 上的积分.]

2. 假定(A_1)，(A_2)成立，$S \in C^{1+\lambda}$. 通过第三章第 7 节引理 1，把 L 扩张到 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上，并象第一章那样构造 Γ. 设$(\xi, \tau) \in D \times [0, 0)$. 试证明: 对于$\sigma > \tau$，存在连续函数 $\varphi(\eta, \sigma; \xi, \tau)$，它满足

$$|\varphi(\eta, \sigma; \xi, \tau)| \leqslant \text{const.}(\sigma-\tau)^{-\mu}|\eta-\xi|^{-n-1+2\mu+\beta}(\beta = \min(\alpha, \lambda)),$$

并使得函数

$$H(x; t; \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_S \Gamma(x, t; \eta, \sigma)\varphi(\eta, \vartheta; \xi, \tau) dS_\eta\, d\sigma$$

满足条件

$$\frac{\partial H(x, t; \xi, \tau)}{\partial\nu(x, t)} - H(x, t; \xi, \tau) = \frac{\partial\Gamma(x, t; \xi, \tau)}{\partial\nu(x, t)} - \Gamma(x, t; \xi, \tau).$$

其中 $\partial/\partial\nu$ 由(2.9)定义，N_{x^0} 为 S 在 x^0 处的外法线.

[提示: 利用定理 1，(1.4)、(2.12) 和引理 1.]

3. 设 L 是在带形区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 中有连续系数的抛物算子. 证明: 如果在 Ω (关于 $0 \leqslant t \leqslant T$)的余集 $\hat{\Omega}$ 内 $Lu = 0$，在 D(关于 R^n)的余集 $\overline{D}$ 上 $u(x, 0) = 0$，在 $S \times (0, T]$ 上 $\partial u/\partial\nu - u = 0$，如当 $|x| \to \infty$ 时 $\underset{0 \leqslant t \leqslant T}{\text{l.u.b}}|u(x, t)| \to 0$，则在 $\hat{\Omega}$ 中 $u \equiv 0$ ($\partial/\partial\nu$ 的定义，见问题 2).

[提示: 利用极大值原理.]

4. 在问题 2 的同样假定下，证明 $G(x, t; \xi, \tau) = H(x, t; \xi, \tau) - \Gamma(x, t, \xi, \tau)$ 是 $Lu = 0$ 关于 D 的 Green 函数. (把这个结果和第三章第 7 节定理 16 比较.)

[提示：利用问题 2，3.]

5.除用 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x,t)}+\beta(x,t)u(x,t)=0$ 代替边界条件(3.7.4)外，可以类似第三章第7节 Green 函数那样来定义柱体的 Neumann 函数.

试证明 Neumann 函数的存在性.

[提示：象证明第三章第7节定理16那样进行，(代替极值原理)利用第3节引理2.]

6.设 $S\in c^3$. 试构造一个函数 $\zeta(x)$，它在 $\bar{D}$ 上两次连续可微，且对所有的 $x^0\in S$ 满足 $\partial\zeta(x^0)/\partial N_{x^0}=-1$，$\partial\zeta(x^0)/\partial T_{x^0}=0$，式中 N_{x^0} 为 S 在 x^0 处的内法向，而 T_{x^0} 是在 x^0 处与 S 相切的任何方向.

[提示：设 $\sigma(x)$ 为 x 到 S 的距离. 对于某个 $\varepsilon_0>0$，当 $\sigma(x)<\varepsilon_0$ 时，取 $\zeta(x)=(\varepsilon_0-\sigma(x))^3/3\varepsilon_0^2$，在别处，取 $\zeta(x)=0$.]

7.设 L 是 $\bar{D}\times[0,T]$ 上有连续系数的抛物算子，$S\in c^3$，并设 $\tau(x)$ 是在 S 上变化并指向 D 的内部的连续方向，试证明：如果 u 满足(3.1)，(3.2)，且在 $S\times(0,T]$ 上满足 $\partial u/\partial\tau+\beta u=g$，其中 β 为任何连续函数，则不等式(3.11)成立，式中 K 仅依赖于 L，β，Ω 和函数 τ.

[提示：比较 u 和 $v=\pm Ae^{at+b\zeta}$，其中 A，a，b 为常数，而 ζ 如问题6中所述，再利用第二章定理17.]

第 六 章

解的渐近性态

引言　设 $u(x, t)$ 为热传导方程 $u_{xx} - u_t = 0$ 在半带形区域 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t < \infty$ 内的解，假定 $u(x, 0) = f(x)(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$ $(0 < t < \infty)$. 如果 $f(x)$ 是连续可微的，并且 $f(0) = f(1) = 0$，则 $f(x)$ 可展为一致收敛的正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi x.$$

于是解 $u(x, t)$ 可以用显式表示为

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x. \tag{0.1}$$

因此，当 $t \to \infty$ 时，$u(x, t) \to 0$. 而且 $u(x, t)$ 指数地趋于零，即

$$|u(x, t)| \leqslant \text{const.} e^{-\pi^2 t}. \tag{0.2}$$

在这一章我们要证明当 $t \to \infty$ 时和第一、第二初值边值问题解的收敛性有关的定理. 我们还要导出对于解的渐近展开式. 解的定义区域不必是柱形的.

从 (0.1) 我们还看出，如果当 $t \to \infty$ 时 $u(x, t) \to 0$ 比任何指数 $e^{-\lambda t}(\lambda > 0)$ 都快，则 $u \equiv 0$. 在第 8 节我们将证明一般抛物型方程有类似的结果. 所用的方法也可用于证明"后向"抛物型方程的唯一性定理. 这样的唯一性定理将在第 7 节证明，并在第 8 节中使用它们.

1. 第一初值边值问题解的收敛性

设 D 为变量 $(x, t) = (x_1, \cdots, x_n, t)$ 的 $(n + 1)$维空间中的一个区域，它由 $t = 0$ 上的区域 B 和半空间 $0 < t < \infty$ 中的流形 S 所限定. 假定对于每个 $\tau > 0$，集合 $B_\tau = D \cap \{t = \tau\}$ 为一非

空有界区域，并令

$$D_\tau = D\cap\{0 < t < \tau\},\ S_\tau = S\cap\{0 < t \leqslant \tau\}.$$

设 C 记 x 空间中的 n 维有界区域．以 ∂C，∂B_t 分别记 C 和 B_t 的边界．

以后我们将规定 $B_t \to C$ 的意义如下：

(D_1) 当 $t \to\infty$ 时，

$$\underset{(x,t)\in B_t}{\text{l.u.b.}}\ \underset{y\in C}{\text{g.l.b.}}|x-y| \to 0,\ \underset{y\in C}{\text{l.u.b.}}\ \underset{(x,t)\in B_t}{\text{g.l.b.}}|x-y| \to 0;$$

(D_2) 在 ∂C 的点 x 和使 $(x_t, t)\in\partial B_t$ 的点 x_t 之间有一个一对一的连续对应 $x\longleftrightarrow x_t$，并且当 $t \to\infty$ 时，

$$\underset{x\in\partial C}{\text{l.u.b.}}|x_t - x| \to 0.$$

(D_1) 相当于这样的叙述：对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 A_ε，使得当 $t > A_\varepsilon$ 时，对于任何 $y \in C$ 和 B_t 中的 $(\bar{x}, t)$，存在 B_t 中的点 (x, t) 和 $\bar{y}\in C$，使得 $|x-y| < \varepsilon$，$|\bar{x}-\bar{y}| < \varepsilon$．

定义 如果对于每一 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$，$t_0 > 0$，使得当 $|x-y| < \delta$，$t > t_0$ 时，有 $|w(x, t) - v(y)| < \varepsilon$，那么我们就说，当 $x \to y$，$t\to\infty$ 时 $w(x, t) \to v(y)$（$(x, t)\in\bar{D}$，$y\in\bar{C}$）并记为

$$\lim_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} w(x, t) = v(y).$$

如果 δ 和 t_0 都与 y 无关．那么我们就说，收敛性在 $\bar{D}$ 上是**一致的**．如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在一个 t_0，使得当 $t > t_0$，$(x, t)\in\bar{D}$ 时（$t > t_0$，$(x, t)\in S$）有 $|w(x, t)| < \varepsilon$，我们就说，当 $t \to\infty$ 时，在 $\bar{D}$ (S) 内一致地 $w(x, t) \to 0$（或记为 $\lim\limits_{t\to\infty} w(x, t) = 0$）．类似的定义对于 $\limsup w(x, t)$，$\liminf w(x, t)$ 也适用．因而，如果在最后这个定义中，以 $w(x, t) < \varepsilon$ 代替 $|w(x, t)| < \varepsilon$，我们就说，在 $\bar{D}(S)$ 上一致地有 $\limsup\limits_{t\to\infty} w(x, t) \leqslant 0$．

考虑方程

$$(1.1)\qquad Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$+ C(x, t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t) \qquad (\text{在} D \text{内}),$$

(1.2) $$L_0 v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + C(x)v = f(x) \qquad (\text{在} C \text{中}),$$

其中 $u = u(x, t)$，$v = v(x)$ 满足边界条件

(1.3) $$u(x, t) = h(x, t) \qquad (\text{在 } S \text{ 上}),$$

(1.4) $$v(x) = h(x) \qquad (\text{在 } \partial C \text{ 上}).$$

我们需要下面的假定:

(A) 存在常数 $M' > 0$，使对所有的 $(x, t) \in \overline{D}$ 和所有的实矢量 ξ，有 $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant M'|\xi|^2$. L 的系数是 $\overline{D}$ 上的连续函数，它们都是有界的，即 $|a_{ij}| \leqslant M$，$|b_i| \leqslant M$，$|C| \leqslant M$.

(B) 当 $x \to y$，$t \to \infty$ 时，在 $\overline{D}$ 上一致地有 $a_{ij}(x, t) \to a_{ij}(y)$，$b_i(x, t) \to b_i(y)$，$C(x, t) \to C(y)$. 而且 $a_{ij}(x)$，$b_i(x)$，$C(x)$ 在 $\overline{C}$ 上 Hölder 连续(指数为 α).

(C) $f(x, t)$在 $\overline{D}$ 上连续，并且当 $x \to y$，$t \to \infty$ 时，在 $\overline{D}$ 上一致地 $f(x, t) \to f(y)$；此外，$f(x)$在 $\overline{C}$ 上 Hölder 连续(指数为 α).

下面我们用假定 (D_2) 的记号来叙述一个关于 h 的假定:

(E) $h(x, t)$ 在 S 上是连续的，且当 $t \to \infty$时，关于 $x \in \partial C$ 一致地有 $h(x_t, t) \to h(x)$.

注意，(E) 意即 $h(x)$ 是 ∂C 上的连续函数.

现在我们陈述有关(1.1)，(1.3)的解收敛于(1.2)，(1.4)的解的定理.

定理 1 设 u 为(1.1)，(1.3)的解，其中 f 是 $\overline{D}$ 上的连续函数，h 是 S 上的连续函数，并设 (A) 是满足的. 此外，假定区域 $B_t(0 \leqslant t < \infty)$ 在 R^n 上的投影是一致有界的，并且假定对 $\overline{D}$，S 和 $\overline{D}$ 分别一致地有

(1.5) $$\lim_{t\to\infty} f(x, t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} h(x, t) = 0, \quad \limsup_{t\to\infty} C(x, t) \leqslant 0,$$

那末在 $\overline{D}$ 上一致地有

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0. \tag{1.6}$$

定理 2　假定 (A), (B), (C), (D_1), (D_2), (E) 成立，$C(x) \leqslant 0$,且 $\partial C \in C^{3+\alpha}$. 如果 $u(x, t)$ 是(1.1),(1.3)的解,则在 $\bar{D}$ 上一致地有

$$\lim_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} u(x, t) = v(y), \tag{1.7}$$

其中 $v(x)$ 为 (1.2), (1.4) 的唯一解.

定理 1, 2 的证明将分别在第 2, 3 节中给出.

2. 定理 1 的证明

考虑函数

$$\varphi(x) = e^{\lambda R} - e^{\lambda x_1}, \tag{2.1}$$

其中 R 为对于所有的 $(x, t) \in \bar{D}$ 满足 $R \geqslant 2x_1$ 的任一正数，而 λ 是待定的正的常数. $\varphi(x)$ 在 D 内满足

$$L\varphi(x) = -a_{11}(x, t)\lambda^2 e^{\lambda x_1} - b_1(x, t)\lambda e^{\lambda x_1} + C(x, t)(e^{\lambda R} - e^{\lambda x_1}).$$

利用 (A),我们可以取 λ 充分大,使得在 D 内

$$L\varphi(x) < -2e^{\lambda x_1} + C(x, t)(e^{\lambda R} - e^{\lambda x_1}). \tag{2.2}$$

现在让 λ 固定. 从 (1.5) 中的不等式可推出，对某个充分大的 $\bar{\sigma}$, 在 $\bar{D} - D_{\bar{\sigma}}$ 中有

$$C(x, t)(e^{\lambda R} - e^{\lambda x_1}) < e^{\lambda x_1}. \tag{2.3}$$

把这个不等式代入 (2.2), 我们得到,在 $\bar{D} - D_{\bar{\sigma}}$ 内有

$$L\varphi(x) < -\delta, \tag{2.4}$$

其中 $\delta = \underset{(x,t)\in D}{\text{g.l.b.}} e^{\lambda x_1}$.

令

$$\delta_0 = \underset{(x,t)\in D}{\text{g.l.b.}}\varphi(x), \quad \delta_1 = \underset{(x,t)\in D}{\text{l.u.b.}}\varphi(x) \tag{2.5}$$

并在 $D - D_\sigma$ 内考虑函数

$$\psi(x, t) = \epsilon\frac{\varphi(x)}{\delta} + \epsilon\frac{\varphi(x)}{\delta_0} + A\frac{\varphi(x)}{\delta_0}e^{-\gamma(t-\sigma)}, \tag{2.6}$$

其中 ϵ, A, γ 为任意正的常数;且 $\sigma \geqslant \bar{\sigma}$. 据(2.4)有

$$(2.7)\qquad L\psi(x, t) < -\varepsilon - \delta\frac{\varepsilon}{\delta_0} - \delta\frac{A}{\delta_0}e^{-\gamma(t-\sigma)} + \gamma\frac{A\delta_1}{\delta_0}e^{-\gamma(t-\sigma)}.$$

取

$$(2.8)\qquad \gamma = \delta/\delta_1$$

就推出,在 $\overline{D} - D_\sigma$ 内有

$$(2.9)\qquad L\psi(x, t) < -\varepsilon.$$

显然,对于 $(x, \sigma) \in B_\sigma$,有

$$(2.10)\qquad \psi(x, \sigma) > A,$$

对于 $(x, t) \in S - S_\sigma$,有

$$(2.11)\qquad \psi(x, t) > \varepsilon.$$

现在从 (1.5) 推出,对于任何 $\varepsilon > 0$,存在 $\sigma = \sigma(\varepsilon)$,使得在 $\overline{D} - D_\sigma$ 内

$$(2.12)\qquad |f(x, t)| < \varepsilon,$$

在 $S - S_\sigma$ 上

$$(2.13)\qquad |h(x, t)| < \varepsilon.$$

我们可以假定 $\sigma(\varepsilon) \geqslant \bar{\sigma}$. 取 $A = \underset{B_\sigma}{\text{l.u.b.}}|u(x, \sigma)|$,并利用不等式 (2.9)—(2.13),我们就可以在 $D - D_\sigma$ 内把第二章第 6 节定理 16 应用于 $\pm u$ 和 ψ. 于是,我们断定,$|u(x, t)| < \psi(x, t)$,即当 $t > \sigma - \frac{1}{\gamma}\log\frac{A_1\varepsilon}{A_2}$ 时,有

$$|u(x, t)| \leqslant A_1\varepsilon + A_2e^{-\gamma(t-\sigma)} \leqslant 2A_1\varepsilon,$$

其中 A_1, A_2 是正的常数,A_1 仅依赖于 φ. 这就完成了定理 1 的证明.

从前面的证明我们还可导出以下的推论.

推论 1 如果 $t > \sigma > \bar{\sigma}$,则有

$$(2.14)\qquad |u(x, t)| \leqslant A_0\{\underset{D_t-D_\sigma}{\text{l.u.b.}}|f| + \underset{S_t-S_\sigma}{\text{l.u.b.}}|h| + [\underset{B_\sigma}{\text{l.u.b.}}|u(x, \sigma)|]e^{-\gamma(t-\sigma)}\},$$

其中 A_0 为仅依赖于 φ 的常数.

推论 2 如果用分别在 $\bar{D}$, S 和 $\bar{D}$ 中一致地有

(2.15) $\limsup_{t\to\infty}|f(x, t)| \leqslant \varepsilon$, $\limsup_{t\to\infty}|h(x, t)| \leqslant \varepsilon$,

$$\limsup_{t\to\infty} C(x, t) \leqslant 0$$

(其中 $\varepsilon > 0$) 来代替 (1.5),则在 $\bar{D}$ 上一致地有

(2.16) $$\limsup_{t\to\infty}|u(x, t)| \leqslant A_0\varepsilon,$$

其中 A_0 是仅依赖于 φ 的常数.

推论 3 如果用分别在 $\bar{D}$, S, $\bar{D}$ 中一致地有

(2.17) $\liminf_{t\to\infty} f(x, t) \geqslant -\varepsilon$, $\limsup_{t\to\infty} h(x, t) \leqslant \varepsilon$,

$\limsup_{t\to\infty}(x, t) \leqslant 0$

(其中 $\varepsilon > 0$) 来代替 (1.5),则在 $\bar{D}$ 上一致地有

(2.18) $$\limsup_{t\to\infty} u(x, t) \leqslant A_0\varepsilon,$$

其中 A_0 为仅依赖于 φ 的常数.

可以利用不等式(2.14)给出解的显式的界. 我们举出两个例子.

推论 4 如果(1.5)由

(2.19) $|f(x, t)| < N(1 + t)^{-\mu}$, $|h(x, t)| < N(1 + t)^{-\mu}$,

$C(x, t) \leqslant 0$, $\quad (N > 0,\ \mu > 0)$

来代替,则在 D 内有

(2.20) $$|u(x, t)| \leqslant N'N(1 + t)^{-\mu},$$

其中 N' 为仅依赖于 φ 的常数.

证明 定义 $M(t) = \underset{B_t}{\text{l.u.b.}}|u(x, t)|$. 我们可以应用 $\bar{\sigma} = 0$ 的(2.14)(见(2.3)),因而得出

(2.21) $$M(t) \leqslant \frac{2A_0 N}{(1 + \sigma)^{\mu}} + A_0 M(\sigma) e^{-\gamma(t-\sigma)}.$$

设 a 是(仅依赖于 A_0, γ 的)一个数,使对所有的 $\sigma \geqslant 0$, 有

(2.22) $$\frac{A_0\, e^{-\gamma a}}{(1 + \sigma)^{\mu}} < \frac{1}{2(1 + \sigma + a)^{\mu}}.$$

把极值原理应用于$\pm u+\text{const}.\varphi$，我们就得到，当$N'\geqslant N''$时，对于$0\leqslant t\leqslant a$，(2.20)成立，其中$N''$仅依赖于$\varphi$。如果我们证得，只要对于某个$t=\sigma$，在$B_t$中(2.20)成立时，则对于$t=\sigma+a$在$B_t$中(2.20)也成立，也就完成了推论的证明.

把$t=\sigma$的(2.20)代入(2.21)，则对于$t=\sigma+a$，我们得到

$$M(t)\leqslant 2A_0N\frac{(1+\sigma+a)^\mu}{(1+\sigma)^\mu}\frac{1}{(1+t)^\mu}+\frac{A_0\,e^{-\gamma a}}{(1+\sigma)^\mu}N'N.$$

利用(2.22)，并取$N'\geqslant 4A_0(1+a)^\mu$，我们在$B_t=B_{\sigma+a}$中就得到(2.20).

推论 5 如果(1.5)由

(2.23) $$|f(x,t)|<Ne^{-\mu t},\quad |h(x,t)|<Ne^{-\mu t},$$
$$C(x,t)\leqslant 0\qquad (N>0,\ \mu>0)$$

来代替，则在D内有

(2.24) $$|u(x,t)|\leqslant N'Ne^{-\nu t}\qquad (\gamma'<\gamma),$$

其中，$\nu=\min(\gamma',\mu)$，而N'为仅依赖于φ的常数.

其证明类似于推论4，我们把它留给读者.

3. 定理2的证明

我们首先对于$h(x)$为多项式的情形证明定理2.

据第三章第8节定理18，(1.2)，(1.4)有唯一解$v(x)$存在，并且$v\in\bar{C}_{2+\alpha}(C)$。我们需要证明，对于任何$\varepsilon>0$，存在$\beta>0$，$\rho>0$，使得对于所有的$(x,t)\in D-D_\rho$，$y\in C$，$|x-y|<\beta$有

(3.1) $$|u(x,t)-v(y)|\leqslant A\varepsilon,$$

其中A为与ε,β,ρ无关的常数. 这就使我们考虑函数$w=u-v$，并把定理1应用于它. 可是由于D不一定是柱形的，所以不能用. 因此，我们把这一想法修改如下：首先我们在包含$\bar{C}$的区域C_δ中构造一个解v^δ，使当$\delta\to 0$时，$v^\delta\to v$，然后应用定理1（更确切地说，是用它的推论2）去估计$u-v^\delta$.

（用第三章第1节定理2）把L_0的系数扩张到$\bar{C}$的某个邻域$N(C)$，以便扩张后的L_0仍然是椭圆的，它的系数是Hölder连续的（指数为α）且（扩张后的）$C(x)\leqslant 0$. 对于任何充分小的$\delta>0$，

构造流形 ∂C_δ，它的点在 ∂C 的外法线上，离 ∂C 的距离为 δ（更详细的，见第三章第 8 节）. 我们可以用有限的 m_0 个邻域 V_i 把 ∂C_δ 覆盖起来，使得在第 i 个邻域中的那部分 ∂C_δ^i 可以整体地表为 (3.8.6) 的形式，其中 $h \in C^{2+\alpha}$. 我们可以取得 m_0 和 V_i 与 δ 无关. 因为 $\partial C \in C^{3+\alpha}$，所以我们可以认为 h 的 $(2+\alpha)$ 范数不超过与 δ 无关的常数 H_0.

以 C_δ 记 ∂C_δ 的内部. 据第三章第 8 节定理 18，对于 $\bar{C}^\delta$ 中任何 Hölder 连续函数 $g(x)$，和 $\bar{C}_{2+\alpha}(C_\delta)$ 中的任何函数 $\varphi(x)$，

(3.2)
$$
\begin{aligned}
L_0 w(x) &= g(x) \qquad \text{在 } C_\delta \text{ 中},\\
w(x) &= \varphi(x) \qquad \text{在 } \partial C_\delta \text{ 上}
\end{aligned}
$$

存在唯一解 $w(x)$，并且 $w \in \bar{C}_{2+\alpha}(C_\delta)$. 此外，据 Schauder 边界估计，我们有

(3.3)
$$
|\overline{w}|_{2+\alpha}^{C_\delta} \leqslant H(|\overline{\varphi}|_{2+\alpha} + |\overline{g}|_{\alpha}^{C_\delta}).
$$

从边界估计的证明（见第四章第 7 节末了的附注）可知，常数 H 与 δ 无关.

以 x^δ 记 ∂C_δ 的位于 ∂C 在 x 处的外法线上的点. 对应 $x \longleftrightarrow x^\delta$ 是一对一的，且当 $\delta \to 0$ 时，关于 $x \in \partial C$，一致地有 $x^\delta \to x$.

把 $f(x)$ 扩张到 $N(C)$，以使扩张后的函数（仍记作 f）是 Hölder 连续的（指数为 α）. 设 v^δ 为

(3.4)
$$
\begin{aligned}
L_0 v^\delta(x) &= f(x) \qquad \text{在 } C_\delta \text{ 中},\\
v^\delta(x) &= h(x) \qquad \text{在 } \partial C_\delta \text{ 上}
\end{aligned}
$$

的唯一解. 据前面关于 (3.2), (3.3) 的附注，我们推知

(3.5)
$$
|\overline{v^\delta}|_{2+\alpha}^{C_\delta} \leqslant H' \qquad (H' \text{ 与 } \delta \text{ 无关}).
$$

于是得出，当 $\delta \to 0$ 时

(3.6)
$$
\operatorname*{l.u.b.}_{x \in \partial C} |v^\delta(x) - v^\delta(x^\delta)| \to 0.
$$

利用 (3.4), (3.6)，我们得到，当 $\delta \leqslant \delta_0$ 时，有

(3.7)
$$
|v^\delta(x) - h(x)| < \varepsilon \qquad (x \in \partial C),
$$

其中 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$ 与 x 无关. 又因为 $L_0(v^\delta - v) = 0$，利用极大值原理就得到

(3.8) $$\underset{y\in C}{\text{l.u.b.}}|v^{\delta}(y)-v(y)|\leqslant\varepsilon.$$
今后我们视 δ 为 $\leqslant\delta_0$ 的固定正数.

考虑函数

(3.9) $$w(x,t)=u(x,t)-v^{\delta}(x),\qquad ((x,t)\in D-D_{\sigma}).$$
据 (D_1)，如果 σ 充分大，则所有 $B_t(t>\sigma)$ 的投影在 C_δ 中(即当 $(x,t)\in B_t$ 时有 $x\in C_\delta$)，因此，$w(x,t)$完全有定义. 由(3.5)和假定 (B) 推出，当 $t\to\infty$时，在 $D-D_\sigma$ 内一致地有

(3.10) $$(L-L_0)v^{\delta}(x)\to 0.$$
写成

$$\begin{aligned}Lw&=Lu-(L-L_0)v^{\delta}-L_0v^{\delta}\\&=[f(x,t)-f(x)]+(L-L_0)v^{\delta},\end{aligned}$$
利用 (3.10) 和假定 (C)，我们断定，当依赖于 ε 的 σ 充分大时，在 $D-D_\sigma$ 内有

(3.11) $$|Lw(x,t)|<\varepsilon.$$
其次，

$$\begin{aligned}w(x_t,t)&=h(x_t,t)-v^{\delta}(x_t)\\&=[h(x_t,t)-h(x)]+[h(x)-v^{\delta}(x)]\\&\quad+[v^{\delta}(x)-v^{\delta}(x_t)].\end{aligned}$$
利用假定 (E)，(3.7)，以及与假定 (D_2) 相联系的函数 $v^{\delta}(x)$ 的连续性，则当依赖于 ε 的 δ 充分大时，我们得到，

(3.12) $$|w(x_t,t)|<2\varepsilon\qquad (\text{在 } S-S_\sigma \text{ 上}).$$
把定理 1 的推论 2 应用于 $w(x,t)$，并回顾 w 的定义，则当 ρ 充分大 $(\rho>\sigma)$ 时，我们得到

(3.13) $$|u(x,t)-v^{\delta}(x)|<A_1\varepsilon\qquad (\text{在 } D-D_\rho \text{ 内}),$$
其中 A_1 是与 ε, ρ 无关的常数.

因为 v^{δ} 是连续函数，所以存在正数 β，使当 $|x-y|<\beta$，$x\in C_\delta$，$y\in C$ 时，

(3.14) $$|v^{\delta}(x)-v^{\delta}(y)|<\varepsilon.$$
综合不等式 (3.8)，(3.13)，(3.14)，我们得到

$$|u(x, t) - v(y)| < (A_1 + 2)\varepsilon.$$

从而，我们完成了在 $h(x)$ 为多项式情形本定理的证明.

如果 $h(x)$ 不是多项式，那么 $v(x)$ 的存在性可由第三章第 8 节定理 19 推出. 因为一般说来 (3.5) 不成立，所以前面的证明已不适用. 于是我们用多项式 $\hat{h}(x)$ 逼近 $h(x)$，使得

$$\underset{x \in \partial C}{\text{l.u.b.}} |\hat{h}(x) - h(x)| < \varepsilon. \tag{3.15}$$

由极值原理，我们得到

$$\underset{x \in C}{\text{l.u.b.}} |\hat{v}(x) - v(x)| < \varepsilon, \tag{3.16}$$

其中 $\hat{v}$ 是以 $\hat{h}$ 代 h 的 (1.2), (1.4) 的解.

可以把 h 为多项式时所用的一切论证稍加修改而推广到现在这一对 $u(x, t)$, $\hat{v}(x)$的情形. 于是我们得到

$$|u(x, t) - \hat{v}(y)| < A_2\varepsilon \qquad (t > \rho, |x - y| < \beta).$$

把这个不等式和(3.16)结合起来，从而，定理 2 得证.

我们用两条推论来结束本节.

推论 1 如果 D 是一个柱体，则当仅假定 $\partial C \in C^{2+\alpha}$ 时，定理 2 的论断仍然有效.

推论 2 如果 L 的系数与 t 无关，D 为一柱体，并以在 ∂C 的一切点存在闸函数的假定代替 $\partial C \in C^{2+\alpha}$ 的假定，那么定理 2 的论断仍然有效

应用定理 1 于 $u - v$，即可得到这两个推论的证明. 注意，推论 2 中 $v(x)$ 的存在性，可由第三章第 8 节定理 19 推出.

4. 解的渐近展开

在本节中，我们考虑 D 为柱体的情形，并假定

$$a_{ij}(x, t) = \sum_{k=0}^{m} a_{ij}^k(x)t^{-k} + o(t^{-m}),$$

$$b_i(x, t) = \sum_{k=0}^{m} b_i^k(x)t^{-k} + o(t^{-m}),$$

$$C(x, t) = \sum_{k=0}^{m} C^k(x)t^{-k} + o(t^{-m}),$$

$$f(x, t) = \sum_{k=0}^{m} f^k(x) t^{-k} + o(t^{-m}),$$

$$h(x, t) = \sum_{k=0}^{m} h^k(x) t^{-k} + o(t^{-m}),$$

还假定对于任何 $m \geqslant 0$，当 $t \to \infty$ 时，关于 x 一致地有 $t^m o(t^{-m}) \to 0$.

此外，假设所有的函数 $a_{ij}^k(x)$，$b_i^k(x)$，$C^k(x)$，$f^k(x)$ 在 $\bar{B}$ 上（B为D的底）都是 Hölder 连续的（指数为 α），$h^k(x) \in \bar{C}_{2+\alpha}(B)$，$\partial B \in C^{2+\alpha}$，$C(x) \leqslant 0$，$L$ 满足假定 (A).

令

$$L_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^k(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^k(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + C^k(x).$$

现在我们陈述本节的结果.

定理 3 在上述假定下，如果 $u(x, t)$ 为 (1.1)，(1.3) 的解，那么

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{m} u^k(x) t^{-k} + o(t^{-m}), \tag{4.1}$$

其中 $u^k(x)$逐次地定义为如下的 Dirichlet 问题的唯一解:

$$L_0 u^k(x) = f^k(x) - (k-1)u^{k-1}(x) - \sum_{i=1}^{k} L_i u^{k-i}(x) \quad (x \in B), \tag{4.2}$$

$$u^k(x) = h^k(x) \qquad (x \in \partial B) \tag{4.3}$$

（如果 $k = 0$，则(4.2)右边应理解为 $f^0(x)$.）.

证明 从第 3 节推论 1 推出 $u(x, t) = u^0(x) + o(1)$，其中 u^0 由 (4.2)，(4.3) 取 $k = 0$ 时所确定.

我们用归纳法进行证明. 假设定理对 $m-1$ 成立，我们来证明它对 m 成立. 更明确些说: 我们假定 $u^1, \cdots, u^{m-1}$ 属于 $\bar{C}_{2+\alpha}(B)$，而 (4.1)—(4.3) 对于 $k = 0, \cdots, m-1$ 时均成立，我们要证明 (4.1) 对于 $k = m$ 时成立，其中 $u^m \in \bar{C}_{2+\alpha}(B)$，而且满足 (4.2) 和 (4.3).

写出

$$(4.4) \qquad u(x,t)=\sum_{k=0}^{m-1} u^k(x)t^{-k}+t^{-m}v(x,t),$$

并代入(4.1)，而后利用(4.2)，我们得到

$$\left(L_0-\frac{\partial}{\partial t}\right)v+\sum\varepsilon_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum\varepsilon_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+\varepsilon v$$

$$=f^m-(m-1)u^{m-1}-\sum_{i=1}^{m} L_i u^{m-i}+\varepsilon',$$

其中 $\varepsilon_{ij}=o(1)$, $\varepsilon_i=o(1)$, $\varepsilon=o(1)$, $\varepsilon'=o(1)$，这里我们利用了导数 $D_x u^k$, $D_x^2 u^k$ 在 B 内的有界性.

又因为在 S 上有

$$v(x,t)=h^m(x)+o(1),$$

所以可应用第 3 节推论 1，于是推出

$$(4.5) \qquad v(x,t)=u^m(x)+o(1),$$

其中 u^m 满足 $k=m$ 的 (4.2)，(4.3). 据第三章第 8 节定理 18，u^m 属于 $\bar{C}_{2+\alpha}(B)$. 把 (4.5) 代入 (4.4)，即证明完毕.

象在定理 2 的证明中那样，用多项式来近似 h^m，我们就发现，如果仅假定 $h^m(x)$ 为连续函数，那么定理 3 仍为真.

5. 第二初值边值问题解的收敛性

现在我们回到满足第二边界条件的解，并证明类似于定理 1，2的结果. $u(x,t)$ 满足微分方程 (1.1) 和边界条件，

$$(5.1) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x,t)}+g(x,t,u(x,t))=h(x,t) \quad (\text{在 } S \text{ 上}),$$

而 $v(x)$ 满足微分方程 (1.2) 和边界条件

$$(5.2) \qquad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu(x)}+g(x)v(x)=h(x) \quad (\text{在 } \partial C \text{ 上}),$$

这里 $\partial/\partial\nu(x,t)$, $\partial/\partial\nu(x)$ 为内补法向导数，即

$$(5.3) \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x,t)}=\lim_{\substack{y\to x\\ y\in K(x,t)}}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\cos(N_{x,t},x_j)\frac{\partial u(y,t)}{\partial y_i}$$

$$(5.4) \qquad \frac{\partial v(x)}{\partial \nu(x)}=\lim_{\substack{y\to x\\ y\in K(x)}}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\cos(N_x,x_j)\frac{\partial v(y)}{\partial y_i}$$

其中 $N_{x,t}$,N_x 分别为 ∂B_t (在(x, t)处)和 ∂C (在 x 处)的内法线，$K(x, t)$ 和 $K(x)$ 分别为以 (x, t) 和 x 为顶点的有限闭锥，且分别含于 $B_t + \{(x, t)\}$ 和 $C + \{x\}$ 内. 如果D是一柱体，那么定义(5.3)是和第二章第5节中给出的补法向导数的定义相同的. 假如 $g(x, t, u)$ 为 u 的线性函数，即 $g(x, t, u) = g_0(x, t)u$，那么我们已在第五章证明过(1.1)，(5.1)解的存在性.

关于 D，我们需要比第1节的假定(D_1)和(D_2)更强的假定.

$(D_1)'$ 区域 $B_t(0 \leqslant t < \infty)$在 R^n 上的投影是一致有界的，且边界∂B_t属于 C^1 类.

$(D_2)'$ ∂C 是 $C^{2+\alpha}$ 类的；(D_1)，(D_2)成立，且当 $t \to \infty$时，$N_{x_t,t}$ 的方向余弦关于 $x \in \partial C$ 一致地趋向于 N_x 的方向余弦.

附注 从(B)和$(D_1)'$推出，如果 $w(x)$ 是 ∂C 的某个邻域内的连续可微函数，则当 $t \to \infty$时，关于 $x \in \partial C$ 一致地有

$$\frac{\partial w(x)}{\partial \nu(x, t)} \to \frac{\partial w(x)}{\partial \nu(x)}. \tag{5.5}$$

下面我们详细地阐述有关 $g(x, t, u)$ 的两条假定.

(F_1) 对于S上的 (x, t) 和 $-\infty < u < \infty$，$g(x, t, u)$ 是一连续函数，而且对于某个常数 $\mu_1 > 0$，有

$$\frac{g(x, t, u)}{-u} > \mu_1 \quad ((x, t) \in S,\ 0 < |u| < \infty). \tag{5.6}$$

(F_2) 当 $t \to \infty$ 时，关于 $x \in \partial C$ 和有界集中的 u，一致地有 $g(x_t, t, u) \to g(x)u$.

注意，(F_1) 意味着 $g(x, t, 0) = 0$，(F_2) 意味着 $g(x)$ 是 ∂C 上的连续函数，并且

$$g(x) \leqslant -\mu_1 < 0. \tag{5.7}$$

现在我们陈述和定理1，2类似的定理，其中以(5.1)，(5.2)代替(1.3)，(1.4).

定理 4 设 u 是 (1.1)，(5.1)的解，其中 $f(x, t)$ 是 $\overline{D}$ 上的连续函数，$h(x, t)$ 是 S 上的连续函数，且设 (A)，$(D_1)'$，(F_1) 成立. 如果在 $\overline{D}$，S 和 $\overline{D}$ 上分别一致地有

(5.8) $\lim_{t\to\infty} f(x, t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} h(x, t) = 0$, $\limsup_{t\to\infty} C(x, t) \leqslant 0$,

则在 $\overline{D}$ 上一致地有

(5.9)
$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0.$$

定理 5 假定 (A), (B), (C), $(D_1)'$, $(D_2)'$, (E), (F_1), (F_2) 成立，且 $C(x) \leqslant 0$. 如果 $u(x, t)$ 是 (1.1), (5.1) 的解，则在 $\overline{D}$ 上一致地有

(5.10)
$$\lim_{\substack{x\to y\\ t\to\infty}} u(x, t) = v(y),$$

其中 $v(x)$ 为 (1.2), (5.2) 的唯一解.

定理 5 的证明将在下一节给出.

定理 4 的证明　引进由 (2.1) 定义的函数 $\varphi(x)$, 并利用 (5.6), 对于任何函数 $H = H(t) > 0$, 我们得到

$$\frac{\partial(H\varphi(x))}{\partial\nu(x, t)} + g(x, t, H\varphi(x))$$

$$\leqslant \left\{-\lambda e^{\lambda x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\nu(x,t)} - \mu_1(e^{\lambda R} - e^{\lambda x_1})\right\} H.$$

对于使(2.2)成立的固定的 λ, 取 R 充分大，使对某个常数 $\mu_2 > 0$, 有

(5.11)
$$\lambda e^{\lambda x_1} - \mu_1(e^{\lambda R} - e^{\lambda x_1}) < \mu_2 \quad (\text{在 } S \text{ 上})$$

于是，得到不等式

(5.12)
$$\frac{\partial(H\varphi(x))}{\partial\nu(x, t)} + g(x, t, H\varphi(x)) < -H\mu_2 \quad (\text{在 } S \text{ 上}).$$

现在对于固定的 λ, R, 选取 σ 使得(2.3), 因而(2.4)成立.

引进

$$\phi(x, t) = \varepsilon\frac{\varphi(x)}{\delta} + \varepsilon\frac{\varphi(x)}{\mu_2} + A\frac{\varphi(x)}{\delta_0}e^{-\gamma(t-\sigma)},$$

其中 $A = \operatorname{l.u.b.}_{x\in B_\sigma}|u(x, \sigma)|$, 我们可知, (2.9), (2.10) 成立，并且有

(5.13)
$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial\nu(x,t)} + g(x, t, \phi(x, t)) < -\varepsilon.$$

利用第二章第 6 节定理 17, 现在我们类似于定理 1 的证明进

行下去.

从上面的证明看出,显然可把第 2 节的推论 1—5 推广到现在的情形.

6. 定理 5 的证明

首先对 $h(x)$ 为多项式的情形给出证明. 今后仍然使用第 3 节的记号 C_δ, ∂C_δ, x^δ.

把函数 $b_i(x)$, $C(x)$, $f(x)$, $g(x)$ 扩张到 $\bar{C}$ 的某个邻域 $N(C)$ 上, 使它们仍然是 Hölder 连续的 (指数为 α), 并且在 $N(C)$ 内 $C(x)\leqslant 0$. 系数 $a_{ij}(x)$ 将以如下的特殊方法扩张:如果 $x\in N(C)$, $x\notin \bar{C}$, 设 x^0 是到 $x\in\partial C$ 最近的点,则令 $a_{ij}(x)=a_{ij}(x^0)$. 因为 $\partial C\in C^{2+\alpha}$, 所以扩张后的 a_{ij} 在 $N(C)$ 内必为 Hölder 连续(指数为 α).

以 $\nu_\delta(x)$ 记 ∂C_δ 在 $x(x\in\partial C_\delta)$ 处的内法线. 容易看出, $\nu_\delta(x^\delta)$ 和 $\nu(x)$ 对于任何 $x\in\partial C$ 指向同一方向.

由第五章第 6 节的结果, Neumann 问题 (1.2), (5.2) 存在唯一解 $v(x)$. 问题

$$L_0 v^\delta(x)=f(x)\qquad (\text{在 } C_\delta \text{ 内}),\tag{6.1}$$

$$\frac{\partial v^\delta(x)}{\partial \nu_\delta(x)}+g(x)v^\delta(x)=h(x)\qquad (\text{在 } \partial C_\delta \text{ 上})\tag{6.2}$$

也存在唯一解 $v^\delta(x)$.

我们需要下面的引理.

引理 1 设 x 在 ∂C 上变化, x^δ 为 ∂C_δ 上的点,它位于 ∂C 在 x 处的外法线上,则当 $\delta\to 0$ 时,有

$$\operatorname*{l.u.b.}_{y\in C}|v(y)-v^\delta(y)|\to 0,\tag{6.3}$$

$$\operatorname*{l.u.b.}_{x\in\partial C}|v^\delta(x)-v^\delta(x^\delta)|\to 0,\tag{6.4}$$

$$\operatorname*{l.u.b.}_{x\in\partial C}\left|\frac{\partial v^\delta(x)}{\partial\nu(x)}-\frac{\partial v^\delta(x^\delta)}{\partial\nu_\delta(x^\delta)}\right|\to 0.\tag{6.5}$$

我们首先利用引理 1 来证明定理 5,然后再证明引理 1.

由引理 1 以及 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的连续性,当 δ 充分小时,有

(6.6) $$\underset{x\in C}{\text{l.u.b.}}|v(y)-v^\delta(y)|<\varepsilon,$$

(6.7) $$\underset{x\in\partial C}{\text{l.u.b.}}\left|\frac{\partial v^\delta(x)}{\partial \nu(x)}-\frac{\partial v^\delta(x^\delta)}{\partial \nu_\delta(x^\delta)}\right|<\varepsilon,$$

(6.8) $$\underset{x\in\partial C}{\text{l.u.b.}}|g(x)v^\delta(x)-g(x^\delta)v^\delta(x^\delta)|<\varepsilon,$$

(6.9) $$\underset{x\in C}{\text{l.u.b.}}|h(x)-h(x^\delta)|<\varepsilon.$$

在下文中 δ 是使 (6.6)—(6.9) 成立的固定的正数.

考虑函数

(6.10) $$w(x,t)=u(x,t)-v^\delta(x)\quad(\text{在 } D-D_\sigma \text{ 内}),$$

其中 σ 充分大,使当 $(x,t)\in B_t$, $t\geqslant\sigma$ 时,有 $x\in C_\delta$. 于是 $w(x,t)$ 在 $D-D_\sigma$ 内完全有定义,并满足

(6.11) $$\begin{aligned}Lw-Lu-(L-L_0)v^\delta-L_0v^\delta\\=[f(x,t)-f(x)]-(L-L_0)v^\delta.\end{aligned}$$

我们可以假定 σ 是这样的数,使存在一含于 C_δ 内的闭集 C_0,并使当 $(x,t)\in B_t$, $t\geqslant\sigma$ 时, $x\in C_0$. 从 Schauder 的内估计式(见第三章第 8 节)得出

(6.12) $$\overline{|v^\delta|}^{C_0}_{2+\alpha}<\infty.$$

因此,利用假定 (B) 我们断定,当 $t\to\infty$ 时,在 $D-D_\sigma$ 内一致地有 $(L-L_0)v^\delta\to0$. 于是从 (6.11) 推知,当 σ 充分大时就有

(6.13) $$|Lw(x,t)|<\varepsilon\qquad(\text{在 } D-D_\sigma \text{ 内}).$$

回到 w 的边界条件. 我们首先注意到,因为 (2.14) 对于 u 成立(见第 5 节末了的附注),所以有

(6.14) $$|u(x,t)|\leqslant\text{const.}<\infty\qquad(\text{在 } D \text{ 内}).$$

由 $(D_2)'$ 及其后的附注,当 $t\to\infty$ 时,有

(6.15) $$\underset{x\in\partial C}{\text{l.u.b.}}|g(x_t)v^\delta(x_t)-g(x)v^\delta(x)|\to0,$$

(6.16) $$\underset{x\in\partial C}{\text{l.u.b.}}\left|\frac{\partial v^\delta(x_t)}{\partial \nu(x_t,t)}-\frac{\partial v^\delta(x)}{\partial \nu(x)}\right|\to0$$

在 ∂B_t 上我们得到

(6.17) $$\frac{\partial w(x_t,t)}{\partial \nu(x_t,t)}+g(x_t)w(x_t,t)$$

$$= [g(x_t)u - g(x_t, t, u)] + [h(x_t, t) - h(x^\delta)]$$
$$+ \left[\frac{\partial v^\delta(x^\delta)}{\partial \nu_\delta(x^\delta)} - \frac{\partial v^\delta(x_t)}{\partial \nu(x_t, t)}\right] + [g(x^\delta)v^\delta(x^\delta) - g(x_t)v^\delta(x_t)]$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

由(F_2)当 $t \to \infty$ 时,有 $I_1 \to 0$ (这里利用 (6.14)); 由(E)和(6.9), $|I_2|$ 小于 2ε; 由(6.7), (6.16), $|I_3|$ 小于 2ε; 由于(6.8), (6.15), $|I_4|$ 小于 2ε. 上面的结论对 $x \in \partial C$ 一致地成立. 由此推出,只要 σ 充分大,就有

$$(6.18) \qquad \left|\frac{\partial w(x, t)}{\partial \nu(x, t)} + g(x)w(x, t)\right| < 7\varepsilon \qquad (x, t) \in S - S_\sigma.$$

因为对于第二初值边值问题的情形,第 2 节推论 2 也成立(见第 5 节末了的附注),于是从(6.13),(6.18)和 $w(x,t)$ 的定义得出,当 ρ 充分大时,有

$$(6.19) \qquad |u(x, t) - v^\delta(x)| < A_1\varepsilon \qquad (\text{在 } D - D_\rho \text{ 内}),$$

其中 A_1 为与 ε, ρ 无关的常数.

因为 v^δ 是 C_δ 内的连续函数,所以存在正数 $\beta > 0$,使当 $|x - y| \leqslant \beta$, $y \in \bar{C}$, $x \in C_\delta$ 时有

$$(6.20) \qquad |v^\delta(x) - v^\delta(y)| < \varepsilon.$$

综合(6.19)、(6.20)和(6.6),当 $|x - y| \leqslant \beta$, $y \in \bar{C}$, $(x, t) \in D - D_\rho$ 时,我们得到

$$(6.21) \qquad |u(x, t) - v(y)| < (A_1 + 2)\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的,于是定理 5 在 $h(x)$ 为多项式的情形,证毕.

设 $h(x)$ 不是多项式,令 $\hat{h}(x)$ 为满足 (3.15) 的多项式, $\hat{v}(x)$ 为 (1.2), (5.2) 的解,其中以 $\hat{h}$ 代替 h. 由第五章第 6 节引理 4,有

$$(6.22) \qquad |\hat{v}(x) - v(x)| \leqslant A_2\varepsilon \qquad (x \in C),$$

其中 A_2 为与 ε 无关的常数. 定义 v^δ 为 (6.1), (6.2) 的解,其中以 $\hat{h}$ 代替 h. 象前面那样进行下去,我们就会得到不等式(比较 (6.21))

$$|u(x, t) - \hat{v}(y)| < (A_1 + 2)\varepsilon,$$

其中 $|x-y| \leqslant \beta$, $y \in \bar{C}$, $(x,t) \in D - D_\rho$. 把这个不等式和(6.22)结合起来，定理 5 得证。

以下证明引理 1。

引理 1 的证明　我们首先对 $a_{ij}(x)$ 在 ∂C 的 C 邻域内为一致连续可微函数的情形给出证明. 以 $v^\delta(x)$ 记

$$
\begin{aligned}
&L_0 v^\delta(x) - \frac{\partial v^\delta(x)}{\partial t} = f(x) \qquad (x \in C_\delta,\ 0 < t \leqslant 1),\\
(6.23)\qquad &v^\delta(x) = v^\delta(x) \qquad (x \in C_\delta),\\
&\frac{\partial v^\delta(x)}{\partial \nu_\delta(x)} + g(x) v^\delta = h(x) \qquad (x \in \partial C_\delta,\ 0 < t \leqslant 1).
\end{aligned}
$$

的解. 因为 $v^\delta(x)$ 在 C_δ 内是一致连续可微的（见第五章第 6 节），所以我们可以扩张 $v^\delta(x)$ 以及 $a_{ij}(x)$，使得扩张后的函数在 ∂C_δ 的邻域内是连续可微的. 于是可以用第五章第 3 节的推论 2. 我们推出

$$
\begin{aligned}
(6.24)\qquad v^\delta(x) = &\int_0^t \int_{\partial C_\delta} \Gamma(x, t; \xi, \tau) \varphi_\delta(\xi, \tau) dS_\xi^\delta\, d\tau\\
&+ \int_{C_\delta} \Gamma(x, t; \xi, 0) v^\delta(\xi) d\xi\\
&- \int_0^t \int_{C_\delta} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi) d\xi\, d\tau,
\end{aligned}
$$

其中 dS_ξ^δ 是 ∂C_δ 的曲面元素，而 φ_δ 为如下的积分方程的解:

$$
\begin{aligned}
(6.25)\qquad \varphi_\delta(x, t) = 2 &\int_0^t \int_{\partial C_\delta} \left[\frac{\partial \Gamma(x, t; \xi, \tau)}{\partial \nu_\delta(x)}\right.\\
&\left. + g(x) \Gamma(x, t; \xi, \tau)\right] \varphi_\delta(\xi, \tau) dS_\xi^\delta\, d\tau\\
&+ 2 F_\delta(x, t);
\end{aligned}
$$

(F_δ 的形式类似于(5.3.6))，所以对于任何 $\eta > \frac{1}{2}$，有估计

$$
(6.26)\qquad \operatorname*{l.u.b.}_{x} |F_\delta(x, t)| \leqslant \frac{A}{t^\eta} \operatorname{l.u.b.} |v^\delta(x)| + A,
$$

其中 A 为与 δ 无关的常数.

由第五章第 6 节引理 4 推出，作为(6.1)，(6.2)的解，$v^\delta(x)$ 满

足

(6.27)
$$\underset{x\in C_\delta}{\text{l.u.b.}}|v^\delta(x)|\leqslant A_0,$$

其中 A_0 与 δ 无关(注意,(5.6.12)中的常数 K 仅通过它依赖于 D 的直径而与 D 有关;这一点可从(5.6.12)的证明推出).

把(6.27)代入(6.26)我们得到 F_δ 的一个界. 据不等式 (比较(5.2.12))

(6.28)
$$\left|\frac{\partial\Gamma(x,t;\ \xi,\tau)}{\partial\nu_\delta(x,t)}\right|\leqslant\frac{A_1}{(t-\tau)^\mu}\frac{1}{|x-\xi|^{n-2\mu-\alpha}}$$
$$(x\in\partial C_\delta,\ \ \xi\in\partial C_\delta),$$

其中 A_1 与 δ 无关 (因为 $\partial C\in C^{2+\alpha}$),如果我们用迭代法解(6.25),然后利用对 F_δ 的界,我们就得到

(6.29)
$$\underset{x\in\partial C_\delta}{\text{l.u.b.}}|\varphi_\delta(x,t)|\leqslant\frac{A_2}{t^\eta},$$

其中 A_2 与 δ 无关.

从 $F_\delta(x,t)$ 的形式(利用 (6.27))得知,这个函数对于 (x,t), $(x\in\partial C_\delta,\ t_0\leqslant t\leqslant 1,\ t_0>0)$ 是连续的, 对于 δ 是一致连续的. 因为对于 (6.25) 右边那个积分可以证明同样的结论, 由此推出 $\varphi_\delta(x,\ t)$ 是 $(x,\ t)(x\in\partial C_\delta, t_0\leqslant t\leqslant 1, t_0>0)$的连续函数, 对于 δ 是一致连续的.

利用(6.27), (6.29)以及当 x 沿着法线 N_{x^0} 趋于 x^0 时(5.2.10)的证明,从(6.24)我们得到,对于 δ 和 $x^\delta\in\partial C_\delta$ 一致地有

(6.30)
$$\lim_{\bar{x}\to x^\delta}\left|\frac{\partial v^\delta(\bar{x})}{\partial\nu_\delta(x^\delta)}-\frac{\partial v^\delta(x^\delta)}{\partial\nu_\delta(x^\delta)}\right|\to 0,$$

其中$\bar{x}$位于 x^δ 处 ∂C_δ 的内法线上. 从我们把系数 $a_{ij}(x)$ 扩张到 C 外的方法和从 ∂C 在 x 处的法线和 ∂C_δ 在 x^δ 的法线有同一指向推出, $\partial w(\bar{x})/\partial\nu_\delta(x^\delta)=\partial w(\bar{x})/\partial\nu(x)$, $(x\in\partial C)$. 因此 (6.5) 是 (6.30) 的结果.

利用(6.24)和不等式(6.27),(6.29)就推出(6.4).

最后,为了证明(6.3),我们注意到由 (6.4), (6.5) 和 (6.2),当

$\delta \to 0$ 时，有

$$\underset{x \in \partial C}{\text{l.u.b.}} \left| \left[\frac{\partial v^\delta(x)}{\partial \nu(x)} + g(x)\, v^\delta(x) \right] - \left[\frac{\partial v(x)}{\partial \nu(x)} + g(x) v(x) \right] \right| \to 0.$$

在 C 中应用第五章第 6 节引理 4 于 $v^\delta(x) - v(x)$，就推出 (6.3).

把 v^δ 看作是 (6.1)，(6.2) 的解，而不是(6.23)的解，并借助于 $L_0 u = 0$ 的基本解的位势来表示它，也可以给出引理 1 的证明. 在这种证法中，假定 $a_{ij}(x)$ 在 ∂C 的 C 邻域内一致连续可微，而 $v^\delta(x)$ 在 C_δ 内有一致连续的一阶导数并不是必要的. 这种证明的细节就不详述了.

7. 后向抛物型方程解的唯一性

在抛物型方程中，如果以 $-t$ 代 t，那么我们就得到下面形式的方程

$$(7.1) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x, t)u + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t).$$

这个方程称为后向抛物型方程. 对这样的方程，第一初值边值问题为在某个区域 $D_T + B_T$ 内求 (7.1) 的满足下列初始和边界条件的解 $u(x, t)$:

$$(7.2) \qquad u(x, 0) = \phi(x) \qquad (\text{在 } B \text{ 上}),$$

$$(7.3) \qquad u(x, t) = h(x, t) \qquad (\text{在 } S_T \text{ 上}),$$

其中记号 D_t, B_t, S_t 等等和前几节的一样.

一般说来，这个问题的解是不存在的，所以在这一节，我们证明：如果解存在，它就是唯一的.

在本章考虑这一问题，是因为我们将要导出的结果，在下一节要用它研究抛物型方程的解当 $t \to \infty$ 时的性态. 下节的方法和本节类似.

在这一节我们总假定：

(G_T) D_T 为一有有界底 B 的柱，∂B 是 C^1 类的，$a_{ij}(x, t)$ 为 $\overline{D}_T$ 上的连续可微函数，并且

$$\nu_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \nu_1|\xi|^2$$

$((x,t)\in \overline{D}_T$, ξ 是实的$)$,其中 ν_0, ν_1 为正的常数.

我们主要涉及在 D_T 内满足如下微分不等式的函数 $u(x,t)$:

(7.4) $$(L_0u)^2 \leqslant c_1u^2 + c_2|D_xu|^2,$$

其中

(7.5) $$L_0u(x,t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

式中 c_1, c_2 为非负常数. 为简单计,我们总假定函数 $u(x,t)$ 在 $\overline{D}_T$ 上是二次连续可微的. 在(7.4)中我们使用了记号

$$|D_xu|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2.$$

定理 6 假定 (G_T) $(T<\infty)$ 成立,而 $u(x,t)$ 满足(7.4)以及顶端和边界条件

(7.6) $$u(x,T)=0 \qquad (\text{在 } B_T \text{ 上}),$$

(7.7) $$u(x,t)=0 \qquad (\text{在 } S_T \text{ 上}),$$

则在 D_T 内 $u\equiv 0$.

作为本定理的一个直接结果,我们断定:对于形如(7.1)的后向抛物型方程,其第一初值边值问题最多有一个解.

证明 我们引进记号

$$(u,v) = \int_{D_T} u(x,t)v(x,t)\,dx\,dt,$$

$$\|u\| = (u,u)^{1/2},$$

$$\|u\|_1 = \left[\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2\right]^{1/2},$$

并以 P_T 记在 $\overline{D}_T$ 上二次连续可微,在 S_T, B 和 B_T 上为零的所有函数 v 的集合. 令

$$\lambda(t) = t - T - \eta \qquad (\eta > 0).$$

我们首先证明两条关于函数 $v\in P_T$ 的引理.

引理 2 对于任何 $v\in P_T$ 和任何正整数 m,有

$$\|\lambda^{-m}L_0v\|^2\geqslant m\|\lambda^{-m-1}v\|^2-A\|\lambda^{-m}v\|_1^2, \tag{7.8}$$

其中 A 只与 $\partial a_{ij}/\partial t$ 的界有关.

证明 函数 $z=\lambda^{-m}v$ 属于 P_T,且满足

$$L_0v=\lambda^m Ez-\lambda^m\frac{\partial z}{\partial t}-m\lambda^{m-1}z,$$

其中

$$Eu(x,t)=\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\right). \tag{7.9}$$

由此推出

$$\begin{aligned}\|\lambda^{-m}L_0v\|^2=&\left\|\frac{\partial z}{\partial t}\right\|^2-2\left(\frac{\partial z}{\partial t},\ Ez\right)\\&+2m\left(\frac{z}{\lambda},\ \frac{\partial z}{\partial t}\right)+\|Ez-m\lambda^{-1}z\|^2.\end{aligned} \tag{7.10}$$

我们着手估计 (7.10) 右边各项. 首先,因为 z 在 B, B_T 上为零,所以

$$\begin{aligned}2m\left(\frac{z}{\lambda},\ \frac{\partial z}{\partial t}\right)&=m\int_{D_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{z^2}{\lambda}\right)dxdt+m\|\lambda^{-1}z\|^2\\&=m\|\lambda^{-m-1}v\|^2.\end{aligned} \tag{7.11}$$

其次,因为在 S_T, B, B_T 上 z 为零,所以有

$$\begin{aligned}-2\left(\frac{\partial z}{\partial t},\ Ez\right)&=2\int_{D_T}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}dxdt\\&=\int_{D_T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{ij}a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)dxdt\\&\quad-\int_{D_T}\sum_{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}dxdt\\&\geqslant -A\|z\|_1^2=-A\|\lambda^{-m}v\|_1^2.\end{aligned} \tag{7.12}$$

把(7.11),(7.12)的结果代入(7.10),并省略(7.10)右边第一项和最后那一项,就推出 (7.8).

引理 3 存在仅与(条件 (G_T) 中的) ν_0 和 $\partial a_{ij}/\partial t$ 的界有关的正常数 η_0, μ_0, m_1，使当 $0 < T \leqslant \mu$, $v \in P_T$，而 m 为 $\geqslant m_1$ 的整数，$\mu \leqslant \mu_0$, $0 < \eta \leqslant \eta_0$ 时，有

$$\rho\|\lambda^{-m} L_0 v\|^2 \geqslant \|\lambda^{-m-1} v\|^2 + \frac{1}{2}\|\lambda^{-m} v\|_1^2, \tag{7.13}$$

其中

$$\rho = \frac{2}{\nu_0}\left[\mu + \eta + \frac{1+\nu_0}{2m} + \frac{(\mu+\eta)^2}{2}\right]. \tag{7.14}$$

证明 我们从下面的恒等式开始

$$\begin{aligned} &-(\lambda^{-m-1} v, \lambda^{-m+1} L_0 v) \\ &= \left(\lambda^{-2m} v, \frac{\partial v}{\partial t}\right) - (\lambda^{-2m} v, Ev). \end{aligned} \tag{7.15}$$

利用 $v \in P_T$ 这一事实，借助于分部积分我们估计右边. 首先，因为 $|\lambda(t)| \leqslant T + \eta$，所以有

$$\begin{aligned} &-\left(\lambda^{-2m} v, \frac{\partial v}{\partial t}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{D_T} \frac{\partial}{\partial t}(\lambda^{-2m} v^2)\, dx\, dt - m\int_{D_T} \lambda^{-2m-1} v^2\, dx\, dt \\ &\leqslant m(T+\eta)\|\lambda^{-m-1} v\|^2. \end{aligned} \tag{7.16}$$

其次

$$\begin{aligned} -(\lambda^{-2m} v, Ev) &= \int_{D_T} \lambda^{-2m} \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx\, dt \\ &\geqslant \nu_0\|\lambda^{-m} v\|_1^2. \end{aligned} \tag{7.17}$$

把(7.16),(7.17)代入(7.15)，并用 Cauchy 不等式来估计左边的被积函数，我们就得到

$$\begin{aligned} \nu_0\|\lambda^{-m} v\|_1^2 \leqslant &\left[m(T+\eta) + \frac{1}{2}\right]\|\lambda^{-m-1} v\|^2 \\ &+ \frac{1}{2}\|\lambda^{-m+1} L_0 v\|^2. \end{aligned}$$

利用不等式 $\|\lambda^{-m+1} L_0 v\|^2 \leqslant (T+\eta)^2\|\lambda^{-m} L_0 v\|^2$ 和引理 2，我们得

到

$$\nu_0\|\lambda^{-m}v\|_1^2 \leqslant \left[\frac{m(T+\eta)+1/2}{m}+\frac{(T+\eta)^2}{2}\right]\|\lambda^{-m}L_0v\|^2$$

$$+\left(T+\eta+\frac{1}{2m}\right)A\|\lambda^{-m}v\|_1^2.$$

选取 μ_0, η_0, m_0，使得 $2[\mu_0+\eta_0+1/2m_0]A \leqslant \nu_0$。于是，如果 $T<\mu\leqslant\mu_0$，$0<\eta\leqslant\eta_0$，$m\geqslant m_0$ 就有

$$(7.18)\quad \|\lambda^{-m}v\|_1^2 \leqslant \frac{2}{\nu_0}\left[(\mu+\eta)+\frac{1}{2m}+\frac{(\mu+\eta)^2}{2}\right]\|\lambda^{-m}L_0v\|^2.$$

把(7.18)和(7.8)综合起来，我们得到

$$\|\lambda^{-m-1}v\|^2+\left(1-\frac{A}{m}\right)\|\lambda^{-m}v\|_1^2 \leqslant \frac{2}{\nu_0}\left[\mu+\eta+\frac{1+\nu_0}{2m}\right.$$

$$\left.+\frac{(\mu+\eta)^2}{2}\right]\|\lambda^{-m}L_0v\|_0^2.$$

最后，取 $m_1\geqslant m_0$，使当 $m\geqslant m_1$ 时，有 $(1-A/m)\geqslant 1/2$，就证得(7.13)。

现在我们回到定理 6 的证明上来．如需得到

$$(7.19)\qquad 2(\mu+\eta)^2\rho c_1\leqslant 1,\qquad 2\rho c_2\leqslant 1,$$

可减小 μ, η 而增大 m_1。

只要在 $T\leqslant\mu$ 的假定下证明本定理就够了，如果不然，我们可以首先在 $D_T-D_{T-\mu}$ 内，然后在 $D_{T-\mu}-D_{T-2\mu}$ 内证明 $u=0$ 等等．

设 $0<t_1<t_2<T$，并引进满足下列条件的二次连续可微函数 $\zeta(t)$：当 $0\leqslant t<t_1$ 时 $\zeta(t)=0$，当 $t_2<t\leqslant T$ 时 $\zeta(t)=1$．函数 $v=\zeta u$ 属于 P_T，因此由引理 3 有

$$(7.20)\quad \rho\int_{t_1}^{t_2}\int_B(\lambda^{-m}L_0v)^2dxdt+\rho\int_{t_2}^{T}\int_B(\lambda^{-m}L_0u)^2dxdt$$

$$=\rho\|\lambda^{-m}L_0v\|^2 \geqslant \|\lambda^{-m-1}v\|^2+\frac{1}{2}\|\lambda^{-m}v\|_1^2$$

$$\geqslant \int_{t_2}^{T}\int_B (\lambda^{-m-1}u)^2\,dx\,dt + \frac{1}{2}\int_{t_2}^{T}\int_B \lambda^{-2m}|D_x u|^2\,dx\,dt.$$

鉴于 (7.4),

$$\rho\int_{t_2}^{T}\int_B (\lambda^{-m}L_0u)^2\,dxdt \leqslant \rho c_1(\mu+\eta)^2\int_{t_1}^{T}\int_B (\lambda^{-m-1}u)^2\,dxdt$$
$$+\rho c_2\int_{t_2}^{T}\int_B \lambda^{-2m}|D_xu|^2\,dx\,dt.$$

把这个不等式代入 (7.20) 并利用 (7.19), 我们得到

$$2\rho\int_{t_1}^{t_2}\int_B (\lambda^{-m}L_0v)^2\,dxdt \geqslant \int_{t_2}^{T}\int_B (\lambda^{-m-1}u)^2\,dxdt.$$

这个不等式意味着,对于任意的 $t_2 < t_3 < T$,

$$2\rho(T+\eta-t_2)^{-m}\left[\int_{t_1}^{t_2}\int_B (L_0v)^2\,dxdt\right]$$
$$\geqslant (T+\eta-t_3)^{-m-1}\left[\int_{t_3}^{T}\int_B u^2\,dxdt\right]$$

这个式子对于充分大的 m 是不可能成立的, 除非右边那个积分为零, 也就是除非当 $x\in B$, $t_3 < t < T$ 时, $u(x, t) = 0$. 因为可以取 t_3 任意小,所以在 D_T 内 $u \equiv 0$.

从定理 6 的证明我们得到下面的推论.

推论 1 如果不等式(7.4)由较弱的不等式

$$(7.21)\qquad \int_{B_t}(L_0u)^2\,dx \leqslant c_1\int_{B_t}u^2\,dx + c_2\int_{B_t}|D_xu|^2dx$$

来代替,定理 6 仍为真.

把抛物算子

$$(7.22)\qquad L_1u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

写成如下形式

$$(7.23)\qquad L_1u = L_0u + \sum_{i=1}^{n}\tilde{b}_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$
$$\left(\tilde{b}_j = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\right),$$

并注意到当且仅当对于某个常数 c_3 有

$$(7.24) \quad \int_{B_t} (L_1 u)^2 dx \leqslant c_1 \int_{B_t} u^2 dx + c_3 \int_{B_t} |D_x u|^2 dx.$$

时，u 方可满足 (7.21)，我们就断定：

推论 2 如果不等式(7.4)和(7.21)分别由不等式(7.24)替代，定理 6 和推论 1 仍为真，其中 L_1 由 (7.22) 定义.

现在代替 (7.7)，我们考虑 u 满足如下第二边界条件的情形：

$$(7.25) \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu(x,t)} + g(x,t)u(x,t) = 0 \qquad (\text{在 } S_T \text{ 上}).$$

在 P_T 的定义中，在 S_T 上 $v=0$ 的条件由在 S_T 上 $\partial v/\partial \nu + gv = 0$ 来替代，前面的计算结果除 (7.12)，(7.17) 外仍然不变. 对(7.12)的左边进行分部积分，并利用对于 v 的 (7.25)，我们在右边得到一个附加项

$$(7.26) \qquad -\int_{S_T} g \frac{\partial (z)^2}{\partial t} dS = \int_{S_T} \frac{\partial g}{\partial t} z^2 dS,$$

对 (7.17) 的左边进行分部积分，我们又得到附加项

$$(7.27) \qquad -\int_{S_T} \lambda^{-2m} g v^2 dS.$$

如果 $g \leqslant 0$，$\partial g/\partial t \geqslant 0$，则这些附加项都是非负的，于是可以把它们丢掉. 因此：

推论 3 假如 g 和 $\partial g/\partial t$ 是连续函数，并且 $g \leqslant 0$，$\partial g/\partial t \geqslant 0$，则可把定理 6 和推论 1，2 推广到由条件 (7.25) 取代条件 (7.7) 后的情形.

我们要证明，如果 ∂B 是 C^2 类的，则可省略 $g \leqslant 0$，$\partial g/\partial t \geqslant 0$ 的假定. 我们首先证明一条初等引理.

引理 4 设 B 是一有界区域，它的边界 ∂B 是 C^2 类的，设 $w(x)$ 为 $\bar{B}$ 上的连续可微函数，于是对于任何 $\varepsilon > 0$ 有

$$(7.28) \qquad \int_{\partial B} (w(x))^2 dS_x \leqslant \varepsilon \int_B |D_x w(x)|^2 dx + \frac{A'}{\varepsilon} \int_B (w(x))^2 dx,$$

其中 dS_x 是 ∂B 上的曲面元素，而 A' 是仅与 B 有关的常数.

证明　　设 x_δ 为 ∂B 在 x 处的内法线 N_x 上离 x 的距离为 δ 的点. 当 x 在 ∂B 上变化时，由 x_δ 生成的流形 $\partial\widetilde{B}_\delta$ 是 C^1 类的. 设 dS_x^δ 记 $\partial\widetilde{B}_\delta$ 上的曲面元素，$\widetilde{B}_\delta$ 记由 ∂B 和 $\partial\widetilde{B}_\delta$ 所界定的区域.

对于 $x\in\partial B$，写成

$$w(x)=w(x_\delta)-\int_{x_\delta}^{x}\frac{\partial}{\partial N_x}w(\zeta)d\zeta,$$

其中 ζ 在区间 (x_δ, x) 中变化，我们得到

$$|w(x)|^2\leqslant 2(w(x_\delta))^2+2\left(\int_{x_\delta}^{x}|D_xw|d\zeta\right)^2$$

$$\leqslant 2(w(x_\delta))^2+2\delta\int_{x_\delta}^{x}|D_xw|^2d\zeta.$$

对 $x\in\partial B$ 和 δ 积分，我们得到

$$\delta\int_{\partial B}(w(x))^2dS_x\leqslant 2C_1\int_{\widetilde{B}_\delta}(w(x))^2dx$$

$$+2C_1\delta^2\int_{\widetilde{B}_\delta}|D_xw(x)|^2dx,$$

其中 C_1 仅与 B 有关（事实上，$C_1=\text{l.u.b.}dS_x/dS_x^\delta$）. 在右边以在整个区域 B 上的积分代替在 $\widetilde{B}_\delta$ 上的积分，并取 $2C_1\delta=\varepsilon$，就推出 (7.28).

现在我们回到 u 满足 (7.4)，(7.6) 和(7.25)的情形. 于是，在 (7.12) 的右边出现附加项 (7.26)，由引理 4，当 $A''>A'\text{l.u.b.}|\partial g/\partial t|$ 时，它大于

$$(7.29)\qquad -\varepsilon\int_{D_T}|D_xz|^2dxdt-\frac{A''}{\varepsilon}\int_{D_T}z^2dx\,dt$$

$$=-\varepsilon\|\lambda^{-m}v\|_1-\frac{A''}{\varepsilon}\|\lambda^{-m}v\|^2.$$

把

$$(7.30)\qquad -\|\lambda^{-m}v\|^2\geqslant-(T+\eta)^2\|\lambda^{-m-1}v\|^2$$

代入(7.29)的右边，然后将其所得的结果代入(7.12)的右边，仿照引理 2 的证明进行下去，我们得到

$$\|\lambda^{-m}L_0v\|^2\geqslant\left[m-\frac{A''}{\varepsilon}(T+\eta)^2\right]\|\lambda^{-m-1}v\|^2-(A+\varepsilon)\|\lambda^{-m}v\|_1^2$$

因此,当 $\epsilon = 1$ 且 m 充分大时,有

$$(7.31) \qquad \|\lambda^{-m} L_0 v\|^2 \geqslant \frac{1}{2} m \|\lambda^{-m-1} v\|^2 - (A+1) \|\lambda^{-m} v\|_1^2.$$

下面,考虑以 (7.25) 代替 (7.7) 时,在 (7.17) 右边出现的 (7.27)的项.由引理 4 和(7.30),当 $A^* > A'\text{l.u.b.}|g|$ 时,它大于

$$-\epsilon\|\lambda^{-m}v\|_1^2 - \frac{A^*}{\epsilon}(T+\eta)^2\|\lambda^{-m-1}v\|^2.$$

取 $\epsilon = \nu_0/2$ 我们就可以象证明引理 3 那样进行下去,并得到一个形如(7.13)的不等式,这个不等式有不同的ρ,而当 $\mu \to 0$, $\eta \to 0$, $m \to \infty$ 时,$\rho \to 0$. 现在我们几乎可以逐字地把定理 6 的证明推广到现在的情形.因而我们得到下列结果:

定理 7 假定 (G_T) $(T < \infty)$ 成立,∂B 是 C^2 类的,且 g, $\partial g/\partial t$ 为连续函数. 如果 $u(x, t)$ 满足 (7.6),(7.25) 以及不等式 (7.4),(7.21),(7.24) 中之一,则在 D_T 内 $u \equiv 0$.

8. 解的衰减速度的下界

在这一节,我们在整个柱 D_∞ 上考虑满足如下微分不等式的函数 $u(x, t)$:

$$(8.1) \qquad (L_0 u)^2 \leqslant c_1(t) u^2 + c_2(t) |D_x u|^2.$$

我们将沿用第 7 节的记号 L_0, L_1, D, S 等等.

引进函数

$$(8.2) \qquad a(t) = \underset{B_t}{\text{l.u.b.}} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t} \right|,$$

我们证明:

定理 8 假定 (G_∞) 成立,$u(x, t)$ 满足(8.1)和关于 $T = \infty$ 的边界条件 (7.7). 如果对于某个 $\eta > 1$

$$(8.3) \qquad c_1(t) = o(t^{\eta-2}), \quad c_2(t) = o(t^{-1}), \quad a(t) = o(t^{-1}),$$

并且当 $t \to \infty$ 时,对于任何 $\lambda > 0$

$$(8.4) \qquad e^{\lambda t \eta} \int_{B_t} |D_x u|^2 \, dx \to 0,$$

则在 D_∞ 内 $u \equiv 0$. 如果

(8.5) $c_1(t)=o(t^{-2}),\ c_2(t)=o(t^{-2}),\ a(t)=o(t^{-2})$,

且对于 $\eta=1$, (8.4) 成立,则在 D_∞ 内 $u\equiv 0$.

证明　对于 $\eta\geqslant 1,\ \lambda>0$ 和实数β,引进

(8.6) $$K(t;\beta,\lambda,\eta)=t^{2\beta}\exp[2\lambda t^{\eta}].$$

以 Q_η 记在 $\overline{D}_\infty$ 上所有二次连续可微函数 $v(x,t)$ 所组成的类,其中对某个与 v 有关的 $\rho>0$,函数 $v(x,t)$ 满足

(8.7) $$v\equiv 0 \quad (\text{在 } S_\infty \text{ 上}),$$

(8.8) $$v\equiv 0 \quad (\text{在 } D_\rho \text{ 中}),$$

而且当 $t\to\infty$时,对任何 $\lambda>0$ 和实数 β,

(8.9) $$K(t;\beta,\lambda,\eta)\int_{B_t}|D_xv(x,t)|^2dx\to 0.$$

于是推出 (见问题 5),当 $t\to\infty$时

(8.10) $$K(t;\beta,\lambda,\eta)\int_{B_t}(v(x,t))^2dx\to 0.$$

在下文中将以 A 记种种仅依赖于 η 和(条件 (G_∞) 中的) ν_0 的正的常数.

引理 5　如果 $v\in Q_\eta$, $K=K(t;\beta,\lambda,\eta)$, 则

(8.11) $$\int_{D_\infty}[\lambda\eta(\eta-1)t^{\eta-2}-\beta t^{-2}]Kv^2dxdt$$
$$\leqslant\int_{D_\infty}K(L_0v)^2dxdt$$
$$+\int_{D_\infty}a(t)K|D_xv|^2dxdt.$$

证明　函数 $z(x,t)=K\left(t,\frac{1}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\lambda,\eta\right)v(x,t)$ 属于 Q_η,并且

$$K(L_0v)^2=\left[Ez-\frac{\partial z}{\partial t}+(\beta t^{-1}+\lambda\eta t^{\eta-1})z\right]^2.$$

利用不等式 $(a+b+c)^2\geqslant 2b(a+c)$, 我们得到

(8.12) $$K(L_0v)^2\geqslant-2\frac{\partial z}{\partial t}Ez-2(\beta t^{-1}+\lambda\eta t^{\eta-1})z\frac{\partial z}{\partial t}.$$

在 D_T 上积分,我们得到

$$-2\int_{D_T}\frac{\partial z}{\partial t}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)dx\,dt$$

$$-\int_{D_T}(\beta t^{-1}+\lambda\eta\, t^{\eta-1})\frac{\partial(z^2)}{\partial t}dx\,dt$$

$$\leqslant\int_{D_T}K(L_0 v)^2\,dx\,dt.$$

对左边进行分部积分并利用(8.7)，(8.8)，我们得到（对照（7.11），(7.12)）

$$(8.13)\quad \int_{D_T}[\lambda\eta(\eta-1)t^{\eta-2}-\beta t^{-2}]z^2\,dx\,dt$$

$$\leqslant\int_{D_T}K(L_0v)^2\,dx\,dt$$

$$+\int_{D_T}\sum_{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial z}{\partial x_j}dx\,dt+J_T,$$

其中 J_T 由在 B_T 上所取的那些积分组成．鉴于 (8.9)，(8.10)，当 $T\to\infty$ 时，$J_T\to 0$．在 (8.13) 中让 $T\to\infty$ 并引用 (8.2)，就推出 (8.11)．

引理 6　如果 $v\in Q_\eta$，$K=K(t;\beta,\lambda,\eta)$，$|\beta|\geqslant 1$，则

$$(8.14)\quad \int_{D_\infty}K|D_xv|^2\,dx\,dt\leqslant A\int_{D_\infty}tK(L_0v)^2\,dx\,dt$$

$$+A\int_{D_\infty}(\lambda\eta\, t^{\eta-1}+|\beta|t^{-1})Kv^2\,dx\,dt.$$

证明　考虑恒等式

$$-\int_{D_T}KvL_0v\,dx\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{D_T}K\frac{\partial(v^2)}{\partial t}dx\,dt-\int_{D_T}KvEv\,dx\,dt.$$

对右边进行分部积分并利用(8.7)，(8.8)，我们得到

$$(8.15)\quad -\int_{D_T}KvL_0v\,dx\,dt$$

$$=-\beta\int_{D_T}t^{-1}Kv^2\,dx\,dt-\lambda\eta\int_{D_T}t^{\eta-1}Kv^2\,dx\,dt+$$

$$\int_{D_T} K \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx dt + I_T,$$

其中 I_T 是在 B_T 上的积分，且当 $T \to \infty$ 时趋于零(根据(8.10)).

因此

$$(8.16) \quad \int_{D_T} K |D_x v|^2 dx dt \leqslant A \int_{D_T} K |v L_0 v| dx dt + A|\beta| \int_{D_T} t^{-1} K v^2 dx dt + A\lambda\eta \int_{D_T} t^{\eta-1} K v^2 dx dt + A|I_T|.$$

把不等式

$$\int_{D_T} K |v L_0 v| dx dt \leqslant 2 \int_{D_T} tK(L_0 v)^2 dx dt + 2 \int_{D_T} t^{-1} K v^2 dx dt$$

代入 (8.16)，并让 $t \to \infty$，就推出 (8.14).

下面我们证明一条和第 7 节引理 3 类似的引理，它在定理 8 的证明中是关键性的引理.

引理 7 如果 $v \in Q_\eta$, $K = K(t; \beta, \lambda, \eta)$, $\eta > 1$, $|\beta| > 2$, $a(t) = o(t^{-1})$，而且在 D_{T^*} 内 $v \equiv 0$，其中 T^* 是仅依赖于 ν_0、η 和函数 $a(t)$ 的某个常数(后面要确定的)，则对充分大的一切 λ (仅与 β, T^*, η 有关)，有

$$(8.17) \quad \lambda \int_{D_\infty} t^{\eta-2} K v^2 dx dt + \int_{D_\infty} t^{-1} K |D_x v|^2 dx dt \leqslant A \int_{D_\infty} K(L_0 v)^2 dx dt.$$

证明 当 $\eta > 1$，且 (与 T^*, β 有关的) λ 充分大时，(8.11) 左边的被积函数就大于 $A\lambda t^{\eta-2} K v^2$. 因此，有

$$(8.18) \quad \lambda \int_{D_\infty} t^{\eta-2} K v^2 dx dt \leqslant A \int_{D_\infty} K(L_0 v)^2 dx dt + A \int_{D_\infty} a(t) K |D_x v|^2 dx dt.$$

在 (8.18) 中以 $\beta + 1/2$ 和 $\beta - (\eta - 1)/2$ 代替 β，我们得到

(8.19) $$\lambda \int_{D_\infty} t^{\eta-1} K v^2\, dx dt \leqslant A \int_{D_\infty} tK(L_0 v)^2\, dx dt$$

$$+ A \int_{D_\infty} ta(t)K|D_x v|^2\, dx\, dt,$$

(8.20) $$\lambda \int_{D_\infty} t^{-1} K v^2\, dx dt \leqslant A \int_{D_\infty} t^{1-\eta} K(L_0 v)^2\, dx dt$$

$$+ A \int_{D_\infty} t^{1-\eta} a(t)K|D_x v|^2\, dx dt.$$

把最后那两个不等式代入 (8.14) 的右边，我们得到，当 $T^* \geqslant 1$，则

(8.21) $$\int_{D_\infty} K|D_x v|^2\, dx dt \leqslant A \int_{D_\infty} tK(L_0 v)^2\, dx dt$$

$$+ A \int_{D_\infty} ta(t)K|D_x v|^2\, dx dt.$$

在(8.21)中以 $\beta - 1/2$ 代 β，并把所得结果加到 (8.18) 式上去，我们得到

(8.22) $$\lambda \int_{D_\infty} t^{\eta-2} K v^2\, dx dt + \int_{D_\infty} [t^{-1} - 2Aa(t)]K|D_x v|^2\, dx dt$$

$$\leqslant A \int_{D_\infty} K(L_0 v)^2\, dx dt.$$

因为 $a(t) = o(t^{-1})$，所以对于某个充分大的 T^*，当 $t \geqslant T^*$ 时有 $4Aa(t) < 1/t$. 因此，如果在 D_{T^*} 内 $v \equiv 0$，则在 D_∞ 内有

$$[t^{-1} - 2Aa(t)]|D_x v|^2 \geqslant (2t)^{-1}|D_x v|^2.$$

把这个不等式代入(8.22)，我们就得到(8.17).

我们回来证明当 $\eta > 1$ 时的定理8. 设 $T_1 > T^*$ 使当 $t > T_1$ 时 $2Atc_2(t) < 1$，其中 A 为 (8.17) 中的那个常数. 设 $\zeta(t)$ 是一个二次连续可微的函数，对于某个 $T_2 > T_1$ 它满足如下条件：当 $0 \leqslant t \leqslant T_1$ 时 $\zeta(t) = 0$；当 $T_2 \leqslant t < \infty$ 时 $\zeta(t) = 1$. 由于 (7.7) 和(8.4)，函数 $v = \zeta u$ 属于 Q_η. 把(8.17)应用于它，我们得到

$$\lambda \int_{T_2}^{\infty} \int_B t^{\eta-2} K u^2\, dx dt + \int_{T_2}^{\infty} \int_B t^{-1} K|D_x u|^2\, dx dt$$

$$\leqslant A \int_{T_1}^{T_2} \int_B K(L_0 v)^2\, dx dt + A \int_{T_2}^{\infty} \int_B K(L_0 u)^2\, dx dt.$$

由(8.1)代替 $(L_0 u)^2$,并利用 $c_1(t) = o(t^{\eta-2})$ 的假定和 T_1 的选择,当 λ 充分大时,我们得到

$$(8.23) \quad \lambda \int_{T_2}^{\infty} \int_B t^{\eta-2} K u^2 \, dx dt + \int_{T_2}^{\infty} \int_B t^{-1} K |D_x u|^2 \, dx dt \leqslant 2A \int_{T_1}^{T_2} \int_B K(L_0 v)^2 \, dx dt.$$

从(8.23)推出,对于任何 $T > T_2$,

$$T^{2\beta} \exp[2\lambda T^\eta] \left\{ \lambda \int_T^{\infty} \int_B [t^{\eta-2} u^2 + t^{-1} |D_x u|^2] dx dt \right\} \leqslant 2A T_2^{2\beta} \exp[2\lambda T_2^\eta] \left\{ \int_{T_1}^{T_2} \int_B (L_0 v)^2 \, dx dt \right\}.$$

这个不等式对于充分大的 λ 不可能成立,除非左边那个积分为零.于是我们断定,在 $D_\infty - D_T$ 内 $u = 0$. 如果应用定理 6,则在 D_T 内我们也有 $u = 0$. 这就完成了 $\eta > 1$ 时本定理的证明.

为了对 $\eta = 1$ 的情形证明这个定理,我们首先要对这种情形建立和引理 7 类似的引理.

引理 8 如果 $v \in Q_1$, $K = K(t; \beta, \lambda, 1)$, $a(t) = o(t^{-2})$,且在 D_{T^*} 内 $v = 0$,其中 T^* 仅与 ν_0 和函数 $a(t)$ 有关,则对于所有的 $\beta < 0$, $\lambda < -A\beta$, 有

$$(8.24) \quad |\beta| \int_{D_\infty} t^{-2} K v^2 \, dx dt + \int_{D_\infty} t^{-2} K |D_x v|^2 \, dx dt \leqslant A \int_{D_\infty} K(L_0 v)^2 \, dx dt.$$

证明 由引理 5,

$$(8.25) \quad -\beta \int_{D_\infty} t^{-2} K v^2 \, dx dt \leqslant \int_{D_\infty} K(L_0 v)^2 \, dx dt + A \int_{D_\infty} a(t) K |D_x v|^2 \, dx dt.$$

由引理 6,并将其中的 β 换为 $\beta - 1$,有

$$(8.26) \quad \int_{D_\infty} t^{-2} K |D_x v|^2 \, dx dt \leqslant A \int_{D_\infty} t^{-1} K(L_0 v)^2 \, dx dt + A \int_{D_\infty} (\lambda t^{-2} + |\beta| t^{-3}) K v^2 \, dx dt.$$

因为 $a(t)=o(t^{-2})$，所以当 $t\geqslant T^*$ 时，在(8.25)中有 $2Aa(t)<t^{-2}$. 取 λ 使得在 (8.26) 中有 $4A\lambda<|\beta|$，如有必要可增大 T^*，以使当 $t\geqslant T^*$ 时，在 (8.26) 中有 $4A|\beta|t^{-1}<|\beta|$. 最后把(8.25)和(8.26)加起来，我们就得到 (8.24).

利用引理 8 而不用引理 7，按照和 $\eta>1$ 时同样的推理我们就可完成 $\eta=1$ 时定理 8 的证明.

从定理 8 的证明我们看出，如果以较弱的不等式

$$(8.27)\qquad \int_{B_t}(L_0u)^2\,dx\leqslant c_1(t)\int_{B_t}u^2\,dx+c_2(t)\int_{B_t}|D_xu|^2dx$$

替代微分不等式 (8.1)，定理 8 仍为真.

把 (7.22) 中定义的抛物算子 L_1 写成 (7.23) 的形式，我们得到：

推论 1 假如 $\operatorname{l.u.b.}_{x}\sum_j(\bar{b}_j(x,t))^2$ 受到和 $c_2(t)$ 一样的限制，如果以

$$(8.28)\qquad \int_{B_t}(L_1u)^2\,dx\leqslant c_1(t)\int_{B_t}u^2\,dx+c_2(t)\int_{B_t}|D_xu|^2\,dx.$$

代替不等式 (8.1)，那么定理 8 仍然有效.

最后考虑以 $T=\infty$时的第二边界条件代替 $T=\infty$时的第一边界条件的情形，并且假定，除(8.4)外，u 满足如下条件：当 $t\to\infty$ 时，对于任何 $\lambda>0$ 有

$$(8.29)\qquad e^{\lambda t\eta}\int_{B_t}|u|^2\,dx\to 0\ .$$

相应地修改 Q_η 的定义(要求满足(8.8)，(8.9)，(8.10)以及在 S_∞ 上 $\partial v/\partial\nu+gv=0$)，我们可以象从前那样进行计算，只有两处产生某些不同. 首先在(8.13)的左边出现附加项

$$(8.30)\qquad -\int_{S_T}g\frac{\partial(z^2)}{\partial t}\,dS=\int_{S_T}\frac{\partial g}{\partial t}z^2\,dS-\int_{\partial B_T}gz^2\,d\sigma,$$

其中 $d\sigma$ 是 ∂B_T 的曲面元素，其次，在(8.15)的右边出现附加项

$$(8.31)\qquad -\int_{S_T}Kg\,v^2\,dS.$$

如果 $g \leqslant 0$, $\partial g/\partial t \geqslant 0$,则在(8.31)中的项和(8.30)右边的项均为非负，于是可以省略不计. 因而定理 8 的证明就可推广到现在所考虑的情形.

如果当 $\eta > 1$ 时

$$(8.32) \qquad g(t) = o(1), \qquad \frac{\partial g}{\partial t} = o(t^{\eta-2}),$$

当 $\eta = 1$ 时

$$(8.33) \qquad g(t) = o(1), \qquad \frac{\partial g}{\partial t} = o(t^{-2}).$$

那么可以对(8.30)右边各项和(8.31)的项进行估计(利用引理 4 时要适当选取 ε;对照定理 7 的证明),使其得到类似于引理 5,6的结果. 显然可把定理 8 的证明推广到现在的情形,其细节留给读者.

我们总结以上结果:

定理 9 假定(G_∞)成立, g, $\partial g/\partial t$ 都是连续函数, $\partial B \in C^2$, $u(x, t)$ 满足 (8.1) 或 (8.27)以及 $T=\infty$时的边界条件. 如果对于某个 $\eta>1$, (8.3), (8.4), (8.29) 成立,而且或者(8.32)成立，或者 $g \leqslant 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial t} \geqslant 0$, 则在 D_∞ 上 $u \equiv 0$. 如果 (8.5) 和 (8.4), (8.29) ($\eta = 1$) 成立,而且或者(8.33)成立,或者 $g \leqslant 0$, $\partial g/\partial t \geqslant 0$,则在 D_∞ 上 $u \equiv 0$.

这条定理可推广到形如(8.28)的不等式的情形.

问　　题

1. 对于第二初值边值问题的解证明和第 4 节定理 3 类似的定理.

2. 试推广定理 1、4 到以 $Lu(x, t) = f(x, t) + k(x, t, u)$ 代替 (1.1) 的情形,其中 $k(x, t, u)$ 对于 $(x, t) \in \bar{D}$, $-\infty < u < \infty$为连续函数,且满足 $|k(x, t, u)| \leqslant \mu_0 |u|$, 其中 μ_0 充分小(依赖于 M, M' 和区域 $B_t(0 \leqslant t < \infty)$在 R^n 上投影的一致的界.)

[提示: 取 $\psi = 2\varepsilon\varphi/\delta + \varepsilon\varphi/\delta_0 + A\varphi e^{-\gamma(t-\sigma)}/\delta_0$, $\gamma = \delta/2\delta_1$, $\delta_2 = \delta/2\delta_1$. 证明 $L\psi + \varepsilon + \delta_2\psi < 0$, $Lu + \varepsilon + \mu_0|u| > 0$, 并利用第二章第 6 节定理 16.]

3. 设区域D在抛物面$|x|^2<\beta(t+1)(\beta>0)$和$t>0$内，$L$在$D$内是一致抛物的，且有有界连续系数. 假定对于每个$\tau>0$，$B_\tau=D\cap\{t=\tau\}$为非空区域，$c\leqslant 0$，且当$|x|$充分大时$\sum(a_{ii}+x_ib_i)\geqslant\lambda>0$. 试证明：如果在$D$内$Lu=k(x,t,u)$，在$D$的边界$\partial D$上$u=h$，且对某个正的常数$A$和$\delta$以及对于（仅与$L$有关的）充分小的常数$\bar{A}$，有

$$|k(x,t,u)|\leqslant\frac{\bar{A}|u|}{t+1},\qquad |h(x,t)|\leqslant\frac{A}{(t+1)^\delta},$$

则当$t\to\infty$时，在D内一致地有$u(x,t)\to 0$.

[提示：函数

$$\psi(x,t)=(t+1)^{-\theta}\exp\left[-\frac{H|x|^2}{(t+1)}\right]$$

当$\nu=\text{g.l.b.}\sum a_{ij}\xi_i\xi_j(|\xi|=1,(x,t)\in D)$，$H=1/4\nu$，$A'=H\lambda$，且$\theta\leqslant H\lambda$时，满足$L\psi+A'(t+1)^{-1}\psi<0$. 在$\partial D$上，$\psi(x,t)\geqslant(t+1)^{-\theta}\exp[-H\beta]$. 取$\theta=\min(H\lambda,\delta)$，并应用第二章第6节定理16于$M\psi$和$\pm u$（$M$为某个常数）.]

4. 对于$k(x,t,u)\equiv f(x,t)$，且$|f(x,t)|\leqslant A(t+1)^{-1-\theta}$的情形，证明和问题3类似的结果.

5. 设$w(x)$是在闭的有界区域G上的连续可微函数，且在G的边界∂G上，$w=0$. 试证明

$$\int_G(w(x))^2\,dx\leqslant A\int_G|D_xw(x)|^2\,dx,$$

其中A仅与G有关.

[提示：令$x'=(x_2\cdots,x_n)$，$m(x')=\{x_i;(x_i,x')\in G\}$，$G_1=G$在$x'$空间上的投影. 则

$$|w(x_1,x'|^2\leqslant\text{const.}\int_{m(x')}[\partial w(\xi_1,x')/\partial\xi_1]^2\,d\xi_1.$$

对$x_1\in m(x')$积分，$x'\in G_1$.（对于G上任意的连续函数$k(x)$，假定G使

$$\int_{G_1}\left[\int_{m(x_1)}k(x_1,x')dx_1\right]dx'=\int_G k(x)dx]$$

6. 试把第8节定理8、9推广到$L+c$，L_1+c的情形，其中$c(x,t)$，$\partial c(x,t)/\partial t$为连续函数，且当$\eta>1$时，$\partial c/\partial t=o(t^{\eta-2})$，当$\eta=1$时，

$$\partial c/\partial t=o(t^{-2}).$$

7. 试证明： 如果$\eta=1$，则通过对某个$\varepsilon>0$以$c_1(t)=o(t^{-1-\varepsilon})$，$c_2(t)=o(t^{-1-\varepsilon})$，$a(t)=o(c_2(t))$来代替(8.5)，可以改进第8节定理8.

[提示：令

$$g(t) = \exp\left[-\gamma\int_0^t c_2(S)\,dS\right] \qquad (\gamma>1).$$

$$\sigma(t) = \lambda\int_0^t \frac{1}{g(\tau)}\int_0^\tau g(S)c_1(S)dS]d\tau \qquad (\lambda>0).$$

证明：如果 $v\in Q_1$ 且对所有的 $t<t_0$, $v(t)=0$ (t_0 仅与 c_1, c_2, L 有关)，则

$$(*)\ \int_{D_\infty} g(t)e^{\sigma(t)}(L_0v)^2\,dxdt$$

$$\geqslant \lambda\int_{D_\infty} g(t)e^{2\sigma(t)}c_1(t)v^2\,dxdt$$

$$+\frac{1}{2}\nu_0\gamma\int_{D_\infty} g(t)e^{2\sigma(t)}c_2(t)|D_xv|^2\,dxdt.$$

(*) 的作用类似于在定理 8 的证明中引理 7,8 的作用. 为了证明(*)，可令 $z=e^{\sigma(t)}v$，并注意到左边不小于

$$-2\int_{D_\infty} g(t)\frac{\partial z}{\partial t}E_2dxdt - 2\int_{D_\infty} g(t)\frac{\partial z}{\partial t}z\frac{d\sigma}{dt}dxdt \equiv J_1+J_2.$$

利用 $d\left[g\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)\right]\Big/dt=\lambda c_1g$ 证明 J_2 等于 (*) 右边的第一项. 利用分部积分求 J_1.]

第 七 章

半线性方程. 非线性边界条件

引言 在这一章里我们将讨论两个问题. 第一个问题: 在第一初始边界条件下求解方程

$$(0.1) \qquad Lu = f(x, t, u, \partial u/\partial x_1, \cdots, \partial u/\partial x_n),$$

其中 L 为线性抛物算子; 第二个问题: 在第二初始边界条件下求解方程 $Lu = f(x, t)$,其中边界条件是非线性的,即

$$(0.2) \qquad \frac{\partial u}{\partial v} = g(x, t, u).$$

方程 (0.1) 是非线性方程最简单的类型, 称为半线性方程.我们可以把求解它的步骤作为求解一般非线性问题的标准方法.其步骤如下:

如果 w 是方程

$$Lw = f(x, t; v, \partial v/\partial x, \cdots, \partial v/\partial x_n)$$

的解,且满足和 u 同样的初始边界条件,则令 $w = Tv$. 然后证明: 当 v 限于某个适当的集合时, Tv 有定义, 且 T 有不动点.

为了证明 Tv 有定义, 要使用线性方程解的存在性理论. 为了证实 T 有不动点存在, 我们需要一些先验不等式和某些不动点定理. 对于这个问题, 有决定意义的且最困难的部份是推导先验估计.

利用前面的方法也可以解第二个问题(见 (0.2)),即如果 w 为 $Lw = f(x, t)$ 的解, 且满足和 u 同样的初始条件

$$\frac{\partial w}{\partial v} = g(x, t, v(x, t)),$$

我们就令 $w = Tv$, 然后试图证实 T 有不动点存在.

条件 (0.2) 很自然地出现在物理问题中. 如果 u 是区域中的温度,于是这条件描述 Newton 的冷却定律. 对于很高或者很低的温度就出现 g 关于 u 的非线性.

在第 4 节将处理第一个问题,在第 5 节将处理第二个问题. 在第 2, 3 节我们将推出第 4 节所需要的先验估计. 在第 1 节我们将引进拟线性方程的概念,并叙述两个不动点定理.

1. 非线性方程. 不动点定理

我们说非线性方程

$$(1.1)\qquad \Phi\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial t}\right)=0 \quad (i, j=1,\cdots,n)$$

对于解 $u(x, t)$ 是抛物的,如果

$$(1.2)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t}<0,\ \text{而}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial(\partial^2 u/\partial x_i x_j)}\right)\text{是正定的}^{1)},$$

这里,在 Φ 的自变量中我们代入 $u=u(x, t)$. 如果(1.1)对于任何一个解都是抛物的,我们就简单地说(1.1)是抛物的.

我们称如下形式的非线性抛物型方程为拟线性抛物型方程:

$$(1.3)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} \Phi_{ij}(x, t, u, \nabla_x u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} - \Phi_0(x, t, u, \nabla_x u)\frac{\partial u}{\partial t}=f(x, t, \nabla_x u),$$

其中 $\nabla_x u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$. 我们可以假定 $\Phi_0\equiv 1$, 否则,可以用 Φ_0 除这个方程. 在第 4 节里我们将讨论拟线性抛物型方程的一种特殊情形,即形如(1.3)的方程,其中 $\Phi_0\equiv 1$ 而 Φ_{ij} 仅为 (x, t) 的函数. 这些方程称为半线性方程.

在第三章第 1 节我们曾引进 Banach 空间的概念. 现在再给出几个定义,它们在本节稍后叙述不动点定理时要用到.

我们说 Banach 空间 X 的子集 Y 是预紧的(precompact),如果对

---

1) 应为 $\frac{\partial \Phi}{\partial(\partial u/\partial t)}<0$.——校者注

于 Y 中的任何序列 $\{x_m\}$，都存在一个子序列 $\{x'_m\}$，且收敛于 X 的某个元素 x，x 不必属于 Y. 如果对于 Y 中的任何序列 $\{x_m\}$ 都存在一个收敛于 Y 的元素的子序列，则称 Y 为紧集. 显然，当且仅当 Y 是预紧的闭集合时，Y 是紧的；当且仅当 Y 是紧集的子集时，Y 是预紧的.

我们说 Banach 空间 X 的子集 Y 是**有界的**，如果它含于某个有限球内，即存在一个有限的数 R，使得对于所有的 $x\in Y$，有 $\|x\|<R$. 紧集必是有界且闭的.

下面的定理给出预紧集的一个重要例子.

定理 1 设 D 是 R^n 中的有界区域，$C_{p+\alpha}$ 和 $\bar{C}_{p+\alpha}$ 是对于 D 定义的(见第三章第 8 节)，则对于任何 $0<\alpha<\beta<1$，$0\leqslant p\leqslant q$，(对 D 定义的)空间 $C_{q+\beta}$，$\bar{C}_{q+\beta}$ 的有界子集分别是 $C_{p+\alpha}$，$\bar{C}_{p+\alpha}$ 的预紧子集.

证明　只要对 $\bar{C}_{q+\beta}$ 证明本定理就够了. 显然，我们可以假定 $q=p$. 首先考虑 $p=0$ 的情形. 设 $\{u_m\}$ 是 $\bar{C}_\beta$ 中的有界序列，即对于某个常数 A，有

$$(1.4)\qquad |u_m(x)|\leqslant A,\ \frac{|u_m(x)-u_m(y)|}{|x-y|^\beta}\leqslant A,$$

$$(x\in D,\ y\in D,\ x\neq y).$$

据 Ascoli-Arzela 定理，存在一个在 D 中一致收敛的子序列. 为简单起见，仍以 $\{u_m\}$ 记这个子序列，并令 $u(x)=\lim u_m(x)$. 在 (1.4)中让 $m\to\infty$，我们就得出 $u\in\bar{C}_\beta$. 剩下要证明按 $\bar{C}_\alpha$ 的范数，$u_m\to u$，即对于任何 $\varepsilon>0$ 和所有的 $x\in D$，$y\in D$，$x\neq y$，如果 $m\geqslant m_0$ 有

$$I_m(x,y)\equiv\frac{|[u_m(x)-u(x)]-[u_m(y)-u(y)]|}{|x-y|^\alpha}\leqslant\varepsilon,$$

其中 m_0 与 x，y 无关.

现在，如果 $|x-y|<\delta$，那么

$$|I_m(x,y)|\leqslant|x-y|^{\beta-\alpha}\frac{|u_m(x)-u_m(y)|}{|x-y|^\beta}$$

$$+ |x-y|^{\beta-\alpha} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\beta}} \leqslant 2A\delta^{\beta-\alpha} = \varepsilon,$$

其中 $\delta = (\varepsilon/2A)^{1/(\beta-\alpha)}$. 另一方面，如果 $|x-y| > \delta$，则因在 D 内一致地有 $u_m(x) \to u(x)$，所以当 $m \geqslant m_0$ 时，有

$$|I_m(x, y)| \leqslant \frac{1}{\delta^{\alpha}} [|u_m(x) - u(x)| + |u_m(y) - u(y)|] < \varepsilon,$$

其中 m_0 与 x, y 无关.

这就完成了 $p = 0$ 时的证明. $p > 0$ 的证明是类似的.

设 T 是在 Banach 空间 X 的子集 Y 上定义的算子，假定 T 把 Y 映射到 X 中. 我们说 T 在点 $x^0 \in Y$ 处是连续的，如果对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $\|x - x^0\| < \delta$, $x \in Y$ 时，有

$$\|Tx - Tx^0\| < \varepsilon.$$

其等价说法是：对于 Y 中任何的序列 $\{x_m\}$，当 $x_m \to x^0$ 时，有 $Tx_m \to Tx^0$. 如果 T 在 Y 的所有点处是连续的，我们就说 T 在 Y 上是连续的.

我们以 TY 记集合 $\{Ty; y \in Y\}$.

我们称集合 $K \subset X$ 是凸集，如果当 $x \in K$, $y \in K$ 时，则对于所有的 $0 < \theta < 1$ 有 $\theta x + (1-\theta)y \in K$，即，如果 K 包含它的每一对点时也包含把每一对点连接起来的区间.

现在我们叙述 Schauder 不动点定理.

定理 2 (Schauder) 设 Y 为 Banach 空间 X 的闭的凸子集，T 为 Y 上的连续算子，使得 TY 含于 Y 中，且 TY 是预紧的，则 T 有不动点，即存在一点 $y_0 \in Y$，使得 $Ty_0 = y_0$.

与第三章第 1 节定理 1 相反，现在的不动点定理并不断言唯一性. 然而它是远比第三章定理 1 深刻的定理. 对于 X 是 Euclid 空间的情形，定理 2 就是著名的 Brouwer 不动点定理.

我们再给出 Leray 和 Schauder 的另一条不动点定理.

设 T 是定义在 X 的子集 Y 上的变换，且 $TY \subset X$，我们说 T 是紧的，如果它把 Y 的有界子集映射到 X 的紧子集中.

考虑变换

(1.5) $$y = T(x, k),$$

其中 x, y 属于 Banach 空间 X，而 k 是一实参数，它在一有界区间中变化，设其为 $a \leqslant k \leqslant b$.

假定:

(a) $T(x, k)$ 对于所有的 $x \in X$, $a \leqslant k \leqslant b$ 都有定义.

(b) 对于任何固定的 k, $T(x,k)$ 在 X 中是连续的，即，对于任何的 $x^0 \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $\|x - x^0\| < \delta$ 时，有 $\|T(x, k) - T(x^0, k)\| < \varepsilon$.

(c) 对于X的有界集合中的 x, $T(x, k)$ 关于 k 是一致连续的，即，对于任何有界集合 $X_0 \subset X$ 和任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $x \in X_0$, $|k_1 - k_2| < \delta$, $a \leqslant k_1$, $k_2 \leqslant b$ 时，有 $\|T(x, k_1) - T(x, k_2)\| < \varepsilon$.

(d) 对于任何固定的 k, $T(x, k)$是紧变换，即，它把X的有界子集映射到X的紧子集中.

(e) 存在一个(有限的)常数M，使得 $x - T(x,k) = 0$($x \in X$, $k \in [a, b]$)的所有可能的解 x 满足 $\|x\| \leqslant M$.

(f) 方程 $x - T(x, a) = 0$ 在X中有唯一解.

定理 3 (Leray-Schauder) 在 (a)—(f) 假定下，方程

$$x - T(x, b) = 0$$

的解存在.

若 $T(x, k)$ 仅对 $\|x\| \leqslant M'$, $a \leqslant k \leqslant b$ 有定义，其中 M' 为某个大于M的数，如果相应地修改假定(a)—(f)，则定理 3 仍为真.

在定理 3 的应用中，经常遇到是 $T(x, k) = kT(x)$, $a = 0$，而使 (f) 自然得到满足的情形.

2. $1 + \delta$ 型的先验估计

在第四章中我们导出了关于解按 $(2 + \alpha)$ 范数的估计. 现在我们用不同的方法对任何 $0 < \delta < 1$ 导出关于解按 $(1 + \delta)$ 范数的估计. 我们将沿用第三章第 2 节的记号. 此外，引进下列记号:

(2.1) $$\overline{|v|}^D_{1+\delta} = \overline{|v|}^D_\delta + \sum \overline{|D_x v|}^D_\delta,$$

(2.2) $$\overline{|v|}_{1-0}^{D} = \overline{|v|}_{0}^{D} + L^{D}[v],$$

(2.3) $$\overline{|v|}_{2-0}^{D} = \overline{|v|}_{1-0}^{D} + \sum \overline{|D_x v|}_{1-0}^{D},$$

其中

$$L^{D}[v] = \underset{(x,t)\in D,(x',t')\in D}{\text{l.u.b}} \frac{|v(x,t) - v(x',t')|}{|x - x'| + |t - t'|}.$$

当且仅当 $v(x, t)$ 在 D 内一致 Lipschitz 连续时，$L^{D}[v] < \infty$.

我们以 $\bar{C}_{1+\delta}(D)$ 记一切 $\overline{|v|}_{1+\delta} < \infty$ 的函数 v 的集合，并在这个集合中引进范数 $\overline{|\ |}_{1+\delta}^{D}$. $\bar{C}_{1+\delta}(D)$ 是 Banach 空间. 空间 $\bar{C}_{1-0}(D)$, $\bar{C}_{2-0}(D)$ 可以类似的方法定义. 应该注意，如果 $\delta > \alpha$，则空间 $\bar{C}_{1+\delta}(0 < \delta < 1)$ 并不包含在空间 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 中.

在不至于混淆时，我们把 $\overline{|v|}_{1+\delta}^{D}$, $\bar{C}_{1+\delta}(D)$等等缩写成$\overline{|v|}_{1+\delta}$, $\bar{C}_{1+\delta}$等等.

定义 如果可以把 $\bar{S}$ 局部地表为 (3.2.17) 的形式，其中 h, $D_x h$, $D_x^2 h$, $D_t h$ 为 Hölder 连续 (指数为 α)，则说 S 是 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 类的. 如果函数 $D_x D_t h$ 也存在，并且连续，我们就说 S 是 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 类的. 如果 $\bar{S}$ 可以局部地表为(3.2.17)的形式，其中 h, $D_x h$ 是 Lipschitz 连续的(即 $L[h] < \infty$, $L[D_x h] < \infty$)，我们就说 S 是 $\bar{C}_{2+0}$ 类的. 这些定义和在第三章第 8 节(包含(3.8.6)的那节)给出的定义完全不同.

如果 S 是属于 $\bar{C}_q$ 类的，那么可用有限多个球 V_j 覆盖 $\bar{S}$，使得 $S_j = \bar{S} \cap V_j$ 能表示为 (3.2.17) 的形式，其中 $h \in \bar{C}_q$. 今后就取这样的有限覆盖. 利用 (3.2.17)，给定在 $\bar{S}$ 上的函数 v，可在每一个 S_j 上，写成某个区域 S_j^* 内的$(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n, t)$的函数 我们定义 $|v|_p^S$ 为 $\max_j |v|_{p}^{S_j^*}$，如果 $|v|_p^S < \infty$，则称 v 在 S 上属于 $\bar{C}_p$.

已给线性抛物算子

(2.4) $$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u - \frac{\partial u}{\partial t},$$

考虑第一初值边值问题

$$Lu(x, t) = f(x, t) \qquad (\text{在 } D + B_T \text{内}), \tag{2.5}$$

$$u = 0 \qquad (\text{在 } \bar{B} + S \text{ 上}). \tag{2.6}$$

我们需要下面的假定:

(A) 在 $\bar{D}$ 上 L 是抛物的，即，存在正常数 H_0，使得对于每一 $(x, t) \in \bar{D}$ 和每一实矢量 ξ，

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i \xi_j \geqslant H_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2. \tag{2.7}$$

(B) a_{ij} 在 $\bar{D}$ 上 Hölder 连续(指数为α)，b_i 和 c 在 $\bar{D}$ 上连续，此外，a_{ij} 在 S 上属于 $\bar{C}_{1-0}$. 于是

$$\sum \overline{|a_{ij}|}_{\alpha}^{D} + \sum |b_i|_0^D + |c|_0^D \leqslant H_1, \tag{2.8}$$

$$\sum |a_{ij}|_{1-0}^{S} \leqslant H_2. \tag{2.9}$$

我们现在叙述 $(1 + \delta)$ 型先验估计.

定理 4 假定 S 不但属于 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 而且属于 $\bar{C}_{2-0}$，并且 (A)，(B)成立. 设 $f(x, t)$是 $\bar{D}$ 上的连续函数，它在 ∂B 上为零，而 $u(x, t)$ 为 (2.5)；(2.6) 的解. 于是对于任何正的 $\delta < 1$，有仅依赖于 δ, D, H_0, H_1 和 H_2 的常数 K 存在，使得

$$\overline{|u|}_{1+\delta}^{D} \leqslant K|f|_0^D. \tag{2.10}$$

在本节下面和下一节将给出本定理的证明. 我们将利用在第三章和第五章导出的线性方程的存在定理. 因为利用在第三章导出的线性方程的存在性定理，可把定理 4 用于解拟线性方程，所以有理由把(2.10)视为先验估计.

在下文中 (如无明确的相反说明)，将以 K 记每一个仅依赖于 δ, D 和 H_i 的常数. 我们从下面的引理开始.

引理 1 只要在 f, c 和 b_i 都是 $\bar{D}$ 上为 Hölder 连续 (指数为 α) 的补充假定下证明定理 4 就够了.

证明. 假定在引理中所说的补充假定下已证明了定理 4. 那么我们必须在不作出这些补充假定下证明定理 4. 据 Weierstrass 逼近定理，存在多项式的序列 $\{f^m\}$, $\{b_i^m\}$, $\{c^m\}$，使得当 $m \to \infty$时

$$\varepsilon_m = |f^m - f|_0^D \to 0, \ |b_i^m - b_i|_0^D \to 0, \ |c^m - c|_0^D \to 0. \tag{2.11}$$

以 L_m 记分别以 b_i^m, c^m 代替 b_i, c 时的算子 L. 我们可以修改 f^m, 以便它们仍然是连续可微的,并且 $\varepsilon_m \to 0$,而在 ∂B 上 $f^m = 0$. 事实上,用一个在 ∂B 上为零,在 ∂B 的某个邻域外等于 1 的适当光滑函数(见第一章问题 1)去乘每个 f^m 就可以做到这一点. 据第三章第 3 节定理 7,下列问题的解 u_m 存在:

(2.12) $\quad Lu_m = f^m$ (在 $D + B_T$ 内), $u_m = 0$ (在 $B + S$ 上),

且由引理的假定有

$$(2.13)\qquad \overline{|u_m|}_{1+\delta} \leqslant K|f^m|_0 \leqslant K(|f|_0 + \varepsilon_m).$$

利用 Ascoli-Arzela 定理从(2.13)推出,存在 $\{u_m\}$ 的一个子序列,为简单计,我们仍记作 $\{u_m\}$,使得当 $m \to \infty$ 时,在 D 内一致地有

$$(2.14)\qquad u_m \to v, \qquad \nabla_x u_m \to \nabla_x v,$$

其中 $v(x) = \lim u_m(x)$,由定义可知. 从(2.13)和(2.14)我们得到(正象在第三章第 2 节定理 3 的证明中那样)

$$(2.15)\qquad \overline{|v|}_{1+\delta} \leqslant K \lim_{m\to\infty}(|f|_0 + \varepsilon_m) = K|f|_0.$$

如果我们证得,当 $m \to \infty$ 时

$$(2.16)\qquad |u - u_m|_0^D \to 0,$$

就会推出 $u \equiv v$,因此据(2.15),就完成了(2.10)的证明;因而推出引理 1.

为了证明(2.16)我们注意到

$$L(u_m - u) = L_m u_m + (L - L_m)u_m - Lu$$
$$= (L - L_m)u_m + f^m - f \equiv \bar{f}_m.$$

从(2.11), (2.13)推出,当 $m \to \infty$ 时,在 D 内一致地有 $(L - L_m)u_m \to 0$, $f^m - f \to 0$. 因此,当 $m \to \infty$ 时

$$|\bar{f}_m|_0^D \to 0.$$

于是,由极值原理(即由(2.3.12))我们得到,当 $m \to \infty$ 时

$$|u_m - u|_0^D \leqslant K|\bar{f}_m|_0^D \to 0,$$

于是(2.16)证毕.

鉴于引理 1,在下文中我们可以假定 f, c 和 b_i 在 $\bar{D}$ 上 Hölder 连续(指数为 α).

以如下方法把 L 的系数扩张到包含 $\bar{D}$ 的闭柱体 Ω_0 上，Ω_0 在 $t=0$ 上的底为 E_0：使扩张后的函数 Hölder 连续（指数为 α），并使得(2.7)和(2.8)在 Ω_0 内成立，这里常数 H_0, H_1 可能由其他仅与 H_0, H_1 有关的常数来代替（见第三章第 7 节引理 1).

设 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 是在 Ω_0 中(对于 L 的扩张算子的)在第一章所构造的基本解. 今后我们将使用分别由 E_0 和 Ω_0 代替 D 和 Ω 的(1.2.4)—(1.2.6)和(1.2.8)的记号，以及在第一章推出的若干不等式. 我们还需要下列不等式:

当 $|x-\xi|>2|x-x'|$ 时

(2.17)
$$|D_xZ(x,t;\xi,\tau)-D_{x'}Z(x',t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{\mu}}\frac{|x-x'|}{|x-\xi|^{n+2-2\mu}},$$

以及当 $t'>t>\tau$ 时,对于任何 $0<\mu<1$

(2.18)
$$|D_xZ(x,t;\xi,\tau)-D_xZ(x,t';\xi,\tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{|t-\tau|^{\mu}}\frac{t'-t}{|x-\xi|^{n+3-2\mu}}.$$

这里 D_x 是任意偏导数 $\partial/\partial x_i$. 利用中值定理和(1.3.18)即可证明(2.17),(2.18)的证明是类似的.

设 E 为 B 的任意子区域，且 $\bar{E}\subset B$. 对于某个 $\sigma\leqslant T$，设 $\Omega=\bar{E}\times[0,\sigma]$. 我们需要下面的引理.

引理 2 对于任何 $0<\delta<1$, 存在仅依赖于 E, δ, H_0, H^1 的常数 K, 使得对于 Ω 上的每个连续函数 $h(x,t)$, 函数

(2.19)
$$v(x,t)=\int_0^t\int_E\Gamma(x,t;\xi,\tau)h(\xi,\tau)d\xi\,d\tau$$

满足不等式

(2.20)
$$\overline{|v|}_{1+\delta}^{\Omega}\leqslant K\sigma^{\gamma}|h|_0^{\Omega}\qquad\left(\gamma=\frac{1-\delta}{2}\right).$$

读者也许注意到这一引理和第五章第 4 节定理 6 之间的类似之处. 不过，本引理给出随 σ 趋于零的关于 $\partial v/\partial x_i$ 的 Hölder 系数的界. 这一点对于本引理的应用是十分重要的.

证明　在下面的证明中，我们将以K记种种仅依赖于E, δ, H_0, H_1的常数. 据第一章第5节(见(1.5.1)—(1.5.4))有

$$
(2.21)\qquad v(x,t)=\int_0^t\int_E Z(x,t;\xi,\tau)h(\xi,\tau)d\xi\,d\tau
+\int_0^t\int_E Z(x,t;\xi,\tau)h_1(\xi,\tau)d\xi\,d\tau
=v_1(\xi,\tau)+v_2(\xi,\tau),
$$

其中

$$
(2.22)\qquad h_1(x,t)=\int_0^t\int_E \Phi(x,t;\xi,\tau)h(\xi,\tau)d\xi d\tau.
$$

利用(1.4.8)我们得到

$$
(2.23)\qquad |h_1|_0\leqslant K|h|_0.
$$

为了证明(2.20),只要证明下列不等式就够了:

$$
(2.24)\qquad I_1\equiv|D_xv_1(x,t)-D_{x'}v_1(x',t)|\leqslant K|x-x'|^\delta\sigma^\gamma|h|_0,
$$

$$
(2.25)\qquad I_2\equiv|D_xv_1(x,t)-D_xv_1(x,t')|\leqslant K|t-t'|^{\delta/2}\sigma^\gamma|h|_0.
$$

事实上,利用(2.21), (2.23)我们断定

$$
(2.26)\qquad H_\delta[D_xv]\leqslant K\sigma^\gamma|h|_0.
$$

此外,我们容易修改下面用以证明(2.24),(2.25)的方法来得到关于 D_xv_1 和 $H_\delta[v_1]$ 的类似的界. (利用(2.23))类似地可以得到 D_xv_2, $H_\delta[v_2]$ 的界,因此也可得到 D_xv, $H_\delta[v]$ 的界. 把这些界和(2.26)综合起来就完成(2.20)的证明.

设E_1为E的点ξ的集合,其中ξ适合$|\xi-x|>2|x-x'|$. 令$E_2=E-E_1$. 为了证明(2.24),据第一章第3节定理3, 顾及D_x可以和v_1的积分交换, 利用(1.49),(2.17),只要$0<\mu<1$我们就立即得到

$$
(2.27)\qquad I_1\leqslant K|h|_0\int_0^t\int_{E_1}\frac{1}{(t-\tau)^\mu}\frac{|x-x'|}{|x-\xi|^{n+2-2\mu}}d\xi\,d\tau
+K|h|_0\int_0^t\int_{E_2}\frac{1}{(t-\tau)^\mu}\Big(\frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu}}
$$

$$+\frac{1}{|x'-\xi|^{n+1-2\mu}}\Big)d\xi\,d\tau.$$

因此，当 $2\mu>1$，有

$$I_1\leqslant K|h|_0\sigma^{1-\mu}(|x-x'|^{1-(2-2\mu)}+|x-x'|^{2\mu-1})$$
$$=2K|h|_0\sigma^{1-\mu}|x-x'|^{2\mu-1}.$$

取 $2\mu-1=\delta$，设 $\gamma=\dfrac{1-\delta}{2}$，则有

$$I_1\leqslant K|x-x'|^{\delta}|h|_0\sigma^{\gamma}.$$

剩下要证明(2.25)．我们可以假定 $t'>t$．设 E_3 为 E 中所有满足 $|\xi-x|>(t'-t)^{1/2}$ 的点 ξ 的集合，并令 $E_4=E-E_3$．利用(1.4.9)，(2.18)，对于任何 $0<\lambda<1$，$0<\mu<1$，我们得到

$$(2.28)\qquad I_2\leqslant K|h|_0\int_0^t\int_{E_3}\frac{t'-t}{(t-\tau)^{\mu}}\frac{1}{|x-\xi|^{n+3-2\mu}}d\xi\,d\tau$$
$$+K|h|_0\int_t^{t'}\int_{E_3}\frac{1}{(t'-\tau)^{\lambda}}\frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\lambda}}d\xi\,d\tau$$
$$+K|h|_0\int_0^{t'}\int_{E_4}\frac{1}{(t'-\tau)^{\mu}}\frac{1}{|x-\xi|^{n+1-2\mu}}d\xi d\tau.$$

因此，当 $2\lambda<1$，$2\mu>1$ 时，有

$$I_2\leqslant K|h|_0\{(t'-t)\sigma^{1-\mu}(t'-t)^{(2\mu-3)/2}$$
$$+(t'-t)^{1-\lambda}(t'-t)^{(2\lambda-1)/2}$$
$$+\sigma^{1-\mu}(t'-t)^{(2\mu-1)/2}\}.$$

取 $2\mu-1=\delta$，并注意到当 $\gamma=(1-\delta)/2$ 时，

$$(t'-t)^{1/2}\leqslant(t'-t)^{\delta/2}\sigma^{\gamma},$$

就推出不等式(2.25)．因而引理 2 证毕．

我们以下面的附注结束本节．

附注　将引理 2 应用于(以 E_0 代替 D 的)(1.2.8)右边的第二项就得出，如果 ξ 在 E 的边界 ∂E 上变化，而 x 限于 E 内部的闭区域 E_* 上，则 Γ 作为 (x,t) 的函数(我们写成 $\Gamma=\Gamma(\cdot,\cdot;\xi,\tau)$) 满足

$$(2.29)\qquad \overline{|\Gamma(\cdot,\cdot;\xi,\tau)|}^{\Omega_*}_{1+\delta}\leqslant K\sigma^{\gamma}\quad\left(0<\delta<1,\ \gamma=\frac{1-\delta}{2}\right)$$

其中 $\Omega_* = E_* \times [0, \sigma]$，而$K$仅依赖于 E_*, E, δ, H_0, H_1; 这里当 $t < \tau$ 时,定义 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 为零.

3. 定理 4 证明的完成

我们把剩下的证明分为三部分

3.1 对小的 t 的内估计. 我们将在 D_σ 内部估计 u 的 $(1+\delta)$ 范数. 因为 f 和 L 的系数在 $\bar{D}$ 上 Hölder 连续，所以由第三章第 3 节定理 7，u 属于 $\bar{C}_{2+\alpha}(D)$. 设 G，E 为 B 的子区域，使得 $G \subset \bar{G} \subset E \subset \bar{E} \subset B$，而 E 的边界 ∂E 对于某个 $0 < \beta < 1$ 是 $C^{1+\beta}$ 类的（$C^{1+\beta}$ 的定义见第三章第 8 节）. 如果 σ 充分小，则柱体 $\Omega = \bar{E} \times [0, \sigma]$ 含于$D + B$内,以$\overline{|u|}_{q,\sigma,A}$ 记柱体 $A \times [0, \sigma]$ 中 u 的 q 范数,以$\overline{|u|}_{q,\sigma}$ 记 D_σ 中 u 的 q 范数. 现在我们估计

$$\overline{|u|}_{1+\delta,\sigma,G}.$$

从第五章第 3 节定理 2 和由(5.3.5),(5.3.6),(5.3.8)解的构造可以推出.

$$(3.1)\qquad u(x, t) = -\int_0^t \int_E \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi\, d\tau + \int_0^t \int_{\partial E} \Gamma(x, t; \xi, \tau) k(\xi, \tau) d\Sigma\, d\tau,$$

其中 $d\Sigma$ 为 ∂E 上的曲面元素，k 为如下积分方程的解

$$(y \in \partial E,\ 0 < t \leqslant \sigma):$$

$$(3.2)\qquad k(y, t) = 2\int_0^t \int_{\partial E} \frac{\partial \Gamma(y, t; \xi, \tau)}{\partial \nu(y, t)} k(\xi, \tau) d\Sigma\, d\tau - 2\int_0^t \int_E \frac{\partial \Gamma(y, t; \xi, \tau)}{\partial \nu(y, t)} f(\xi, \tau) d\xi\, d\tau - 2\frac{\partial u(y, t)}{\partial \nu(y, t)}.$$

把 k 展成类似于(5.3.10)的级数,我们得到

$$(3.3)\qquad |k|_0 \leqslant K(|f|_{0,\sigma,E} + \sum |D_x u|_{0,\sigma,E}),$$

其中 $\sum$ 是对所有关于 x 的一阶导数取的. 只要应用引理 2 和第 2 节末的附注,我们就得到不等式

$$(3.4)\qquad \overline{|u|}_{1+\delta,\sigma,G} \leqslant K\sigma^{\gamma}[\,|f|_{0,\sigma,E} + \sum |D_x u|_{0,\sigma,E}]$$
$$\left(\gamma = \frac{1-\delta}{2}\right),$$

其中K依赖于G，E，δ，H_0和H_1.

3.2 对小的 t 的边界估计 存在有限多个$(n+1)$维开球$V_j(j=1,\cdots,j_0)$，使得每一部分 $S_j = \bar{S}\cap V_j$ 都可整体地表为(3.2.17)的形式，其中$h\in \bar{C}_{2+\alpha}$和$h\in \bar{C}_{2-0}$. 如果我们取G_0为B的子区域，使得$B-G_0$的所有的点充分接近于∂B，那么对于所有充分小的σ，$\overline{D_\sigma - \Omega}$被$V_j$所覆盖，其中$\Omega = \bar{G}_0\times[0,\sigma]$. 我们将在$D_j = D_\sigma\cap V_j$的子集中估计$u$的$(1+\delta)$范数.

为简单起见，假定对于S_j(3.2.17)成立(这里取$i=n$). 在D_j中作变换

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} y_m &= x_m \qquad (m=1,\cdots,n-1),\\ y_n &= x_n - h(x_1,\cdots,x_{n-1},t), \end{aligned}$$

我们可以假定，这个变换一对一地把D_j映射到半空间$y_n>0$中的区域Δ上. 设Σ是$S_\sigma\cap V_j$的象的内部，它在$y_n=0$上. 置

$$U(y,t)=u(x,t),\ F(y,t)=f(x,t),\ C(y,t)=c(x,t),$$

则方程$Lu=f$变为

$$(3.6)\qquad \Lambda U \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y,t)\frac{\partial^2 U}{\partial y_i\,\partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i(y,t)\frac{\partial U}{\partial y_i} + C(y,t)U - \frac{\partial U}{\partial t} = F(y,t),$$

其中

$$(3.7)\qquad A_{ij} = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\frac{\partial y_i}{\partial x_\lambda}\frac{\partial y_j}{\partial x_\mu},$$
$$B_i = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} + \sum_{\lambda} b_\lambda \frac{\partial y_i}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial y_i}{\partial t},$$

由我们的假定推出，A_{ij}，B_i，C在$\bar{\Delta}$上是Hölder连续的(指数为α)，且A_{ij}在Σ上是C_{1-0}类的.

我们需要对Λ在Δ中构造"局部的" Green 函数，也就是需要

在Δ中构造Λ的基本解，使它在Σ上为零（比较(4.6.3)）。我们把G构造成推广（4.6.3）的形式． 为此，我们需要Λ中 $\partial^2/\partial y_i \partial y_n$ $(i < n)$的系数在Σ上为零．于是我们作另外的坐标变换，使得在新坐标系下Λ有上述性质．我们试作变换

$$(3.8)\quad z_i = \varphi_i(\bar{y}, t) + y_n \phi_i(y, t) \qquad (i = 1, \cdots, n-1),$$
$$z_n = y_n \phi_n(\bar{y}, t) \qquad \text{其中 } \bar{y} = (y_1, \cdots, y_{n-1}).$$

我们分别以Δ'，Σ'记Δ和Σ的象．置

$$(3.9)\quad U'(z, t) = U(y, t),\ F'(z, t) = F(y, t),$$
$$C'(z, t) = C(y, t),$$

于是，对于U'我们得到方程

$$(3.10)\quad \Lambda' U' = \sum_{i,j=1}^{n} A'_{ij}(z, t) \frac{\partial^2 U'}{\partial z_i\, \partial z_j} + \sum_{i=1}^{n} B'_i(z, t) \frac{\partial U'}{\partial z_i}$$
$$+ C'(z, t) U' - \frac{\partial U'}{\partial t} = F'(z, t),$$

其中

$$(3.11)\quad A'_{ij} = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \frac{\partial z_i}{\partial y_\lambda} \frac{\partial z_j}{\partial y_\mu},$$
$$B'_i = \sum_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 z_i}{\partial y_\lambda \partial y_\mu} + \sum_{\lambda} B_\lambda \frac{\partial z_i}{\partial y_\lambda} - \frac{\partial z_i}{\partial t}.$$

在Σ'上我们命$A'_{in} = 0$，其中$i = 1, \cdots, n-1$，(Σ'在$z_n = 0$上)．注意到在Σ'上$\partial z_n/\partial y_\mu = 0$ $(\mu < n)$，我们就得到方程(只要在 Σ'上$\partial z_n/\partial y_n \neq 0$)

$$(3.12)\quad \sum_{\lambda=1}^{n-1} A_{\lambda n}(\bar{y}, 0, t) \frac{\partial \varphi_i(\bar{y}, t)}{\partial y_\lambda} + A_{nn}(\bar{y}, 0, t) \phi_i(\bar{y}, 0, t) = 0$$
$$(1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

如果

$$(3.13)\quad \phi_n = 1,\ \varphi_i = y_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1),$$
$$\phi_i(\bar{y}, 0, t) = -\frac{A_{in}(\bar{y}, 0, t)}{A_{nn}(\bar{y}, 0, t)} = \gamma_i(\bar{y}, t)$$
$$(1 \leqslant i \leqslant n-1),$$

那些方程得到满足.

在把 ψ 扩张到 $y_n > 0$ 之前，我们要引进若干记号. 设 Σ_0' 记 $\Sigma' + [\bar{\Sigma}' \cap \{t = 0\}]$ 的任意 n 维闭矩形，它有一面在 $t = 0$ 上. B_0 为 Δ' 的开的下底，Δ_0' 为任意开的柱体，它的闭包包含在 $\Delta' + B_0' + \Sigma_0'$ 中，以 Σ_0' 作为其侧边界的一部分. E_0' 记 Δ_0' 的底.

存在这样一个 $(\xi, \tau) = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, \tau)$ 的三次连续可微函数 $\rho(\xi, \tau)$，它在集合 $N = N_0 \times [0, \sigma]$ 之外为零，其中 N_0 为 ξ 空间中原点的邻域，且 ρ 满足如下条件:

$$(3.14) \qquad |D_\xi^a D_\tau^b \rho(\xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{\sigma^b} \qquad (0 \leqslant a + b \leqslant 3),$$

$$(3.15) \qquad \int_N \rho(\xi, \tau) d\xi\, d\tau = 1.$$

而且，当 N_0 与 σ 无关时，(3.14)中的常数也与 σ 无关. 事实上，我们可以使 $\rho(\xi, \tau)$ 有 $g_1(\xi) g_2(\tau)$ 的形式，其中 g_1, g_2 可以用第一章问题 1 的方法来构造.

设 $B_0, E_0, \Sigma, \Delta_0$ 是 (y, t) 空间中的集合，在(3.8)之下它们的象分别是 $B_0', E_0', \Sigma_0', \Delta_0'$. 选 N_0 这样小，使当 $\xi \in N_0$, $(\bar{y}', t) \in \Sigma_0$ 时，对于所有的 $(\bar{y}, y_n, t) \in \bar{\Delta}_0$，有 $(\bar{y} + y_0\xi, t) \in \Sigma$. 现在我们在 $\bar{\Delta}_0$ 上定义

$$(3.16) \qquad \psi_i(y, t) = \int_N \gamma_i(\bar{y} + y_n\xi, t + y_n\tau) \rho(\xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

注意，当 $0 < t < \sigma$ 时，对于某个与 σ 无关的常数 K_0 有

$$0 < t + y_n\tau \leqslant K_0\sigma.$$

因为在前面所要考虑的一切事项中无需作任何其他的改变可用 $K_0\sigma$ 代替 σ，所以我们可以假定 $\gamma_i(\bar{y}, t)$ 不仅对于 $0 \leqslant t \leqslant \sigma$ 有定义，而且对于 $0 \leqslant t \leqslant K_0\sigma$ 也有定义，因此，$\psi_i(y, t)$ 在 $\bar{\Delta}_0$ 上完全有定义.

从(3.15)推出，对于 $y_n = 0$, $\psi_i(y, t)$ 与 $\gamma_i(\bar{y}, t)$ 全同.

在(3.16)的积分中作代换 $\bar{y}_j + y_n\xi_j = \xi_j'$, $t + y_n\tau = \tau'$，我们得到

$$(3.17)\qquad \phi_i(y,t)=\int \gamma_i(\xi',\tau')\rho\left(\frac{\xi'-\bar{y}}{y_n},\ \frac{\tau'-t}{y_n}\right)\frac{d\xi'd\tau'}{y_n^n},$$

由这个等式我们断定，对于 $y_n>0$，$\phi_i(y,t)$ 是三次连续可微的.

利用 $\gamma_i(\xi,\tau)$ 关于 (ξ,τ) 为 Lipschitz 连续的事实，我们可进而证明在 Δ_0 内 D_yz, D_y^2z, D_yD_tz 都是有界函数. 事实上，据(3.8)，(3.13)，只要对于 $y_n\phi_i(y,t)$ 证明这一断言就够了. $D_y(y_n\phi_i)$ 的有界性可利用公式(3.17)推出. 其次，如果（在(3.17)中）对 y 微分之后再代回 $\xi'_j=\bar{y}_j+y_n\xi_j$，$\tau'=t+y_n\tau$，如果 $D_y=\partial/\partial y_k$ $(k<n)$，我们就得到

$$(3.18)\qquad D_y(y_n\phi_i)=\int_N \gamma_i(\bar{y}+y_n\xi,\ t+y_n\tau)D_\xi\rho(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

因为 γ_i 是 Lipschitz 连续的，所以对某个 y_h 或者 t 作 $D_y(y_n\phi_i)$ 的有限差分，并利用对于 $a=1$，$b=0$ 的(3.14)，我们就可得知 $D_y^2(y_n\phi_i)$ 和 $D_tD_y(y_n\phi_i)$ 与 σ 无关地有界. 第一个 D_y 为 $\partial/\partial y_n$ 的情形可同样处理. 最后，$D_t(y_n\phi_i)$ 的有界性可在(3.16)中对 t 取有限差分推出.

变换(3.8)（连同(3.13)，(3.16)）是一对一的，而且当 y_n（与 σ 无关）充分小时，它的 Jacobi 行列式不为零. 显然，我们可以假定这些条件都满足.

因为变换(3.8)仅使距离改变一个与 σ 无关的有界的因子，由上面所证明的 z_t（作为 (y,t) 的函数）的可微性和有界性性质推出，A'_{ij}，C' 在 $\bar{\Delta}'_0$ 上是 Hölder 连续的（指数为 α），它们的 α 范数与 σ 无关，而 B'_i 在 $\bar{\Delta}'_0$ 的闭子集上是 Hölder 连续的（指数为 α），从 $z_n=0$ 到这些闭子集的距离是有界的，并且 B'_i 在 $\bar{\Delta}'$ 上也是有界的，且与 σ 无关.

现在我们来构造关于变量 (z,t) 的"局部" Green 函数. 以 Δ'_* 记 Δ'_0 对于超平面 $z_n=0$ 的反射，并置 $\Delta''_0=\Delta'_0\cup\Sigma'_0\cup\Delta'_*$. 不失一般性，可以假定 Δ''_0 是底为 E'' 的柱体，使得 $\partial E''$ 属于 $C^{1+\beta}$. 以 z^* 记点 $(z_1,\cdots,z_{n-1},-z_n)$，它是 z 对于超平面 $z_n=0$ 的反射. 我们把 Λ' 的系数扩张到 $\bar{\Delta}'_0-\Sigma'_0$，其方法如下:

$A'_{ij}(z^*, t) = A'_{ij}(z, t)$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1,\ 1 \leqslant j \leqslant n-1$，或者 $i = j = n)$，$A'_{in}(z^*, t) = A'_{ni}(z^*, t) = -A'_{in}(z, t)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，$B'_i(z^*, t) = B'_i(z, t)$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$，$B'_n(z^*, t) = -B_n(z, t)$，$C'(z^*, t) = C'(z, t)$.

注意，除 B'_n 外，所有扩张后的系数在 $\bar{\Delta}''_0$ 上是 Hölder 连续的(指数为 α)，B'_n 在 $\bar{\Delta}''_0$ 上是有界的，且在 $\bar{\Delta}''_0$ 的闭子集上是 Hölder 连续的(指数为 α)，这些闭子集到 $z_n = 0$ 的距离有界.

我们可以用第一章的方法构造方程 $\Lambda'u = 0$ 在 $\bar{\Delta}''_0$ 中的基本解 $\Gamma'(z, t; \xi, \tau)$(对照第一章问题 7). 我们发现，$\Gamma'(z, t; \xi, \tau)$对于 $(z, t) \in \bar{\Delta}''_0$，$(\xi, \tau) \in \bar{\Delta}''_0$ $(t > \tau)$ 是连续函数，对于每一固定的 $(\xi, \tau) \in \bar{\Delta}''_0$，$\Gamma'$ 满足方程 $\Lambda'\Gamma' = 0$，其中 $(z, t) \in \Delta'_0 \cup \Delta'_*$ (但 $(z, t) \in \Sigma'_0$ 时未必满足，因为在 $z_n = 0$ 上 B'_n 是间断的).

由我们把 Λ' 的系数扩张到 Δ'_* 的方法推出，$\Gamma'(z^*, t; \xi, \tau)$ 对于任何固定的 $(\xi, \tau) \in \bar{\Delta}''_0$，作为 (z, t) 的函数，在 $\Delta'_0 \cup \Delta'_*$ 内也是 $\Lambda'\Gamma' = 0$ 的解. 因此，函数

$$G'(z, t; \xi, \tau) = \Gamma'(z, t; \xi, \tau) - \Gamma'(z^*, t; \xi, \tau) \tag{3.19}$$

是 $\Lambda'u = 0$ 在 $\bar{\Delta}'_0$ 上的基本解. 还有，当 $z_n = 0$ 时，$G'(z, t; \xi, \tau) = 0$. 于是 G' 是所求的"局部" Green 函数，它在 $\bar{\Delta}'_0$ 上有 $\Lambda'u = 0$.

容易看出，若把引理 2 的证明稍加修改，则当以 G' 代替 Γ，以 E'_0 (Δ'_0 的底)代替 E 时，引理 2 仍为真.

下面我们类似于内估计的证明进行下去. 首先希望把 U' 表为如下形式:

$$U'(z, t) = -\int_0^t \int_{E'_0} G'(z, t; \xi, \tau) F'(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_{S'} G'(z, t; \xi, \tau,) k'(\xi, \tau) dS' d\tau,$$

其中 S' 为 E'_0 不在 $z_n = 0$ 上的那部分边界. 因为 G' 的跳跃关系和 Γ' 的跳跃关系是一样的，所以我们得到对于 k' 的一个类似于(3.2)的积分方程.

其次，注意到不等式(5.2.12)不仅对于 $\Gamma'(z, t; \xi, \tau)$ $(z \in S'$,

$\xi\in S'$) 成立，而且对于 $\Gamma'(z^*, t; \xi, \tau)$ ($z^*\in S', \xi\in S'$) 也成立。事实上，如果我们假定（因为我们可以假定）所有 S' 的法线在 $z_n=0$ 附近和 z_n 轴正交（于是对于 $z\in S'$,充分小的 z_n, N_z 和 N_{z^*} 指向同一方向)，则对于 $\Gamma'(z^*, t; \xi, \tau)$的证明和对于 $\Gamma'(z, t; \xi, \tau)$ 的证明是一样的(见(5.2.13)—(5.2.18). 上面关于 $U'(z, t)$ 的表示式可由类似于第五章第 3 节定理 2 的定理推出（其证明也与第五章定理 2 类似).

对 G' 利用(5.2.12),我们导出对 k' 的类似于(3.3)的不等式.于是,如果 A_0' 是 $\bar{E}_0'$ 的任意子集,它到 S' 的距离有界,那么我们就得到

(3.20) $\quad \overline{|U'|}_{1+\delta,\sigma,A_0'}\leqslant K\sigma^\gamma(|F'|_{0,\sigma,E_0'}+\sum|D_zU'|_{0,\sigma,E_0'})$.

求变换(3.8),(3.5)的逆变换,并以 R_j 记 (x, t) 空间中这样的集合,它在 (z, t) 空间中的象为一柱体 $A_0'\times[0, \sigma]$,（利用 z_i, D_yz_i, D_tz_i, $D_y^2z_i$, $D_yD_tz_i$ 关于 σ 的一致有界性)，我们得到

(3.21) $\quad \overline{|u|}_{1+\delta}^{R_j}\leqslant K\sigma^\gamma(|f|_{0,\sigma}+\sum|D_xu|_{0,\sigma})$.

显然,如果 σ 充分小，我们可以这样来选取 Δ_0' 和 A_0'，使得 $R_j(j=1,\cdots,j_0)$ 覆盖住 $D_\sigma-\Omega$，其中 Ω 的定义已在 3.2 的开始部份给出. 在(3.4)中取 G 为 G_0的子区域,使得

$$[G\times(0,\sigma)]\cup\left(\bigcup_{j=1}^{j_0}R_j\right)$$

覆盖 D_σ,并把(3.4),(3.21)综合起来,我们就得到

(3.22) $\quad \overline{|u|}_{1+\delta,\sigma}\leqslant K\sigma^\gamma(|f|_{0,\sigma}+\Sigma|D_xu|_{0,\sigma})$.

取 σ 使 $2K\sigma^\gamma\leqslant 1$,我们就得到不等式

(3.23) $\quad \overline{|u|}_{1+\delta,\sigma}\leqslant K\sigma^\gamma|f|_{0,\sigma}$,

其中 K 仅依赖于 D, δ, H_0, H_1 和 H_2.

3.3 证明的完成 在(3.23)中已估计了 u 在D_σ中的 $(1+\delta)$ 型范数,现在可以逐步地继续估计 u 在 D 中的$(1+\delta)$范数. 我们首先注意到,从(3.23)的证明可知,对于任何 $0\leqslant\rho\leqslant T-\sigma$ 以及对于在 $D_{\rho+\sigma}-D_\rho$ 内 $Lu=f$ 的任意解 u（它在 $B_\rho=D\cap\{t=\rho\}$ 和 $S_{\rho+\sigma}-S_\rho$ 上为零),只要 σ 是充分小且依赖于 D,δ,H_0,H_1,H_2,但与 ρ 无关,不等式

(3.24) $$\overline{|u|}_{1+\delta} \leqslant K\sigma^{\gamma}|f|.$$

就在 $D_{\rho+\sigma}-D_{\rho}$ 内成立. 今后σ是对于所有的 $0\leqslant\rho\leqslant T-\delta$ 使得(3.24)成立的固定正数。

我们引进区域

(3.25) $$D^{i}=D\cap\left\{i\frac{\sigma}{2}<t<(i+2)\frac{\sigma}{2}\right\},$$

并以$\widehat{|v|}_{q,i}$ 记 v 在 D^{i} 中的 q 范数.

设$\zeta(t)$为 t 的二次连续可微函数,对于 $t\leqslant\frac{1}{2}$ 它为零,对于 $t\geqslant 1$ 它等于1. 考虑函数

(3.26) $$u^{*}(x,t)=\zeta\left(\frac{t}{\sigma}\right)u(x,t).$$

它在D'的下底上为零,对于 $t>\sigma$ 它等于$u(x,t)$. 利用(3.24)我们得到

(3.27) $$\widehat{|u^{*}|}_{1+\delta,1}\leqslant K\sigma^{\gamma}\,\widehat{|Lu^{*}|}_{0,1}.$$

现在估计 Lu^{*}. 我们有

(3.28) $$|Lu^{*}|\leqslant|f\zeta|+\left|u\frac{d\zeta}{dt}\right|\leqslant N|f|+\frac{N}{\sigma}|u|,$$

其中N是常数. 为了估计 $|u|$,我们引进函数 $v=|f|_{0}^{D}t$. 它在D内满足 $Lv=-|f|_{0}^{D}$,在 $B+S$ 上 $v\geqslant 0$. 应用极值原理于 $v\pm u$, 对于任何 $0<\rho\leqslant T$ 我们得到,

(3.29) $$\underset{D_{\rho}}{\text{l.u.b.}}|u|\leqslant\rho|f|_{0}^{D}.$$

把(3.29)代入(3.28)我们得到

$$\widehat{|Lu^{*}|}_{0,1}\leqslant\left(N+\frac{3}{2}N\right)|f|_{0}^{D}.$$

把这个不等式代入(3.27), 并考虑到,当 $\sigma<t\leqslant 3\sigma/2$ 时, $u^{*}(x,t)=u(x,t)$,连同(3.23)我们得到

(3.30) $\overline{|u|}_{1+\delta,3\sigma/2} \leqslant \left[K\sigma^{\gamma} + K\sigma^{\gamma}\left(N + \frac{3}{2}N\right)\right]|f|_0^D \equiv K_1|f|_0^D.$

下一步是在 $D_{2\sigma}$ 内估计 u 的 $(1+\delta)$ 范数．在前面的方法中以 D^2 代替 D^1，以 $\zeta\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)_{\gamma}\Big/\sigma\right)$ 代 $\zeta(t/\sigma)$，我们得到

(3.31) $$|u|_{1+\delta,2\sigma} \leqslant K_2|f|_0^D \qquad (K_2 \text{ 为常数}).$$

注意，常数 K_i 依赖于 σ，但因 σ 是固定的，并且只依赖于 D，δ 和 H_j，所以 K_i 也如此．

用上面的方法逐步地进行下去，即可完成定理 4 的证明．

4. $Lu = f(x, t, u, \nabla u)$ 的存在定理

在这一节我们考虑第一初值边值问题：

(4.1) $$Lu = f(x, t, u, \nabla_x u) \qquad (\text{在 } D + B_T \text{ 内}),$$

(4.2) $$u = \phi \qquad (\text{在 } \bar{B} + S \text{ 上}).$$

我们总假定 $f(x, t, u, w)$ 是对

(4.3) $$(x, t) \in \bar{D},\ -\infty < u < \infty,\ -\infty < u_i < \infty,\quad (i = 1, \cdots, n)$$

定义的，其中 $w = (u_1, \cdots, u_n)$．我们首先证明若干唯一性定理，它们对于 $f(x, t, u, w)$ 的可微性假定比第二章第 3 节定理 8 中的要求更少些．

定理 5 设 L 是 $D + B_T$ 内有连续有界系数的抛物算子，$f(x, t, u, w)$关于 u 是单调非减的，则(4.1)，(4.2)最多有一个解．

证明 首先考虑 $f(x,t,u,w)$ 关于 u 为严格单调增，且 $c(x, t) \leqslant 0$ 的特殊情形．假定 u_1, u_2 是 (4.1)，(4.2) 的两个解．如果 $u_1 \neq u_2$，那么我们可以假定在 D 的某些点处 $u_1 > u_2$．因此，函数 $u = u_1 - u_2$ 在 $D + B_T$ 内取正的极大值．以(x°, t°)记它取得极大值的点，并利用在(x°, t°)处 $D_x u_1 = D_x u_2$, $u_1 > u_2$ 这一事实，我们就得到

$$\begin{aligned} Lu(x^\circ, t^\circ) = f(x^\circ, t^\circ, u_1(x^\circ, t^\circ), \nabla_x u_1(x^\circ, t^\circ)) \\ - f(x^\circ, t^\circ, u_2(x^\circ, t^\circ), \nabla_x u_1(x^\circ, t^\circ)) > 0 \end{aligned}$$

另一方面，据第二章第 1 节引理 1 的证明，因为在 u 取正极大值的

每点 $(x^\circ, t^\circ)\in D+B_T$ 处，$L_u(x^\circ, t^\circ)\leqslant 0$，于是产生矛盾.

为了在一般情况下证明本定理，我们作变换 $v=e^{-\lambda t}u$ 使 $Lu=f$ 变为 $(L-c)v=\bar{f}$，其中 $\bar{f}=fe^{-\lambda t}+(\lambda-c)v$. 取 $\lambda>c$，$\bar{f}(x, t, v, w)$ 就变为关于 v 的严格单调函数，于是从前面的特殊情形可得本定理的证明.

定理 6 设 L 为 $D+B_T$ 内有连续有界系数的抛物算子，假定 $f(x, t, u, w)$ 关于 u 是 Lipschitz 连续的，它的 Lipschitz 系数在(4.3)的任意有界集中对于 (x, t, u, w) 是一致的，则(4.1)，(4.2)最多有一个解.

证明 首先考虑 $f(x, t, u, w)$ 关于 u 为 Lipschitz 连续，它的 Lipschitz 系数对于整个集合(4.3)为一致的特殊情形，即

$$|f(x, t, u, w)-f(x, t, \bar{u}, w)|\leqslant M|u-\bar{u}|. \tag{4.4}$$

变换 $v=ue^{-\lambda t}$ 把(4.1)变为 $L_v=\bar{f}$，其中

$$\bar{f}(x, t, v, \nabla_x v)=f(x, t, u, \nabla_x u)e^{-\lambda t}+\lambda v.$$

取 $\lambda>M$，则 $\bar{f}(x, t, v, w)$ 变为关于 v 的单调增函数，因而可以应用定理 5 .

如果不满足(4.4)，而 u_1，u_2 为(4.1)，(4.2)的两个不同的解，则设 A 为满足如下条件的任意正数：

$$\underset{D}{\text{l.u.b.}}|u_i|<A, \qquad \underset{D}{\text{l.u.b.}}|\nabla_x u_i|<A \qquad (i=1, 2),$$

其中 $|\nabla_x u|=[\sum(\partial u/\partial x_i)^2]^{1/2}$. 在有界集 $\{(x, t, u, w); (x, t)\in\overline{D}, |u|<A, |w|<A\}$ 之外修改 $f(x, t, u, w)$ 的定义，使修改后的函数满足(4.4). 于是从前面特殊情形即可得出本定理的证明.

下面的附注，往后是有用的.

附注 1 假定我们要证明(4.1)，(4.2)的任何解 u 必不超过某个常数 K，那么对于 $|u|>K$ 更改 $f(x, t, u, w)$ 的定义，例如定义

$$\bar{f}(x, t, u, w)=\begin{cases}f(x, t, u, w) & |u|\leqslant K,\\ f(x, t, \pm K, w) & \pm u>K.\end{cases} \tag{4.5}$$

于是如果我们能证明

(4.6) $Lu=\tilde{f}$ 在 $D+B_T$ 中，$u=\phi$ 在 $\bar{B}+S$ 上

的解 u 存在，则 u 也是原问题(4.1)，(4.2)的解[1]. 唯一性地同样. 注意，如果 f 关于某一个变量是 Hölder 连续的，则由(4.5)所定义的函数 $\tilde{f}$ 亦然.

附注 2 下面的断言是第二章第6节定理16的特殊情形.

设 $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$ 为满足下列不等式的函数:

(4.7)
$$L\varphi_1 < f_1(x, t, \varphi_1, \nabla_x\varphi_1) \quad (\text{在}D\text{内}),$$
$$Lu \geqslant f_1(x, t, u, \nabla_x u) \quad (\text{在}D\text{内}),$$
$$\varphi_1 > u \quad (\text{在}\bar{B}+S\text{上}),$$

(4.8)
$$L\varphi_2 > f_2(x, t, \varphi_2, \nabla_x\varphi_2) \quad (\text{在}D\text{内}),$$
$$Lu \leqslant f_2(x, t, u, \nabla_x u) \quad (\text{在}D\text{内}),$$
$$\varphi_2 < u \quad (\text{在}\bar{B}+S\text{上}),$$

则在 D 内有

(4.9)
$$\varphi_2(x, t) < u(x, t) < \varphi_1(x, t).$$

利用这个附注，我们来证明下面的定理.

定理 7 设 $L=\Sigma a_{ij}\partial^2/\partial x_i\partial x_j+\Sigma b_i\partial/\partial x_i-\partial/\partial t$ 为在 D 内有连续系数的抛物算子，并设 $f(x, t, u, w)$ 为一连续函数，且对所有的 $(x, t)\in D$, $-\infty<u<\infty$ 满足

(4.10) $uf(x, t, u, 0)\leqslant A_1u^2+A_2 \quad (A_1\geqslant 0, A_2\geqslant 0)$,

则对(4.1)，(4.2)的任何一个解 $u(x, t)$ 以及任意的 $b>A_1$，在 D 内

(4.11)
$$|u(x, t)|\leqslant\left[\left(\frac{A_2}{b-A_1}\right)^{1/2}+\underset{B+S}{\text{l.u.b.}}|\phi|\right]e^{bt}.$$

证明 以 A 记(4.11)右边括号里的式子. 利用(4.10)容易验证. 对于任意的 $\varepsilon>0$，函数 $v=(A+\varepsilon)e^{bt}$ 满足

---

1) 若问题(4.1)，(4.2)的任意解 u 都有估计 $|u|\leqslant K$，则 u 亦是问题(4.5)，(4.6)的解，反之，只有证明了问题(4.5)，(4.6)的解 u 必有估计 $|u|<K$，才能断言它也是问题(4.1)，(4.2)的解. ——校者注

$$Lv < f(x, t, v, \nabla_x v) \quad (\text{在}D\text{内}),$$
$$v > \phi \quad (\text{在 } \bar{B} + S \text{ 上}).$$
因此，据附注 2，有 $u(x, t) < v(x, t)$. 类似地，我们得到
$$u(x, t) > -v(x, t).$$
让 $\varepsilon \to 0$，就得到不等式 (4.11).

现在证明(4.1)，(4.2)的存在定理．我们需要下面的假定：

$(B)'$ a_{ij}, b_i, c 在 $\bar{D}$ 上是 Hölder 连续的，a_{ij} 在 S 上属于 C_{1-0}，即(2.9)成立，此外

(4.12) $$\Sigma \overline{|a_{ij}|}_\alpha^D + \Sigma \overline{|b_i|}_\alpha^D + \overline{|C|}_\alpha^D \leqslant H_3.$$

(c) 存在正的常数 M_0，使得对任何 $M \geqslant M_0$ 以及在 D 内所有满足 $\overline{|u|}_{1+\alpha}^D \leqslant M$ 的函数 $u = u(x, t)$，有

(4.13) $$2K|f(x, t, u, \nabla_x u)| \leqslant M,$$

K 是当 $\delta = \alpha$ 时在 (2.10) 中出现的常数．

定理 8 假定 S 是 $\bar{C}_{2-0}$ 和 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 类的，而 L 满足假定(A)，$(B)'$，$f(x, t, u, w)$ 在 (4.3) 的有界子集内是 Hölder 连续的，并且(c)成立．如果对于某个 $\alpha < \delta < 1$，$\phi \in \bar{C}_{2+\delta}$，在 ∂B 上
$$L\phi(x, t) = f(x, t, \phi, \nabla_x \phi),$$
则(4.1)，(4.2)的解 u 存在．而且 u 属于 $\bar{C}_{1+\delta}(D)$，并且对于某个 $0 < \gamma < 1$，u 属于 $\bar{C}_{2+\gamma}$.

证明 考虑满足如下条件的函数 $v(x, t)$ 的集合 C_M：
$$|v|_{1+\alpha}^D \leqslant M, \quad v = \phi \quad (\text{在 } \bar{B} + S \text{ 上}).$$
在 C_M 上定义变换 $w = Zv$ 如下：w是如下问题的解：

(4.14) $$Lw = f(x, t, v, \nabla_x v) \quad (\text{在 } D + B_T \text{ 内})$$
$$w = \phi \quad (\text{在 } \bar{B} + S\text{上}).$$

因为 $f(x, t, v(x, t), \nabla_x v(x, t)) \equiv F(x, t)$ 是 Hölder 连续的(指数为某个正数)，又因为在 ∂B 上 $L\phi = F$，据第三章第 3 节定理 7，存在唯一解 w．我们将利用 Schauder 不动点定理（第 1 节定理 2)来证明 Z 有不动点．

我们首先证明 Z 把 C_M 映射成自身．函数 $w_0 = w - \Psi$ 满足

$$Lw_0 = f(x, t, v, \nabla_x v) - L\Psi \qquad (\text{在 } D + B_T \text{ 内}),$$
$$w_0 = 0 \qquad (\text{在 } \bar{B} + S \text{ 上}),$$

其中 Ψ 属于 $\bar{C}_{2+\alpha}(D)$ 它是 ϕ 在区域 D 上的某个扩张。

由定理 4 有

$$\overline{|w_0|}_{1+\alpha} \leqslant K|f(x, t, v, \nabla_x v)|_0 + K|L\Psi|_0.$$

取 $M > M_0$, $M > 4K|L\Psi|_0$, 并应用性质(c)我们就断定

$$\overline{|w_0|}_{1+\alpha} \leqslant \frac{3}{4} M.$$

因此,如果 $M > 4\overline{|\Psi|}_{1+\alpha}$, 就有

(4.15) $$\overline{|w|}_{1+\alpha} \leqslant M,$$

即 Z 把 C_M 映射成自身.

类似地,对于任何 $v \in C_M$ 我们得到

(4.16) $$\overline{|w|}_{1+\delta} \leqslant M' \qquad (M' \text{ 依赖于 } M).$$

从第 1 节定理 1 的证明看出, 由(4.15), (4.16)所定义的集合是集合 C_M 的紧子集 (C_M 以 $|\cdot|^D_{1+\alpha}$ 赋范). 因此, Z 把 C_M 映射到 C_M 的紧子集中.

为了证明 Z 是一连续映射,我们注意到,如果

$$\overline{|u_m - u|}_{1+\alpha} \to 0,$$

则

$$\varepsilon = \underset{(x,t)\in D}{\text{l.u.b.}} |f(x, t, u, \nabla_x u) - f(x, t, u_m, \nabla_x u_m)| \to 0.$$

据定理 4, 因为

$$\overline{|Zu_m - Zu|}_{1+\alpha} \leqslant \text{Const.}\varepsilon_m \to 0,$$

所以关于 $(1 + \alpha)$ 范数有 $Zu_m \to Zu$,即 Z 是连续的.

最后,因为 C_M 是 Banach 空间 $\bar{C}_{1+\alpha}(D)$ 的闭的凸集,所以应用定理 2, 可以断定 Z 有不动点 u. 于是 u 是(4.1), (4.2)的解,它属于 $\bar{C}_{1+\delta}$. 据第三章第 3 节定理 7,从而,对于某个 $0 < \gamma < 1$, u 也属于 $\bar{C}_{2+\gamma}$.

现在我们利用定理 7, 在关于 f 的比(c)明显的条件下导出存在性定理. 我们首先考虑如下情形:

$$(4.17)\qquad |f(x, t, u, w)| \leqslant A(|u|) + \mu|w|,$$

其中 $w = (u_1, \cdots, u_n)$, $|w| = (\sum v_i^2)^{1/2}$, 而 μ 是一个正的常数，$A(|u|)$ 为 $|u|$ 的任意正的单调增函数.

定理 9　设 L, S, ψ 满足定理 8 的假定, $f(x, t, u, w)$ 在(4.3)的有界子集内是 Hölder 连续的,对某些常数 A_1, A_2, (4.10)成立,还假定对于某个正的单调递增函数 $A(|u|)$和某个充分小的 μ(仅依赖于 D, L), (4.17) 成立. 如果在 ∂B 上 $L\psi = f(x, 0, \psi, \nabla_x\psi)$,则 (4.1), (4.2) 的解存在.

证明　从定理 7 推出,对于某个常数 λ 和(4.1), (4.2)的任何可能的解有 $|u| \leqslant \lambda$. 于是据附注 1 和 (4.17), 我们断言,不失一般性,可以假定

$$|f(x, t, u, w)| \leqslant A' + \mu|w| \qquad (A' = A(\lambda)),$$

取 μ 使 $4n\mu K < 1$, 就可推出,如果 $|u| \leqslant M$, $\Sigma|D_x u| \leqslant M$, 则当 $M > 4KA'$ 时有

$$2K|f(x, t, u, \nabla_x u)| \leqslant M.$$

因而条件(c)满足,于是从定理 8 就推出定理 9[1].

附注 (a)　因为 (4.13) 中的 K 仅依赖于 δ, H_0, H_1, H_2 和 D,所以 μ 也一样.

附注 (b)　如果 $f(x, t, u, w)$ 满足不等式

$$(4.18)\qquad |f(x, t, u, w)| \leqslant B_1 + B_1|u| + B_1|w_1|^\lambda + \frac{1}{2}\mu|w|$$

$$(0 \leqslant \lambda < 1),$$

其中 B_1 为常数,则 f 既满足(4.10)也满足(4.17),因而可以应用定理 9.

附注 (c)　读者可以验证, 如果 (4.17) 由下面的不等式代替,定理 9 仍为真:

$$(4.19)\qquad |f(x, t, u, w)| \leqslant A(|u|) + \frac{1}{2}\mu|w| + \varepsilon p(|w|),$$

---

1) 必须指出,按第 4 节附注 1 修改 f 的函数值以后,相应的定解问题(4.5), (4.6)的解仍有估计 $|u| \leqslant \lambda$, 见 244 页校者注. ——校者注

其中 $p(|w|)$ 为任何正的单调增函数，而 ϵ 充分小。

最后，考虑 $f(x, t, u, w)$ 不受任何"增长的"条件约束的情形。如果我们取（依赖于 Ψ, L, D 的）M 充分大，然后利用(3.23)而不是(2.10)，对某个充分小的 σ 在区域 D_σ 内应用定理 8 的证明，我们就可以建立关于 Z 的不动点的存在性。因此有：

定理 10 设 L, S, ϕ 满足定理 8 的假定 $f(x, t, u, w)$ 在(4.3)的有界子集中是 Hölder 连续的。如果在 ∂B 上 $L\phi = f(x, 0, \phi, \nabla_x\phi)$，则对于某个充分小的 σ，在 D_σ 内(4.1)，(4.2)的解存在。

我们可以把本节的若干结果推广到第二初值边值问题的解上，见问题 3。

5. 有非线性边界条件的线性方程

在这一节我们考虑问题

(5.1) $$Lu(x, t) = f(x, t) \qquad (\text{在} D \text{内}),$$

(5.2) $$u(x, 0) = \phi(x) \qquad (\text{在} B \text{上}),$$

(5.3) $$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu(x, t)} = g(x, t, u(x, t), \varphi(t)) \qquad (\text{在} S \text{上}),$$

其中 L 由(2.4)定义，ν 是内补法向导数（其定义见第二章第 5 节，和第五章第 2 节），D 是侧边界为 S 的无穷柱体 $B \times (0, \infty)$，而 $f(x, t)$, $g(x, t, u, v)$, $\varphi(t)$ 为已知的函数。

我们需要下面的假定：

(A) L 在 $\overline{D}$ 上是抛物的。

$(A)'$ L 在 $\overline{D}$ 上是抛物的，且对某两个正的常数 K_1, K_2 有

$$a_{11}(x, t) \geqslant K_1, \quad b_1(x, t) \geqslant -K_2.$$

(B) L 的系数 a_{ij}, b_i, c 在 $\overline{D}$ 上是连续的，并且 $c \leqslant 0$。

$(B)'$ L 的系数 a_{ij}, b_i, c 在 $\overline{D}$ 上是 Hölder 连续的，且 $c \leqslant 0$

在陈述关于 g 的条件之前，我们考虑条件(5.3)的物理解释。如果 u 是 D 内的温度，而 $\varphi(t)$ 是 D 外的温度，则 Newton 的冷却定律表明 $g(x, t, u, \varphi(t))$ 关于 u 是严格单调增的，关于 $\varphi(t)$ 是严格单调减的，而当 $u = \varphi(t)$ 时 $g(x, t, u, \varphi(t)) = 0$。于是导致如

下假定:

(G_1) $g(x, t, u, v,)$ 对于 $(x, t) \in \bar{S}$, $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$,是连续函数.

(G_2) $g(x, t, u, v)$ 关于 u 是严格递增的,关于 v 是严格递减的.

(G_3) 当 $u \to \pm\infty$ 时,对于 $\bar{S}$ 上的 (x, t) 和有界集内的 v,一致地有 $g(x, t, u, v) \to \pm\infty$.

(G_4) 对于所有的 $(x, t) \in \bar{S}$, $-\infty < u < \infty$ 有 $g(x, t, u, v) = 0$,

(G_5) 对于任何 $K > 0$, 存在正的常数 η, 使得对于所有的 $(x, t) \in \bar{S}$, $|v| \leqslant 1 + \text{l.u.b.}|\varphi(t)|$, $|u'| \leqslant K$, $|u''| \leqslant K$, $u' < u''$, 有

$$g(x, t, u'', v) - g(x, t, u', v) > \eta(u'' - u'). \tag{5.4}$$

注意,当 $\partial g/\partial u$ 存在且为正时,(G_5) 得到满足.

在这一节我们将证明存在和唯一性定理, 还要证明, 假如当 $t \to \infty$ 时 $f \to 0$, $\varphi \to A$, 那么当 $t \to \infty$ 时 $u \to A$. 这个论断是出于条件(5.3)的物理解释.

定理 11 假定 B 的边界 ∂B 是 $C^{1+\beta}$ 类的 $(0 < \beta < 1)$, L 满足 (A), (B); g 满足 (G_2), 则对于任何 $0 < \tau < \infty$, 在 D_τ 中 (5.1)—(5.3)最多有一个解.

证明 假设 u, v 是 D_τ 内(5.1)—(5.3)的两个不同的解. 于是我们可以假定在 D 的某些点 $u > v$. 函数 $w = u - v$ 在 D_τ 内满足方程 $Lw = 0$. 由极值原理, 它的正的极大值在 $\bar{B} + S_\tau$ 的某些点处取得. 因为在 $\bar{B}$ 上 $w = 0$, 所以 w 在 S_τ 的某点 $p = (x^\circ, t^\circ)$ 处取其正的极大值. 因此,在 p 处 $\partial w/\partial \nu \leq 0$. 据 ($G_2$), 因为在 p 处有

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = g(x, t, u, \varphi(t)) - g(x, t, v, \varphi(t)) > 0,$$

我们就导出了矛盾.

定理 12 假定 ∂B 属于 $C^{1+\beta}(0 < \beta < 1)$, L 满足 (A)$'$,

(B)，而 g 满足 (G_2)，(G_3)．如果 u 是 (5.1)—(5.3) 在某个区域 $D_\tau(0<\tau<\infty)$ 内的解，则在 D_τ 内有

(5.5) $$|u(x,t)|\leqslant H,$$

其中 H 是仅依赖于 g, K_1, K_2, B 的直径和 $|f|$, $|\phi|$, $|\varphi|$ 的上界的常数．

证明　取 λ, R 是充分大的常数，它们只依赖于 K_1, K_2 和 B 的直径（见第六章第 2 节），可以使函数 $\zeta(x)=e^{\lambda R}-e^{\lambda x_1}$ 满足

$$L\zeta<-1 \quad （在\ D_\tau\ 内），$$
$$\zeta>1 \quad （在\ \bar{B}\ 上）.$$

对任何 $H_0\geqslant \underset{D_\tau}{\text{l.u.b.}}|f|+\underset{B}{\text{l.u.b.}}|\phi|$，考虑函数 $w=H_0\zeta-u$．它满足：

(5.6) $\quad Lw<0$（在 D_τ 内），$w>0$（在 $\bar{B}$ 上），

(5.7) $$\frac{\partial w}{\partial\nu}=\tilde{g}(x,t,w) \quad （在\ S_\tau\ 上），$$

其中

$$\tilde{g}(x,t,w)=H_0\frac{\partial\zeta}{\partial\nu}-g(x,t,H_0\zeta-w,\varphi(t)).$$

据 (G_3)，如果（仅依赖于 H_0l.u.b.$|\zeta|$、$|\varphi|$ 的上界和 g 的）$-w$ 充分大，比如，$-w\geqslant H_1$，则在 S_τ 上有 $\tilde{g}(x,t,w)<0$.

现在假设 w 在 D_τ 内取负值．由于 (5.6)，则它的负的极小值（设为 m），必在某点 $P\in S_\tau$ 处取得，且在 P 处 $\partial w/\partial\nu\geqslant 0$．如果 $-m>H_1$，则 $\tilde{g}(x,t,m)<0$，于是我们得出和 (5.7) 相矛盾的结果．因此，$-m\leqslant H_1$，即 $H_0\zeta-u\geqslant m\geqslant -H_1$，即 $u\leqslant H_0\zeta+H_1$．通过考虑 $H_0\zeta+u$ 我们也可以得到 u 的下界，于是证明完毕．

把定理 12 应用于 D_τ，让 τ 递增到∞，我们就得到：

推论　设 ∂B 属于 $C^{1+\beta}(0<\beta<1)$，L 满足 $(A)'$，(B)；g 满足 (G_2)，(G_3)．如果 u 为 D 内(5.1)—(5.3)的解，且

$$\underset{D}{\text{l.u.b.}}|f|<\infty, \qquad \underset{0<t<\infty}{\text{l.u.b.}}|\varphi(t)|\infty,$$

则在D内有

(5.8) $$|u(x, t)| \leqslant H,$$

其中H依赖于某些量，如同定理 12.

现在我们证明存在性定理.

定理 13 假设∂B是$C^{1+\beta}$类的$(0<\beta<1)$, L满足$(A)'$, $(B)'$; g满足(G_1), (G_2), (G_3); $f(x, t)$关于x是 Hölder 连续的，关于$\overline{D}$的有界子集是一致的，对于$0 \leqslant t < \infty$, $\varphi(t)$是连续函数，最后，设$\psi(x)$是在B内有紧支集的连续函数，则(5.1)—(5.3)存在唯一的解.

证明 首先我们对于任何$0<\tau<\infty$在D_τ内证明存在性. 设Z为$\overline{D}_\tau$上所有连续函数$v(x, t)$构成的 Banach 空间，其范数为

$$\|v\| = \underset{D_\tau}{\text{l.u.b.}} |v(x,t)|.$$

对于任何$R>0$，以Z_R记集合$\{v;\ v \in Z, \|v\| \leqslant R\}$. 对于每一个$v \in Z_R$我们定义$w = Tv$为(5.1), (5.2)和

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = g(x, t, v(x, t), \varphi(t))$$

的解. 据第五章第 3 节定理 2, w存在并且是唯一确定的，此外它有如下形式:

(5.9) $$w(x, t) = \int_0^t \int_{\partial B} \Gamma(x, t; \xi, \tau)\rho(\xi, \tau) dB_\xi d\tau + G(x, t),$$

其中dB_ξ为∂B上的曲面元素，

(5.10) $$G(x, t) = \int_B \Gamma(x, t; \xi, 0)\psi(\xi) d\xi - \int_0^t \int_B \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

而ρ为积分方程.

(5.11) $$\rho(x, t) = 2\int_0^t \int_{\partial B} \frac{\partial \Gamma(x, t; \xi, \tau)}{\partial \nu(x, t)} \rho(\xi, \tau) dB_\xi d\tau + 2\frac{\partial G(x, t)}{\partial \nu(x, t)} - 2g(x, t, v(x, t), \varphi(t)).$$

的解．我们将证明T有不动点．

据定理 12，因为(5.1)—(5.3)的任何可能的解是先验有界的(见(5.5))，如果对于 $|u|>H$ 象在第 4 节附注 1 那样修改 $g(x, t, u, v)$ 的定义，则改动后的定解问题的解与原定解问题的解重合．因此，不失一般性，我们可以断然假定，对所有的 $(x, t)\in D_\tau$，$-\infty<u<\infty$，有

$$|g(x, t, u, \varphi(t)|\leqslant \text{const.}<\infty. \tag{5.12}$$

利用(5.12)和不等式(比较(5.3.7))

$$\left|\frac{\partial G(x, t)}{\partial \nu(x, t)}\right|\leqslant \text{const.}$$

由(5.11)，我们发现在S_τ上有

$$|\rho(x, t)|\leqslant A,$$

其中A与$v\in Z$无关．从而在D_τ中(5.9)给出

$$|w(x, t)\leq A',$$

其中A'与$v\in Z$无关．取$R\geqslant A'$，我们就断定T把Z_R映射成自身．

现在我们证明T是连续映射．设$v_m\in Z$，并设w_m，Gm，ρ_m分别由(5.9)，(5.10)，(5.11)定义．这里$v\doteqdot v_m$．我们需要证明：当$\|v_m-v\|\to 0$时，$\|w_m-w\|\to 0$．由(G_1)，当$m\to\infty$时有

$$\underset{S_\tau}{\text{l.u.b.}}|g(x, t, v_m(x, t), \varphi(t)|-g(x, t, v(x, t), \varphi(t))|\to 0$$

类似于(5.3.10)扩张解ρ_m，ρ，我们容易发现，当$m\to\infty$时，

$$\underset{S_\tau}{\text{l.u.b.}}|\rho_m-\rho|\to 0.$$

但由(5.9)，当$m\to\infty$时，

$$\underset{D_\tau}{\text{l.u.b.}}|w_m(x, t)-w(x, t)|\to 0,$$

即$\|w_m-w\|\to 0$，于是T的连续性得证．

下面我们证明T把Z_R映射成Z的紧子集．容易看出，函数

$$\int_0^t\int_{\partial B}\Gamma(x, t; \xi, \tau)\rho(\xi, \tau)dB_\xi\,d\tau \qquad (\text{l.u.b.}|\rho|\leqslant A)$$

构成一个$\overline{D}_\tau$上的同等连续且一致有界的函数族．如果把由

(5.10)所定义的固定函数 $G(x, t)$ 加到这些函数的每一个上，则所得到的族又是 $\bar{D}_\tau$ 上的同等连续且一致有界的. 据 Ascoli-Arzela 定理，这个族是 Z 的预紧子集. 据(5.9)，因为这个族包含集合 $\{Tv; v \in Z_R\}$，于是 T 把 Z_R 映射成 Z 的紧子集.

注意到 Z_R 是 Z 的闭凸集，于是我们可应用 Schauder 的不动点定理，从而我们断言在 Z_R 中方程 $Tu = u$ 的解 u 存在；显然，u 是 D_τ 内 (5.1)—(5.3) 的解. 解 u 的唯一性已在定理 12 中证明.

对于任意的 $0 < \tau < \infty$ 证得 D_τ 中的存在性和唯一性之后，我们以 u_τ 记这个解. 对于每一个 $0 < \tau < \infty$，在 D_τ 内由 $u = u_\tau$ 所定义的函数 u 显然是 (5.1)—(5.3) 在 D 内的唯一解.

在上面的证明中，如果我们不用第五章第 3 节定理 2，而用它的推论 2，则我们得到：

推论 如果 ϕ 在 B 中有紧支集的假定由 $\phi(x)$ 和 $a_{ij}(x, 0)$ 在 B 的边界 ∂B 的某个邻域中有定义且连续可微的假定来代替，则定理 13 仍为真.

附注 如果条件 (G_3) 由如下较弱的条件 $(G_3)'$ 来代替，则定理 12 仍为真，只是 H 还依赖于 τ：

$(G_3)'$ 当 $u \to \pm\infty$ 时，对于任何 $0 < \tau < \infty$，关于 S_τ 中的 (x, t) 和有界集合中的 v 一致地有 $g(x, t, u, v) \to \pm\infty$.

利用定理 12 的这一较弱的说法，我们也可以和前面一样地证明定理 13. 于是如果以 $(G_3)'$ 代替 (G_3)，则定理 13 及其推论仍为真.

最后我们考虑解的渐近性态.

定理 14 假定 ∂B 是 $C^{1+\beta}$ 类的 $(0 < \beta < 1)$，L 满足 $(A)'$，$(B)'$，g 满足 (G_1)—(G_5)，并且在 $\bar{B}$ 上一致地有

$$\lim_{t\to\infty} f(x, t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} c(x, t) = 0, \tag{5.13}$$

$$\varphi(\infty) = \lim_{t\to\infty} \varphi(t) \text{ 存在.} \tag{5.14}$$

如果 $u(x, t)$ 为(5.1)—(5.3)在 D 内的解，则在 $\bar{B}$ 上一致地有

$$(5.15)\qquad \lim_{t\to\infty} u(x, t) = \varphi(\infty).$$

证明　据定理 12 的推论，因为 $u(x, t)$ 在 D 内有界，所以当 $t\to\infty$ 时，在 B 内一致地有 $c(x, t)u(x, t)\to 0$. 因此我们可以把 (5.1) 重新写成 $(L-c)u=\tilde{f}$ 的形式，这里当 $t\to\infty$ 时，在 B 内一致地有 $\tilde{f}(x, t)\to 0$. 于是，不失一般性，往后我们可以假定

$$c(x, t)\equiv 0.$$

设 ε 是任意的正数，设 σ 使得

$$(5.16)\qquad |f(x, t)|<\varepsilon \qquad (t\geqslant\sigma,\ x\in\bar{B})$$

$$(5.17)\qquad |\varphi(t)-\varphi(\infty)|<\varepsilon \qquad (t\geqslant\sigma)$$

设 $|u(x, \sigma)|<C_1$, 其中 $x\in\bar{B}$, 以 v 记

$$Lv=-\varepsilon \qquad (\text{在 } D-\bar{D}_\sigma \text{ 内}),$$

$$(5.18)\qquad v(x, \sigma)=c \qquad (x\in\bar{B}),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}=g(x, t, v, \varphi(\infty)+\varepsilon) \qquad (\text{在 } S-\bar{S}_\sigma \text{ 上})$$

的解. 把定理 13 应用于 $u=v-c_1$ 即可推出它的存在性. 象证明第二章第 6 节定理 17 那样推论，就可在 $D-D_\sigma$ 内导出不等式

$$(5.19)\qquad u(x, t)<v(x, t).$$

为了估计 v, 引进

$$(5.20)\qquad w=v+\varepsilon\vartheta$$

其中 $\vartheta(x)=e^{\lambda x_1}$, 并选取 λ 使得 $L\vartheta>1$.

由于 (5.18), w 满足:

$$Lw>0 \qquad (\text{在 } D-\bar{D}_\sigma \text{ 内}),$$

$$(5.21)\qquad w(x, \sigma)<c_2, x\in\bar{B}\,(c_2=c_1+2\varepsilon\,\text{l.u.b.}\,\vartheta(x)),$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}=g_0(x, t, w) \qquad (\text{在 } S-\bar{S}_\sigma \text{ 上}),$$

其中 $g_0(x, t, w)=g(x, t, w-\varepsilon\vartheta, \varphi(\infty)+\varepsilon)+\varepsilon\partial\vartheta/\partial\nu$. 其次，我们指出，由于定理 12 的推论，可以认为 $|u(x, \sigma)|$ 的界 c_1 与 σ 无关. 根据这个推论（以 $t-\sigma$ 代替 t）我们还可断定，v 在 $D-\bar{D}_\sigma$ 内与 σ, $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ 无关地有界. 因此，对于 w 也是如

此．因而当 ε 充分小时，据 (G_5)，对某个与 ε 无关的 $N>0$，有

(5.22) $\quad g_0(x, t, w) > g(x, t, w - N\varepsilon, \varphi(\infty) + \varepsilon)$.

考虑如下定解问题的解 $S(x, t)$:

$$LS = 0 \quad (\text{在 } D - \overline{D}_\sigma \text{ 内}),$$

(5.23) $$S(x, \sigma) = c_2 \quad x \in \overline{B},$$

$$\frac{\partial S}{\partial \nu} = g(x, t, S - N\varepsilon, \varphi(\infty) + \varepsilon) \quad (\text{在 } S - \overline{S}_\sigma \text{ 上}).$$

应用定理 13 于 $u = S - c_2$ 可推知 $S(x, t)$ 的存在性.

利用(5.22)，(5.21)和(5.23)我们看出，应用第二章第 6 节定理 17 可以推出

(5.24) $$w(x, t) < S(x, t) \quad (\text{在 } D - \overline{D}_\sigma \text{ 内}).$$

剩下要估计 $S(x, t)$.

据 (G_4), (G_5) 有

$$\begin{aligned} & g(x, t, S - N\varepsilon, \varphi(\infty) + \varepsilon) \\ & = g(x, t, S - N\varepsilon, \varphi(\infty) + \varepsilon) - g(x, t, \varphi(\infty) + \varepsilon, \varphi(\infty) + \varepsilon) \\ & > \eta(S - N\varepsilon - \varphi(\infty) - \varepsilon) \quad (\eta > 0). \end{aligned}$$

重要的是要看到 η 与 S 无关，因为据定理 12 的推论（应用于 $u = S - N\varepsilon$，并以 $t - \sigma$ 代替 t），$S(x, t)$在 $D - \overline{D}_\sigma$ 内与σ, ε 无关地有界.

令 $\overline{S} = S - N\varepsilon - \varphi(\infty) - \varepsilon$，我们就得到

$$L\overline{S} = 0 \quad (\text{在 } D - \overline{D}_\sigma \text{ 内}),$$

(5.25) $$\overline{S}(x, \sigma) = c_2', x \in \overline{B} \quad (c_2' = c_2 - N\varepsilon - \varphi(\infty) - \varepsilon),$$

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial \nu} - \eta \overline{S} > 0 \quad (\text{在 } S - \overline{S}_\sigma \text{ 上}).$$

类似于证明第六章第 5 节定理 4，我们发现，对于适当正的常数 λ, R, μ, 函数

$$z(x, t) = (e^{\lambda R} - e^{\lambda x_1})\, e^{-\mu(t-\sigma)}$$

满足:

$$Lz < 0 \quad (\text{在 } D - \overline{D}_\sigma \text{ 内}),$$

(5.26) $$z(x, \sigma) > c_2' \quad x \in \overline{B},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \nu} - \eta z < 0 \qquad (\text{在 } S - \bar{S}_\sigma \text{ 上}).$$

应用第 2 章第 6 节定理 17 于 $\bar{S}$, z, 我们就得到

$$\bar{S}(x, t) < z(x, t) \qquad (\text{在 } D - D_\sigma \text{ 内}).$$

回顾 $\bar{S}$ 和 z 的定义,可知

(5.27) $\qquad S(x, t) - \varphi(\infty) - (N + 1)\varepsilon < A e^{-\mu(t-\sigma)},$

其中 A 是与 σ, ε 无关的常数.

把(5.19),(5.20),(5.24),(5.27)综合起来,只要 $t \geqslant t_1$,我们就得到

(5.28) $\qquad u(x, t) < \varphi(\infty) + c_3\varepsilon,$

其中 t_1 依赖于 ε, 而 c_3 为与 ε 无关的常数. 同样地, 对于一切充分大的 t, 我们可以导出不等式 $u(x, t) > \varphi(\infty) - C_4\varepsilon$. 因而定理 14 证毕.

问　　题

1. 设 $f(x, t, u, 0)$ 关于 u 是单调非减的,且 $f(x, t, 0, 0) = 0$. 试证明 $u = 0$ 为方程 $Lu = f(x, t, u, \nabla_x u)$ 在 $D + B_T$ 内的唯一解,它在 $\bar{B} + S$ 上为零(L 为有连续系数的抛物算子).

2. 设 L, S 如第 4 节定理 8 中所述,设 $f(x, t, u, w)$ 在(4.3)的有界子集中是 Hölder 连续的. 试证明: 如果在 ∂B 上 $f(x, 0, 0, 0) = 0$,并且 $|f(x, t, u, w)| \leqslant A + C|u|^\lambda$,其中 $\lambda > 1$,则当 $2T < (A^{\lambda-1}C)^{-1/\lambda}$ 时(4.1)有解存在,它在 $\bar{B} + S$ 上取零值.

[提示: $\Phi = 2A(t + \varepsilon)$(对某个 $\varepsilon > 0$)在 D 内满足 $L\Phi + A + C\Phi^\lambda < 0$, 在 $\bar{D}$ 上 $\Phi > 0$.]

3. 从第五章第 3 节定理 2 (特别是(5.3.5)) 和从第五章第 4 节定理 3 的证明, 我们可以导出和定理 4 类似的如下定理: 定理 4′. 设 D 是柱体 $B \times (0, T)$, ∂B 是 $C^{1+\beta}$ 类的 $(0 < \beta < 1)$, $f(x, t)$ 在 D 上关于 x 是一致 Hölder 连续的,并设 L 由(2.4)定义,其系数是 Hölder 连续的且满足(2.7),(2.8). 如果

$$Lu = f \qquad (\text{在 } D + B_T \text{ 内}),$$

(★) $\qquad u = 0 \qquad (\text{在 } \bar{B} \text{ 上}),$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + g(x, t)u = 0 \qquad (\text{在} S \text{上}),$$

其中 l.u.b.$|g| \leqslant H'$,则对于任何 $0<\delta<1$ 有

$$\overline{|u|}_\delta^D \leqslant K|f|_0^D,$$

其中 $K = K(D, \delta, H_0, H_1, H')$.

如果 $g(x, t) \leqslant -\mu_1 < 0$, 试证明定理 7 可推广到定解问题(★). 利用这一点和定理 4′, 在 $g(x, t) \leqslant -\mu_1 < 0$, $f = f(x, t, u)$, 且 $uf(x, t, u) \leqslant A_1u^2 + A_2$, $|f(x, t, u)| \leqslant A(|u|)$ 时, 试证明对于(★)有类似于定理 9 的存在定理。

4. 设 $f(u)$ 是两次连续可微的,且 $|f'(u)| \leqslant e'$, $|f''(u)| \leqslant e''$.试证明对于任何函数 u, v 和 $w = u - v$ 有

$$d(P,Q)^{-\alpha}|[f(u(P)) - f(v(P))] - [f(u(Q)) - f(v(Q))]|$$
$$\leqslant e' \frac{|w(P) - w(Q)|}{d(P, Q)^\alpha} + e''|w(Q)| \cdot \left\{\frac{|u(P) - u(Q)|}{d(P,Q)^\alpha}\right.$$
$$\left. + \frac{|v(P) - v(Q)|}{d(P, Q)^\alpha}\right\},$$

[提示:

$$f(u(P)) - f(v(P)) = \int_0^1 \frac{d}{d\vartheta} f(\vartheta u(P) + (1 - \vartheta)v(P))d\vartheta$$

$$= [u(P) - v(P)]\int_0^1 f'(\vartheta u(P) + (1 - \vartheta)v(P))d\vartheta.]$$

5. 试证明:如果 L 的系数在 $\bar{D}$ 上是 Hölder 连续的,L 在 $\bar{D}$ 上是抛物的,S 是 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 类的, ψ 是 $\bar{C}_{2+\alpha}$ 类的,而 $f(x, t, u, D_xu, D_x^2u, D_tu)$关于其所有自变量二次连续可微, 则当 ε 充分小, 且在 ∂B 上有 $L\psi = \varepsilon f(x, t, \psi, D_x\psi, D_x^2\psi, D_t\psi)$ 时,如下的问题存在唯一解:

$$Lu = \varepsilon f(x, t, u, D_xu, D_x^2u, D_tu) \qquad (\text{在 } D + B_T \text{ 内}),$$
$$u = \psi \qquad (\text{在 } B + S \text{ 上}).$$

[提示: 利用第三章第 2 节定理 6 的 $(2 + \alpha)$ 估计, 以及推广到多变量函数 f 的问题 4 和第三章第 1 节定理 1.]

6. 假定第 5 节的 (A), (B) 成立, ∂B 是 $C^{1+\beta}(0<\beta<1)$ 类的, $g(x, t, u, v) \equiv g(x, t, u)$ 关于 u 为严格递增,且 $g(x, t, 1) \geqslant 0$, $g(x, t, 0) < 0$.试证明: 如果 u 在 D_τ 中是(5.1)—(5.3)当 $f \equiv 0$ 时的解,则当 $t>0$ 时, (a) $u > \min(0, \text{g.l.b.}\psi)$; (b) 若 l.u.b.$\psi \leqslant 1$, 则 $u \leqslant 1$; (c) 若 l.u.b.$\psi > 1$, 则

$u<\text{l.u.b.}\phi$.

7．假定 L 的系数与 t 无关，并满足第 5 节的 (A) 和 (B)，$\partial B\in C^{1+\beta}(0<\beta<1)$.设 $g=g(x,t,u)$ 适合问题 6 中的假定，此外设 $g(x,t,u)$ 关于 t 是单调非增的．试证明：如果 u 是 (5.1)—(5.3) 的解，其中 $f\equiv 0$ 且 ϕ 为小于 1 的非负常数，则 $u(x,t)$ 关于 t 是单调非递减的.

[提示：考虑 $v(x,t)=u(x,t+h)-u(x,t)$ 并利用问题 6.]

8．假定：第 5 节的 (A)，(B) 成立，$C\equiv 0$，$g=g(x,t,u)$ $((x,t)\in\bar{S}$，$-\infty<u<\infty)$ 是连续的，$g(x,t,1)\equiv 0$，$g(x,t,u)$ 关于 u 为严格递增的，以及，对于任何 $K>0$，不等式 (5.4) 对于 $g(x,t,u)((x,t)\in\bar{S}$，$|u'|<K$，$|u''|<K$，$u'<u'')$ 成立，这里 η 仅依赖于 K．试证明：当 $f\equiv 0$ 时 (5.1)—(5.3) 的任何一个解 u，在 $\bar{D}$ 上对于某个 $\mu>0$ 有

$$u(x,t)=1+0(e^{-\mu t}).$$

[提示：设 $c_1=\min(0,\text{g.l.b.}\phi)$，$c_2=\max(1,\text{l.u.b.}\phi)$，并且设 u_i 为当 $f\equiv 0$，$\phi\equiv c_i$ 时 (5.1)—(5.3) 的解，证明 $u_1\leqslant u\leqslant u_2$. 使用第 5 节的 $z(x,t)$ 估计 $1-u_1$，u_2-1.]

第 八 章

自由边界问题

引言　前几章我们论述了第一和第二初值边值问题的解．在这一章里我们将讨论一种新型的问题，其中边界部分是“自由的”(即不是给定的)，并且要和定解问题的解一起确定．在自由边界上给出一个补充的边界条件．

在十分简单的物理现象中就已发生带有自由边界的问题．例如，考虑占据区间 $a \leqslant x < \infty$ 的一薄冰块，假定冰块的温度处处为 0℃，而在 $x = a$ 点处温度保持 T℃，其中 $T > 0$．于是冰块开始融化，对每一时刻 $t > 0$，水将占据区间 $a \leqslant x < s(t)$．若以 u 记水的温度，于是我们有：

$$
(0.1)\qquad \begin{aligned}
&\alpha^2 u_{xx} - u_t = 0 &&(a < x < s(t),\ t > 0),\\
&u(a, t) = T &&(t > 0),\\
&u(s(t), t) = 0 &&(t > 0),
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha \neq 0$ 为某个常数．

$s(t)$ 是自由边界，它不是预先给定的．不过，关于 $x = s(t)$ 给出一个补充条件，即能量守恒律．它有如下形式：

$$
(0.2)\qquad \frac{ds(t)}{dt} = -ku_x(s(t), t) \qquad (t > 0),
$$

其中 k 是某个正的常数．

问题 (0.1)，(0.2) 称为 Stefan 问题．Stefan 问题是在固体融化(或者液体结晶)过程中出现的自由边界问题．

如果冰的温度 v 不是处处为 0℃，则 v 满足

$$
(0.3)\qquad \begin{aligned}
&\beta^2 v_{xx} - v_t = 0 &&(s(t) < x < \infty,\ t > 0),\\
&v(x, 0) = \phi(x) &&(0 < x < \infty),
\end{aligned}
$$

$$v(s(t), t) = 0 \qquad (t > 0),$$

其中 $\beta = \text{const.} \neq 0$，而 $\psi(x)$ 为给定的非正的函数．条件(0.2)以

$$(0.4) \qquad \frac{ds(t)}{dt} = -ku_x(s(t), t) + k_0 v_x(s(t), t) \qquad (t > 0)$$

代替，其中 k_0 为某个正的常数．问题(0.1)，(0.3)，(0.4)称为两相 Stefan 问题，而问题(0.1)，(0.2)有时叫做一相 Stefan 问题．

在本章中，主要涉及一维 Stefan 问题，我们将研究解的存在性，唯一性和解的渐近性态等问题．在最后一节我们将简要地提到其他自由边界问题．

1. Stefan 问题．化为积分方程

考虑如下问题：求 $s(t) > 0$ 和 $u(x, t)$ 使得

$$(1.1) \qquad u_{xx} = u_t \qquad (0 < x < s(t),\ t > 0),$$

$$(1.2) \qquad u(0, t) = f(t) \qquad (f(t) \geqslant 0,\ t > 0),$$

$$(1.3) \qquad u(x, 0) = \varphi(x) \qquad (\varphi(x) \geqslant 0,\ 0 < x \leqslant b \ \text{且}\ \varphi(b) = 0,\ b > 0),$$

$$(1.4) \qquad u(s(t), t) = 0 \qquad (t > 0 \ \text{和}\ s(0) = b),$$

$$(1.5) \qquad u_x(s(t), t) = -\frac{ds(t)}{dt} \qquad (t > 0).$$

$x = s(t)$ 不是已给定的边界而是和 $u(x, t)$ 一起要寻找的自由边界．条件 (1.2)—(1.4) 构成第一初始边界数据，而(1.5)是关于自由边界的条件．假设 $f \geqslant 0$，$\varphi \geqslant 0$ 来自问题的物理背景．

定义 我们说 $u(x, t)$，$s(t)$对于所有的 $t \leqslant \sigma (0 < \sigma \leqslant \infty)$ 构成(1.1)—(1.5)的解，如果 (i) $\partial^2 u/\partial x^2$ 和 $\partial u/\partial t$ 对于 $0 < x < s(t)$，$0 < t < \sigma$ 是连续的；(ii) u 和 $\partial u/\partial x$ 对于 $0 \leqslant x \leqslant s(t)$，$0 < t < \sigma$ 是连续的；(iii)$u(x, t)$对于 $t = 0$，$0 < x \leqslant b$ 也是连续的，且当 $t \to 0$，$x \to 0$ 时 $0 \leqslant \liminf u(x, t) \leqslant \limsup u(x, t) < \infty$ (如果 $\psi(0) = f(0)$ 就要求 u 在 $x = t = 0$ 处连续)；(iv) 对于 $0 \leqslant t < \sigma$，$s(t)$ 是连续可微的，(v) 方程 (1.1)—(1.5)得到满足．

定理 1 假定 $f(t) (0 \leqslant t < \infty)$ 和 $\varphi(x) (0 \leqslant x \leqslant b)$ 为连

续可微函数，则对于所有的 $t < \infty$，定解问题 (1.1)—(1.5) (存在唯一解 $u(x, t), s(t)$)，而且函数 $x = s(t)$ 关于 t 是单调非减的．

在这一节和下一节里将给出本定理的证明．在这一节我们把问题 (1.1)—(1.5) 化为求解关于 $u_x(s(t), t)$ 的 Volterra 型的非线性积分方程的等价问题．所用的步骤可应用于很广泛的一类自由边界问题．

我们首先证明：如果 u, s 对于所有的 $t < \sigma$ 构成(1.1)—(1.5)的解，则 $s(t)$ 为单调非减的．据极大值原理，对于 $0 < x < s(t)$，$0 \leqslant t \leqslant \sigma$ 有 $u(x, t) \geqslant 0$．因为在 $x = s(t)$ 上 $u = 0$，在 $x = s(t)$ 上 $u_x \leqslant 0$，因此据 (1.5)，$ds/dt \geqslant 0$，即 $s(t)$ 是单调非减的．实际上我们可以证明更多的结果，即

如果 $\varphi(x) \not\equiv 0$ 或者在每一个区间 $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon (\varepsilon > 0)$ 上 $f(t) \not\equiv 0$，则 $s(t)$ 严格递增．

事实上，在相反的情况下，将存在两点 $t', t'' (t' < t'')$，使得 $s(t') = s(t'')$．但是对所有的 $t' < t < t''$，有 $s(t) = s(t')$，且据 (1.5)，在 $x = s(t)$ 上 $(t' < t < t'')$ $u_x = 0$．而由强极值原理和我们关于 φ 和 f 的假定可推出，对于 $0 < x < s(t)$，$(0 < t < \sigma)$ 有 $u(x, t) > 0$．因为 $u(s(t), t) = 0$，我们可以应用第二章第 5 节定理 14，从而断定，在 $x = s(t)$ $(t' < t < t'')$ 上 $u_x < 0$．这是一个矛盾．

在把问题(1.1)—(1.5)化为求解积分方程的问题时，我们要用下面的引理．

引理 1 设 $\rho(t) (0 \leqslant t \leqslant \sigma)$ 为连续函数，$s(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \sigma)$ 满足 Lipschitz 条件，则对于每一 $0 < t \leqslant \sigma$，有

$$(1.6) \qquad \lim_{x \to s(t)-0} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t \rho(\tau) K(x, t; s(\tau), \tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \rho(t) + \int_0^t \rho(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial x} K(x, t; s(\tau), \tau) \right]_{x=s(t)} d\tau,$$

其中

$$K(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{2\pi^{1/2}(t-\tau)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right\}.$$

于是，引理建立了与单层位势相类似的跳跃关系.

证明　我们首先证明对于任何固定的正的 $\delta<t$，积分

$$(1.7)\qquad I=\int_{t-\delta}^{t}\frac{x-s(\tau)}{2(t-\tau)}K(x,t;s(\tau),\tau)d\tau$$

$$-\int_{t-\delta}^{t}\frac{s(t)-s(\tau)}{2(t-\tau)}K(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau$$

满足关系

$$(1.8)\qquad \varlimsup_{x\to s(t)-0}\left|I+\frac{1}{2}\right|\leqslant A\delta^{1/2}.$$

在这里以及在下文中，我们将以 A 记种种与 x，t 和 δ 无关的常数（A 可能依赖于 σ）.

写成 $I=I_1+I_2$，其中

$$I_1=\int_{t-\delta}^{t}\frac{x-s(t)}{2(t-\tau)}K(x,t;s(\tau),\tau)d\tau,$$

$$I_2=\int_{t-\delta}^{t}\frac{s(t)-s(\tau)}{2(t-\tau)}[K(x,t;s(\tau),\tau)-K(s(t),t;s(\tau),\tau)]d\tau.$$

据假定，因为 $|s(t)-s(\tau)|<A|t-\tau|$，我们得到

$$(1.9)\qquad |I_2|\leqslant A\int_{t-\delta}^{t}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}\leqslant A\delta^{1/2}.$$

为了估计 I_1，引进

$$(1.10)\qquad J_1=\int_{t-\delta}^{t}\frac{x-s(t)}{2(t-\tau)}K(x,t;s(t),\tau)d\tau.$$

于是有

$$(1.11)\qquad J_1-I_1=\int_{t-\delta}^{t}\frac{x-s(t)}{2(t-\tau)}K(x,t;s(t),\tau)$$

$$\times\left\{1-\exp\left[-\frac{(x-s(\tau))^2-(x-s(t))^2}{4(t-\tau)}\right]\right\}d\tau.$$

方括号里的式子不超过

$$\frac{1}{4(t-\tau)}|s(t)-s(\tau)|(|x-s(t)|+|x-s(\tau)|)$$

$$\leqslant A(|x-s(t)|+|s(t)-s(\tau)|).$$

因为只要对充分小的 δ 证明 (1.8) 就够了，又因为 x 要逼近 $s(t)$，所以我们可以假定最后那个不等式的右边小于 1. 因此 (1.11) 花括号里的式子就不超过

$$A(|x-s(t)|+|s(t)-s(\tau)|).$$

把它代入 (1.11)，并利用初等不等式：对于 $y \geqslant 0$ 有 $ye^{-y} \leqslant$ const.，我们就得到

$$(1.12)\qquad |J_1-I_1| \leqslant A\int_{t-\delta}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} + A\int_{t-\delta}^{t} d\tau \leqslant A\delta^{1/2}.$$

至于 J_1，现在在积分(1.10)中作代换

$$z=(t-\tau)/(x-s(t))^2,$$

注意到 $x-s(t)<0$，我们就得到

$$(1.13)\qquad J_1=-\frac{1}{4\pi^{1/2}}\int_0^{\delta'} z^{-3/2}\exp\left[-\frac{1}{4z}\right]dz,$$

其中

$$\delta'=\delta/(x-s(t))^2.$$

当 $x \to s(t)$ 时，$\delta' \to \infty$，因而 $J_1 \to -\frac{1}{2}$. 把这个结果和 (1.12)，(1.9) 结合起来，并考虑到 $I=I_1+I_2$，就推出关系式 (1.8). 从 (1.12)，(1.13)还可推出

$$(1.14)\qquad |I_1| \leqslant A.$$

利用 $s(t)$ 的 Lipschitz 连续性，我们得到

$$(1.15)\qquad \int_{t-\delta}^{t} \frac{|s(t)-s(\tau)|}{2(t-\tau)} K(s(t), t; s(\tau), \tau)d\tau \leqslant A.$$

最后，除(1.8)，(1.15)之外，我们还需要不等式

$$(1.16)\qquad \int_{t-\delta}^{t} \frac{|x-s(\tau)|}{2(t-\tau)} K(x, t; s(\tau), \tau)d\tau \leqslant A.$$

其证明由写成

$$\frac{|x-s(\tau)|}{2(t-\tau)}K \leqslant \frac{x-s(t)}{2(t-\tau)}K + \frac{|s(t)-s(\tau)|}{2(t-\tau)}K$$

并利用(1.14)和 s 的 Lipschitz 连续性就可推出。

利用 (1.8)，(1.15)，(1.16)，现在我们来完成引理 1 的证明. 令

$$(1.17) \quad L_1 = \int_{t-\delta}^{t} \rho(\tau)\frac{x-s(\tau)}{2(t-\tau)}K(x,t;s(\tau),\tau)d\tau - \int_{t-\delta}^{t} \rho(\tau)\frac{s(t)-s(\tau)}{2(t-\tau)}K(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau,$$

我们断定

$$(1.18) \quad \lim_{x\to s(t)-0} \sup \left| L_1 + \frac{1}{2}\rho(t) \right| \leqslant A\delta^{1/2} + A \operatorname*{l.u.b.}_{t-\delta\leqslant\tau\leqslant t} |\rho(t)-\rho(\tau)|.$$

事实上，在(1.17)中，写成 $\rho(\tau)=\rho(t)+[\rho(\tau)-\rho(t)]$，并利用(1.8)，(1.15)，(1.16)就可推出(1.18).

其次，注意到函数

$$L_2 = \int_0^{t-\delta} \rho(\tau)\frac{x-s(\tau)}{2(t-\tau)}K(x,t;s(\tau),\tau)d\tau - \int_0^{t-\delta} \rho(\tau)\frac{s(t)-s(\tau)}{2(t-\tau)}K(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau$$

$$(0<\delta<t)$$

满足关系

$$\lim_{x\to s(t)} L_2 = 0.$$

把(1.18)与之结合起来，我们就得到

$$\lim_{x\to s(t)-0} \sup \left| (L_1+L_2) + \frac{1}{2}\rho(t) \right| \leqslant A\delta^{1/2} + \operatorname*{l.u.b.}_{t-\delta\leqslant\tau\leqslant t} |\rho(t)-\rho(\tau)|.$$

因为左边与 δ 无关，又因为当 δ 充分小时可使右边任意地小，所以我们得到

$$\lim_{x \to s(t)-0} \sup \left| (L_1 + L_2) + \frac{1}{2} \rho(t) \right| = 0,$$

这正好是跳跃关系 (1.6).

现在我们把求解 (1.1)—(1.5) 的问题归结为求解积分方程的问题.

对于半平面 $x > 0$, 我们引进 Green 函数

(1.19) $G(x, t; \xi, \tau) = K(x, t; \xi, \tau) - K(-x, t; \xi, \tau)$.

假定 u, s 构成 (1.1)—(1.5) 的解. 在区域 $0 < \xi < s(\tau)$, $0 < \varepsilon < \tau < t - \varepsilon$ 上积分 Green 恒等式

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau}(Gu) = 0$$

并令 $\varepsilon \to 0$, 利用 (1.2)—(1.4) 之后我们立即得到

$$\text{(1.20)} \quad \begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t u_\xi(s(\tau), \tau) G(x, t; s(\tau), \tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^t f(\tau) G_\xi(x, t; 0, \tau) d\tau \\ &\quad + \int_0^b \varphi(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi \\ &\equiv M_1 + M_2 + M_3. \end{aligned}$$

引进

(1.21) $$v(t) = u_x(s(t), t),$$

我们把 (1.20) 两边对 x 微分, 然后让 $x \to s(t) - 0$. 利用引理 1, 我们得到

$$\text{(1.22)} \quad \begin{aligned} \lim_{x \to s(t)-0} \frac{\partial M_1}{\partial x} &= \frac{1}{2} v(t) \\ &\quad + \int_0^t v(\tau) G_x(s(t), t; s(\tau), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

此处我们利用 G_x 的第二项是连续函数这一事实, 因为

$$x + s(\tau) \geqslant b > 0$$

(由于 $s(t)$ 是单调非减的).

为了估计 $\lim \partial M_i / \partial x$ $(i = 2, 3)$, 我们引进半平面 $x > 0$ 上的

Neumann 函数

$$(1.23)\quad N(x, t; \xi, \tau) = K(x, t; \xi, \tau) + K(-x, t; \xi, \tau).$$

利用关系 $G_x = -N_\xi$，我们得到

$$(1.24)\quad \frac{\partial M_2}{\partial x} = \int_0^t f(\tau) G_{x\xi}(x, t; 0, \tau) d\tau$$

$$= \int_0^t f(\tau) N_\tau(x, t; 0, \tau) d\tau = -f(0) N(x, t; 0, 0)$$

$$- \int_0^t f'(\tau) N(x, t; 0, \tau) d\tau.$$

类似地，

$$(1.25)\quad \frac{\partial M_3}{\partial x} = \int_0^b \varphi(\xi) G_x(x, t; \xi, 0) d\xi$$

$$= \varphi(0) N(x, t; 0, 0) + \int_0^b \varphi'(\xi) N(x, t; \xi, 0) d\xi.$$

把(1.22)，(1.24)，(1.25)综合起来，从(1.20)我们得到

$$(1.26)\quad v(t) = 2[\varphi(0) - f(0)] N(s(t), t; 0, 0)$$

$$+ 2\int_0^b \varphi'(\xi) N(s(t), t; \xi, 0) d\xi$$

$$- 2\int_0^t f'(\tau) N(s(t), t; 0, \tau) d\tau$$

$$+ 2\int_0^t v(\tau) G_x(s(t), t; s(\tau), \tau) d\tau,$$

以及由(1.5)，(1.21)有

$$(1.27)\quad s(t) = b - \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

于是我们证明了当所有的 $t < \sigma$ 时对于定解问题 (1.1)—(1.5) 的每一个解 u，s，由 (1.21) 所定义的函数 $v(t)$ 满足 Volterra 型的非线性积分方程 (1.26) (对于 $0 < t < \sigma$)，其中 $s(t)$由(1.27)给出；$v(t)$ $(0 \leqslant t < \sigma)$ 是连续的，因此据连续性，(1.26)在 $t = 0$ 处也得到满足.

反之，假定对于某个 $\sigma > 0$，$v(t)$ 是积分方程(1.26)的连续解 $(0 \leqslant t < \sigma)$，其中 $s(t)$由(1.27)给出，此外还假定对于 $0 \leqslant t < \sigma$，

$s(t)>0$. 我们将证明，此时 $u(x, t)$, $s(t)$ 对所有的 $t<\sigma$ 构成 (1.1)—(1.5) 的解，其中 $u(x, t)$ 由以 $v(\tau)$ 代替 $u_\xi(s(\tau), \tau)$ 的 (1.20) 来定义.

首先，容易验证 (1.1)—(1.3). 其次，我们对 x 微分 $u(x, t)$，并令 $x \to s(t)-0$. 利用引理 1，前面对于 $\partial M_i/\partial x(i=2, 3)$ 的估计式以及积分方程 (1.26)，我们得到 $u_x(s(t), t)=v(t)$. 据 (1.27)，因为 $v(t)=-ds(t)/dt$，这就推出 (1.5). 注意，u, s 满足解的定义中所要求的一切可微性. 于是剩下要证明

$$u(s(t), t)=0.$$

在区域 $0<\xi<s(\tau)$, $0<\epsilon<\tau<t-\epsilon$ 中，积分 (关于 G 和 u 的) Green 恒等式，并设 $\epsilon \to 0$. 把这样得到的 $u(x, t)$ 的积分表示式与根据(1.20) (关于 $u_\xi(s(\tau), \tau)=v(\tau)$)给出的 $u(x, t)$ 的原始的定义比较，我们断言

$$\int_0^t u(s(\tau), \tau) G_\xi(x, t; s(\tau), \tau) d\tau=0 \quad (1.28)$$

$$(0<x<s(t),\ 0<t<\sigma).$$

令 $x \to s(t)-0$，并利用引理 1，我们可知，函数 $\phi(t)=u(s(t), t)$ 满足积分方程

$$\phi(t)=2\int_0^t \phi(\tau) G_\xi(s(t), t; s(\tau), \tau) d\tau. \quad (1.29)$$

因为

$$|G_\xi(s(t), t; s(\tau), \tau)| \leqslant \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{1/2}},$$

所以积分方程的核是可积的. 因此 $\phi(t)=0$，即 $u(s(t), t)=0$. 于是我们证明了:

引理 2 对于 $t<\sigma$，问题 (1.1)—(1.5) 等价于寻求积分方程 (1.26) (对于 $0 \leqslant t<\sigma$) 的连续解 $v(t)$ 的问题，其中 $s(t)$ 由 (1.27) 给出，并且是正的.

2. Stefan 问题解的存在性和唯一性

在这一节我们将完成定理 1 的证明. 我们以 C_σ 记定义在区间

$0 \leqslant t \leqslant \sigma$ 上由 $\|v\| = \text{l.u.b.}|v(t)|$ 赋范的所有连续函数 $v(t)$ 的集合，并设 $C_{\sigma,M}$ 记 C_σ 的子集 $\{v;\ v \in C_\sigma,\ \|v\| \leqslant M\}$. 以 Tv 记(1.26)的右端，其中 $s(t)$ 由(1.27)给出．对于任何 $M > 0$，如果 σ 充分小，设 $2\sigma M < b$，则对于每个 $v \in C_{\sigma,M}$，(由 (1.27) 给出的) 函数 $s(t)$ 为正 (事实上，$s(t) > b/2$)，因而 Tv 完全有定义.

通过初等的直接计算可以证明，如果

$$M = 1 + 4[\underset{0 \leqslant x \leqslant b}{\text{l.u.b.}}|\varphi'(x)|], \tag{2.1}$$

如果对某个仅依赖于 $|f'(t)|$，$|f(0) - \varphi(0)|$，b，和 $1/b$ 等的上界的常数 A 有

$$AM\sigma^{1/2} < 1, \tag{2.2}$$

则 T 把 $C_{\sigma,M}$ 映射成自身，并且是一个压缩映射．其细节见 [38]. 运用第三章第 1 节定理 1，我们断定 T 在 $C_{\sigma,M}$ 中有唯一的不动点 v. 于是 v 是(1.26)的解．鉴于引理 2，我们证明了对 (仅由 (2.2) 限制的) 某个充分小的 σ 和所有的 $t < \sigma$，(1.1)—(1.5)的解存在.

对于 $t < \sigma$，为了证明解的唯一性，我们假定 u_0，s_0 为 (1.1)—(1.5) ($t < \sigma$) 的另一个解，并设 v_0 为 (1.26) 对于 $0 \leqslant t < \sigma$ 的相应的解．对任何 $\sigma' < \sigma$ 只要对 $t \leqslant \sigma'$ 证明唯一性就够了．设

$$\overline{M} = \max\{M,\ \underset{0 \leqslant t \leqslant \sigma'}{\text{l.u.b.}}|v_0(t)|\},$$

并设 $\bar{\sigma}$ 为满足 $A\overline{M}\bar{\sigma}^{1/2} \leqslant 1$ 的任何正数，其中 A 即(2.2)中的常数，通过与前面证明 T 把 $C_{\sigma,M}$ 映射成自身，并且是一个压缩映射时同样的计算，可以证明 T 把 $C_{\bar{\sigma},\overline{M}}$ 映射成自身，并且是一个压缩映射，因此，在 $C_{\bar{\sigma},\overline{M}}$ 中最多有 T 的一个不动点．由此可见，对于 $0 \leqslant t \leqslant \bar{\sigma}$，有 $v(t) = v_0(t)$. 因此，当 $0 \leqslant t \leqslant \bar{\sigma}$，$0 \leqslant x \leqslant s(t)$ 时也有

$$s(t) = s_0(t),\ u(x,t) = u_0(x,t).$$

其次，我们在 $t > \bar{\sigma}$ 时考虑定解问题 (1.1)—(1.5)，即对 $t \geqslant \bar{\sigma}$ (代替 $t \geqslant 0$) 考虑 (1.1)，(1.2)，(1.4)，(1.5)，而 (1.3) 由

$$u(x,\bar{\sigma}) = u(x,\bar{\sigma}) \qquad (0 < x \leqslant s(\bar{\sigma}))$$

来代替．我们又可以把这一问题变换为积分方程．只要以 M_0 代替 M，我们就可以把对方程 (1.26) 所考虑的一切推广到现在的积

分方程，其中

$$M_0 = 1 + 4[\underset{0\leqslant x\leqslant s(\bar{\sigma})}{\text{l.u.b.}}|u_x(x,\bar{\sigma})|]. \tag{2.3}$$

类似地，我们可以把在区间 $\bar{\sigma}\leqslant t<\sigma$ 中对 u_0，s_0 的问题(1.1)—(1.5)归结为积分方程．因为 $u(x,\bar{\sigma})=u_0(x,\bar{\sigma})$，$s(\bar{\sigma})=s_0(\bar{\sigma})$，所以关于 $v(t)$ 和 $v_0(t)$ 的积分方程全同．于是重复和前面同样的论证，我们就可断言，对于任何满足下式的 $\tilde{\sigma}$：

$$A\overline{M}_0(\tilde{\sigma}-\bar{\sigma})^{1/2}<1 \qquad (\overline{M}_0=\max\{M_0,\underset{0\leqslant t\leqslant\sigma'}{\text{l.u.b.}}|v_0(t)|\})$$

在 $\bar{\sigma}\leqslant t\leqslant\tilde{\sigma}$ 上有 $v(t)=v_0(t)$．

和前面的方法一样，可以一步一步地进行，注意在每一步中取时间间隔$\geqslant\varepsilon$，其中 ε 满足：

$$A\max\{1+4[\underset{0\leqslant x\leqslant s(t),\bar{\sigma}\leqslant t\leqslant\sigma'}{\text{l.u.b.}}|u_x(x,t)|],\ \underset{0\leqslant t\leqslant\sigma'}{\text{l.u.b.}}|v_0(t)|\}\varepsilon^{1/2}=1.$$

对所有的 $t<\sigma$（σ 为满足(2.2)的任何正数）已证明了存在性和唯一性，必须强调，在前面的证明中（见(2.1)，(2.2)）还指出了下列事实：

如果对于 $t>0$ 代替(1.1)—(1.5)，而对于 $t>\lambda$ 考虑(1.1)—(1.5)，即对 $t>\lambda$，(1.1)、(1.2)、(1.4)、(1.5) 成立，而 (1.3) 由 $u(x,\lambda)=u(x,\lambda)$，$(0<x\leqslant s(\lambda))$ 来代替；又如果

$$|u_x(x,\lambda)|,\ s(\lambda),\ 1/s(\lambda) \tag{2.4}$$

与 λ 无关地有界，那么在区间 $\lambda\leqslant t\leqslant\lambda+\varepsilon$ 上问题的唯一解存在，其中 ε 是某个与 λ 无关的正数． 当然，对于每一个 λ，关于 $v(t)$ 的积分方程是不同的．

因为对 (1.1)—(1.5) 的任何解，函数 $s(t)$ 单调非减，所以 $1/s(\lambda)\leqslant 1/b$．

为了完成定理 1 的证明，只要证明下列论断即可： **对每个 $t_0>0$ 存在 $\varepsilon>0$，使得定解问题(1.1)—(1.5)对所有的 $t<t_0$ 有唯一解时，它对所有 $t<t_0+\varepsilon$ 也有唯一解．** 鉴于前面的附注，只要证明以下论断就够了： 如果 $u(x,t)$，$s(t)$ 是对所有 $t<t_0$ 时(1.1)—(1.5)的解，那么对所有充分小的 $\eta>0$，函数

(2.5) $$\underset{0<x<s(t_0-\eta)}{\text{l.u.b.}} |u_x(x, t_0-\eta)|, \qquad s(t_0-\eta)$$

与 η 无关地有界. 如果我们能证得

(2.6) $$\underset{0<t<t_0}{\text{l.u.b.}} |v(t)| < \infty,$$

则从 (1.27) 可推出 $s(t)$ 对于 $t<t_0$ 的有界性. 其次, 对 x 微分 (1.20), 并利用(2.6)和(1.16)我们也可推出(2.5)中第一个函数的有界性. 因此, 如证得 (2.6), 则定理 1 证毕.

(2.6) 的证明　　我们取相应于区间 $t_0-\mu<t<t_0$ (μ 充分小) 中定解问题 (1.1)—(1.5) 的积分方程作为 $v(t)$. 因为 $u(0, t_0-\mu)=f(t_0-\mu)$, 所以方程是

(2.7) $$\begin{aligned} v(t) &= 2\int_0^{s(t_0-\mu)} u_\xi(\xi, t_0-\mu)N(s(t), t; \xi, t_0-\mu)d\xi \\ &\quad -2\int_{t_0-\mu}^{t} f'(\tau)N(s(t), t; 0, \tau)d\tau \\ &\quad +2\int_{t_0-\mu}^{t} v(\tau)G_x(s(t), t; s(\tau), \tau)d\tau \\ &= T_1+T_2+T_3. \end{aligned}$$

因为 $v(t)\leqslant 0$, 我们只须找到 $v(t)$ 的下界. 引入

(2.8) $$\psi(t) = \underset{t_0-\mu<\tau<t}{\text{g.l.b.}}\, v(\tau),$$

我们来估计 T_3.

(2.9) $$\begin{aligned} T_3 &= -\int_{t_0-\mu}^{t} v(\tau)\frac{s(t)-s(\tau)}{t-\tau}K(s(t), t; s(\tau), \tau)d\tau \\ &\quad +\int_{t_0-\mu}^{t} v(\tau)\frac{s(t)+s(\tau)}{t-\tau}K(-s(t), t; s(\tau), \tau)d\tau \\ &= T_3'+T_3''. \end{aligned}$$

因为 $s(t)-s(\tau)\geqslant 0$ 且 $v(\tau)\leqslant 0$, 所以我们有

(2.10) $$T_3'\geqslant 0$$

因为 $s(t)+s(\tau)\geqslant 2b$, 所以我们有

(2.11) $$|T_3''| \leqslant B_0|\psi(t)|\int_{t_0-\mu}^{t} \frac{1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{b^2}{t-\tau}\right]d\tau$$

$$\leqslant B_1|\psi(t)|\mu \leqslant \frac{1}{2}|\psi(t)|,$$

其中 B_0, B_1 为仅依赖于 b 的常数，而 μ 使得 $2B_1\mu \leqslant 1$, μ 将在以下逐步确定.

很清楚，当 $t_0 - \mu \leqslant t < t_0$ 时有

$$|T_1 + T_2| \leqslant B', \tag{2.12}$$

其中 B' 为某个依赖于 μ 而与 t 无关的常数. 把 (2.7), (2.9)—(2.12) 综合起来，我们得到

$$v(t) \geqslant \frac{1}{2}\psi(t) - B' \qquad (t_0 - \mu \leqslant t < t_0). \tag{2.13}$$

对(2.13)两边取下确界，我们得到

$$\psi(t) \geqslant -2B' \qquad (t_0 - \mu \leqslant t < t_0),$$

从而推出 $v(t)$ $(t_0 - \mu \leqslant t < t_0)$ 的有界性，于是 (2.6) 成立.

我们考虑由

$$u_x(0, t) = f(t) \qquad (f(t) < 0,\ t > 0) \tag{2.14}$$

代替条件(1.2)所得到的 Stefan 问题.

定理 2 假定 $f(t)(0 \leqslant t < \infty)$ 是一连续函数，而

$$\varphi(x)\ (0 \leqslant x \leqslant b)$$

是一连续可微函数，则对所有 $t < \infty$, 问题 (1.1), (2.14), (1.3)—(1.5) 存在唯一解 $u(x,t)$, $s(t)$, 而且 $s(t)$ 为严格单调增的.

其证明类似于定理 1, 因此省略.

从定理 1, 2 的证明我们可以看出，在 t 的有界区间中，解连续地依赖于数据 f 和 φ. 我们可以利用这一事实把定理 2 推广到这样的情形：在 (2.14) 中，由于可用负的函数在 t 的有界区间中逼近 f, 所以我们可以只假定 $f \leqslant 0$. 这时只能断言自由边界 $s(t)$ 是单调非减的.

3. Stefan 问题解的渐近性态

在物理学的应用中，必须考虑单位，所以应把(1.5)换为

$$\alpha u_x(s(t), t) = -\frac{ds(t)}{dt} \qquad (t > 0), \tag{3.1}$$

这里 α 是小的正的常数．如果以 (3.1) 代替 (1.5)，而 α 为任意正数，定理 1，2 仍然有效，其证明除若干细微的修改外，和以前是一样的．

定理 3　设 $u(x, t)$，$s(t)$ 为 Stefan 问题 (1.1)，(2.14)，(1.3)，(1.4)，(3.1) 的解．如果对某个 $\gamma > 0$，$\frac{1}{2} < \delta < 1$，

$$\lim_{t\to\infty} t^{\delta} f(t) = -\gamma, \tag{3.2}$$

则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{s(t)}{t^{1-\delta}} = \frac{\alpha\gamma}{1-\delta}. \tag{3.3}$$

如果(3.2)关于 $\delta = 1/2$ 成立，则

$$\lim_{t\to\infty} \frac{s(t)-b}{t^{1/2}} = 2\alpha\gamma(1+0(\alpha)), \tag{3.4}$$

其中对于 $\alpha \to 0$，$\alpha^{-1}0(\alpha)$ 为有界．

证明　在区域 $0 < \xi < s(\tau)$，$0 < \tau < t$ 上积分(1.1)，并利用(2.14)，(1.3)，(1.4)，(3.1)我们得到

$$\frac{s(t)}{\alpha} = \frac{b}{\alpha} - \int_0^t f(\tau)\,d\tau + \int_0^b \varphi(x)\,dx - \int_0^{s(t)} u(x,t)\,dx. \tag{3.5}$$

我们估计积分

$$I(t) = \int_0^{s(t)} u(x,t)\,dx. \tag{3.6}$$

由极值原理，$u \geqslant 0$．因此

$$I(t) \geqslant 0. \tag{3.7}$$

为了找到 I 的上界，我们考虑如下问题

$$\begin{aligned} &w_{xx} - w_t = 0 && (0 < x < \infty,\ t > 0), \\ &w_x(0,t) = f(t) - \varepsilon && (t > 0,\ \varepsilon > 0), \\ &w(x,0) = \Phi(x) && (0 < x < \infty), \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中当 $0 \leqslant x \leqslant b$ 时 $\Phi(x) = \varphi(x)$，当 $b < x < \infty$ 时 $\Phi(x) = 0$．容易验证，函数

$$w_x(x,t) = -\int_0^t [f(\tau) - \varepsilon] N(x,t;0,\tau)\,d\tau \tag{3.9}$$

$$+\int_0^b \varphi(\xi)N(x, t; \xi, 0)d\xi$$

是(3.8)的解．其中N是 Neumann 函数(1.23)．因为N是正函数，所以 $w_\varepsilon(x, t) \geqslant 0$．特别地，有 $w_\varepsilon(s(t), t) \geqslant 0$．

对任意的 $T > 0$，在区域 $0 \leqslant x \leqslant s(t)$，$0 \leqslant t \leqslant T$ 上考虑函数 $W = w_\varepsilon - u$．在 $x = s(t)$ 上，$W \geqslant 0$．在 $t = 0$ 上，$W = 0$．最后，在 $x = 0$ 上，$W_x = -\varepsilon < 0$．利用极值原理，我们断定，对于 $0 \leqslant x \leqslant s(t)$，$0 \leqslant t \leqslant T$，有 $W \geqslant 0$．因为对于任何 $T > 0$，$\varepsilon > 0$ 上面的结论都是正确的，所以对所有的 $0 \leqslant x \leqslant s(t)$，$t > 0$，我们得到 $u(x, t) \leqslant w(x, t)$，其中 $w(x, t)$ 由 $\varepsilon = 0$ 的(3.9)定义．因此

$$I(t) \leqslant s(t)\operatorname*{l.u.b.}_x \left\{\int_0^t |f(\tau)|N(x, t; 0, \tau)d\tau + \int_0^b \varphi(\xi)N(x, t; \xi, 0)d\xi\right\}.$$

其次，注意到

$$N(x, t; \xi, \tau) \leqslant (t-\tau)^{-1/2}$$

对某个常数 A，我们得到

$$I(t) \leqslant s(t)\left\{\int_0^t (t-\tau)^{1/2}|f(\tau)|d\tau + A(t+1)^{-1/2}\right\}. \tag{3.10}$$

把从(3.10)和(3.7)得到的估计代入(3.5)，定理的证明即可顺利完成．

对于如下两相 Stefan 问题，我们考虑 $s(t)$ 的渐近性态：

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = a_1^2 \frac{\partial w_1}{\partial t} \qquad (-\infty < x < s(t),\ t > 0), \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = a_2^2 \frac{\partial w_2}{\partial t} \qquad (s(t) < x < \infty,\ t > 0), \tag{3.12}$$

$$w_1(x, 0) = \phi_1(x) \geqslant 0 \qquad (-\infty < x < 0), \tag{3.13}$$

$$w_2(x, 0) = \phi_2(x) \leqslant 0 \qquad (0 < x < \infty), \tag{3.14}$$

$$w_1(s(t), t) = w_2(s(t), t) = 0 \qquad (t > 0, \text{且} s(0) = 0), \tag{3.15}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = -k_1 \frac{\partial w_1(s(t), t)}{\partial x} + k_2 \frac{\partial w_2(s(t), t)}{\partial x} \ (t > 0), \tag{3.16}$$

其中 k_1, k_2, a_1, a_2 为正的常数.

我们作如下假定:

(Ψ) 当 $x \to -\infty$ 时, $\phi_1(x) \to \gamma_1 \geqslant 0$, $d\phi_1(x)/dx \to 0$,

当 $x \to \infty$ 时, $\phi_2(x) \to \gamma_2 \leqslant 0$, $d\phi_2(x)/dx \to 0$,

$$\int_{-\infty}^{0} |\phi_1(x) - \gamma_1| dx < \infty, \int_{0}^{\infty} |\phi_2(x) - \gamma_2| dx < \infty.$$

于是我们要求解 w_1, w_2, s 满足:

(3.17) 当 $x \to \pm\infty$ 时,对有界集中的 t 一致地有

$$w_i \to \gamma_i,\ \partial w_i/\partial x \to 0 \qquad (i = 1, 2).$$

令

$$u_i = w_i - \gamma_i \qquad (i = 1, 2) \tag{3.18}$$

来变换问题(3.11)—(3.17)是适当的. 变换后的问题为:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = a_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial t} \qquad (-\infty < x < s(t),\ t > 0), \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = a_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} \qquad (s(t) < x < \infty,\ t > 0). \tag{3.20}$$

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x) \equiv \phi_1(x) - \gamma_1 \qquad (-\infty < x < 0), \tag{3.21}$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x) \equiv \phi_2(x) - \gamma_2 \qquad (0 < x < \infty), \tag{3.22}$$

$$u_i(s(t), t) = -\gamma_i (i = 1, 2) \qquad (t > 0, \text{且} s(0) = 0), \tag{3.23}$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = -k_1 \frac{\partial u_1(s(t), t)}{\partial x} + k_2 \frac{\partial u_2(s(t), t)}{\partial x} \qquad (t > 0), \tag{3.24}$$

(3.25) 当 $x \to \pm\infty$ 时,对有界集中的 t 一致地有

$$u_i \to 0,\ \partial u_i/\partial x \to 0 \qquad (i = 1, 2).$$

自由边界未必是 t 的单调函数. 不过,用第1,2节的方法(在假定 (Ψ) 之下),只要

$$k_1,\ k_2,\ a_1^2 k_1,\ a_2^2 k_2 \tag{3.26}$$

充分小, 仍可证明解 u_1, u_2, s 的存在性和唯一性. 在物理学的应用中, (3.26) 中的那些量实际上是很小的, 足以保证存在性和唯一性. 现在我们导出 $s(t)$ 的渐近界.

由极值原理,因为在各自的定义域中有 $w_1 \geqslant 0$, $w_2 \leqslant 0$,又因

为 $w_i(s(t), t) = 0 (i = 1,2)$，于是我们得出 $\partial w_i(s(t), t)/\partial x \leqslant 0$，因此 $\partial u_i(s(t), t)/\partial x \leqslant 0$. 引进函数.

$$(3.27)\qquad \lambda_i(t) = -\int_0^t \frac{\partial u_i(s(\tau), \tau)}{\partial x} d\tau = \int_0^t \left|\frac{\partial u_i(s(\tau), \tau)}{\partial x}\right| d\tau \qquad (i = 1, 2).$$

$\lambda_i(t)$ 为非负单调非减函数. 积分(3.19)我们得到

$$(3.28)\qquad \lambda_1(t) = a_1^2 \int_{-\infty}^0 \varphi_1(x) dx - a_1^2 \gamma_1 s(t) - a_1^2 \int_{-\infty}^{s(t)} u_1(x, t) dx.$$

我们继续估计积分

$$(3.29)\qquad I_1(t) = a_1^2 \int_{-\infty}^{s(t)} u_1(x, t) dx.$$

引进函数

$$(3.30)\qquad \sigma(t) = \underset{0<\tau<t}{\text{l.u.b.}} |s(\tau)|$$

并把 u_1 和两个函数 z_1 和 z_2 比较. z_1 是在区域

$$-\infty < \xi < -\sigma(t),\ 0 < \tau < t$$

中(3.19)的解，它满足如下条件：

$$(3.31)\qquad \begin{aligned} &z_1(\xi, 0) = \varphi_1(\xi) && (-\infty < \xi < -\sigma(t)), \\ &z_1(-\sigma(t), \tau) = -\gamma_1 && (0 < \tau < t), \end{aligned}$$

而 z_2 为(3.19)在区域 $-\infty < \xi < \sigma(t)$, $0 < \tau < t$ 中满足如下条件的解：

$$(3.32)\qquad \begin{aligned} &z_2(\xi, 0) = \varphi_1(\xi) && (-\infty < \xi < 0), \\ &z_2(\xi, 0) = 0 && (0 < \xi < \sigma(t)), \\ &z_2(\sigma(t), \tau) = -\gamma_1 && (0 < \tau < t). \end{aligned}$$

引进方程(3.19)的基本解

$$(3.33)\qquad K(x, t; \xi, \tau) = \frac{a_1}{2\pi^{1/2}(t-\tau)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{a_1^2(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right\} = a_1 K(a_1^2 x, t; a_1^2 \xi, \tau),$$

然后引进(3.19)在半空间 $x < 0$ 的 Green 函数

(3.34) $G(x, t; \xi, \tau) = K_1(x, t; \xi, \tau) - K_1(-x, t; \xi, \tau)$.

容易验证，由

(3.35) $a_1^2 z_1(\xi, \tau)$

$$= a_1^2 \int_{-\infty}^{-\sigma(t)} G_1(\xi + \sigma(t), \tau; \xi' + \sigma(t), 0)\varphi_1(\xi')d\xi' + \gamma_1 \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi'} G_1(\xi + \sigma(t), \tau; 0, \tau')d\tau'$$

定义的函数 z_1 是 (3.19), (3.31) 的解，此外，当 $\xi \to \infty$ 时对有界集中的 τ 一致地有 $z_1(\xi, \tau) \to 0$。运用极值原理我们推得

$$z_1(\xi, \tau) \leqslant u_1(\xi, \tau).$$

因此，有

(3.36) $-I_1(t)$

$$\leqslant -a_1^2 \int_{-\infty}^{-\sigma(t)} \int_{-\infty}^{-\sigma(t)} G_1(x + \sigma(t), t; \xi + \sigma(t), 0)\varphi_1(\xi)d\xi\, dx - \gamma_1 \int_{-\infty}^{-\sigma(t)} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} G_1(x + \sigma(t), t; 0, \tau)d\tau dx + 2a_1^2\sigma(t) \underset{0<\tau<t}{\text{l.u.b.}} |u_1|.$$

(3.36) 右边第一项不超过 $a_1^2 \int |\varphi_1(\xi)| d\xi$，第三项不超过 $2a_1^2\sigma(t)B_1$，其中 $B_1 = \max\{\gamma_1, \text{l.u.b.}|\varphi_1|\}$。最后，改变(3.36)右边第二项的积分次序，我们发现，这一项等于 $2\gamma_1 a_1(t/\pi)^{1/2}$。综合以上事实，我们得到

(3.37)
$$-I_1(t) \leqslant a_1^2 \int_{-\infty}^0 |\varphi_1(\xi)| d\xi + 2a_1^2 B_1\sigma(t) + \frac{2\gamma_1 a_1}{\pi^{1/2}} t^{1/2}.$$

用类似的方法，我们可以类似于 (3.35) 借助于 Green 函数来定义 z_2，从而断定 $u_1(x, t) \geqslant z_2(x, t)$。利用 z_2 的定义，经过一些计算后我们得到

(3.38)
$$-I_1 \geqslant -a_1^2 \int_{-\infty}^0 |\varphi_1(\xi)| d\xi - 2a_1^2 B_1\sigma(t) + \frac{2\gamma_1 a_1}{\pi^{1/2}} t^{1/2}.$$

综合(3.37)和(3.38),并把结果代入(3.28),我们得到

$$(3.39)\qquad \lambda_1(t)=\frac{2\gamma_1 a_1}{\pi^{1/2}}t^{1/2}-\gamma_1 a_1^2 s(t)+\vartheta_1 a_1^2\int_{-\infty}^{0}|\varphi_1(x)|dx$$
$$+\vartheta_2 a_1^2 B_1\sigma(t)$$

其中 $|\vartheta_1|\leqslant 2$, $|\vartheta_2|\leqslant 2$.

类似地,我们得到

$$(3.40)\qquad \lambda_2(t)=-\frac{2\gamma_2 a_2}{\pi^{1/2}}t^{1/2}-\gamma_2 a_2^2 s(t)+\vartheta_3 a_2^2\int_{0}^{\infty}|\varphi_2(x)|dx$$
$$+\vartheta_4 a_2^2 B_2\sigma(t)$$

其中 $B_2=\max\{-\gamma_2,\ \text{l.u.b.}|\varphi_2|\}$, $|\vartheta_3|\leqslant 2$, $|\vartheta_4|\leqslant 2$.

积分(3.24)并用(3.27),(3.39),和(3.40)中 λ_i 的定义,我们得到

$$(3.41)\qquad s(t)=k_1\lambda_1(t)-k_2\lambda_2(t)$$
$$=\frac{2}{\pi^{1/2}}(k_1 a\gamma_1+k_2 a_2\gamma_2)t^{1/2}-(k_1\gamma_1 a_1^2-k_2\gamma_2 a_2^2)s(t)$$
$$+\vartheta_1 k_1 a_1^2\int_{-\infty}^{0}|\varphi_1(x)|dx-\vartheta_3 k_2 a_2^2\int_{0}^{\infty}|\varphi_2(x)|dx$$
$$+(\vartheta_2 k_2 a_1^2 B_1-\vartheta_4 k_2 a_2^2 B_2)\sigma(t).$$

我们欲从(3.41)右边消去 $\sigma(t)$. 为此,注意到

$$\left|\frac{ds(\tau)}{d\tau}\right|\leqslant k_1\left|\frac{\partial}{\partial x}u_1(s(\tau),\tau)\right|+k_2\left|\frac{\partial}{\partial x}u_2(s(\tau),\tau)\right|.$$

因此

$$(3.42)\qquad \sigma(t)\leqslant k_1\lambda_1(t)+k_2\lambda_2(t).$$

从(3.39),(3.40)把 λ_1, λ_2 代入(3.42),我们得到

$$(3.43)\qquad \sigma(t)\leqslant\frac{2}{\pi^{1/2}}(k_1\gamma_1 a_1-k_2\gamma_2 a_2)t^{1/2}$$
$$-(k_1\gamma_1 a_1^2+k_2\gamma_2 a_2^2)s(t)$$
$$+\vartheta_1 k_1 a_1^2\int_{-\infty}^{0}|\varphi_1(x)|dx$$
$$+\vartheta_3 k_2 a_2^2\int_{0}^{\infty}|\varphi_2(x)|dx$$

$$+ (\vartheta_2 k_1 a_1^2 B_1 + \vartheta_4 k_2 a_2^2 B_2)\sigma(t).$$

当 $k_1 a_1^2$, $k_2 a_2^2$ 充分小时，从(3.43)我们得到 $\sigma(t)$ 如下形式的界：

(3.44) $\quad \sigma(t) \leqslant 2(k_1\gamma_1 a_1 - k_2\gamma_2 a_2)t^{1/2} + A(k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2),$

其中 A 与 t 无关. 把(3.44)代入(3.41)我们得到渐近公式：

(3.45) $$\frac{s(t)}{t^{1/2}} = \frac{2}{\pi^{1/2}}\{k_1 a_1 \gamma_1(1 + o(\beta)) + k_2 a_2 \gamma_2(1 + o(\beta))\}$$

$$+ \frac{o(\beta)}{t^{1/2}} \qquad (\beta = k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2),$$

其中 $\beta^{-1}o(\beta)$ (当 $\beta \to 0$ 时)对 $t(1 \leqslant t \leqslant \infty)$ 是一致有界的. 于是，特别地我们有

(3.46) $$\limsup_{t\to\infty} \left| \frac{s(t)}{t^{1/2}} - \frac{2}{\pi^{1/2}}(k_1 a_1 \gamma_1 + k_2 a_2 \gamma_2) \right|$$

$$= (k_1 a_1 + k_2 a_2) o(\beta).$$

我们总结如下：

定理 4 如果函数 ϕ_1, ϕ_2 满足假定 (Ψ)，则 $s(t)$ 满足渐近公式 (3.45)，(3.46).

在如下特殊情况下我们考虑问题(3.11)—(3.16)：

(3.47) $$\phi_1(x) \equiv \gamma_1 \geqslant 0, \quad \phi_2(x) \equiv \gamma_2 \leqslant 0.$$

我们试图找如下形式的显式解：

(3.48) $\quad s(t) = \mu t^{1/2}, \quad w_i(x,t) = f_i(z) \qquad (i = 1, 2),$

其中 $z = x/t^{1/2}$.

我们得到

(3.49) $$f_1(z) = C_1 \int_\mu^z \exp\left[-\frac{a_1^2\zeta^2}{4}\right] d\zeta,$$

$$f_2(z) = C_2 \int_\mu^z \exp\left[-\frac{a_2^2\zeta^2}{4}\right] d\zeta,$$

其中 C_1, C_2, μ 满足下列方程

(3.50) $$\frac{1}{2}\mu = -k_1 C_1 \exp\left[-\frac{a_1^2\mu^2}{4}\right] + k_2 C_2 \exp\left[-\frac{a_2^2\mu^2}{4}\right],$$

(3.51) $$C_1 \int_\mu^{-\infty} \exp\left[-\frac{a_1^2\zeta^2}{4}\right] d\zeta = \gamma_1, \quad C_2 \int_\mu^{\infty} \exp\left[-\frac{a_2^2\zeta^2}{4}\right] d\zeta = \gamma_2.$$

对小的 μ 我们得到近似解

$$\mu = \frac{2}{\pi^{1/2}}(k_1 a_1 \gamma_1 + k_2 a_2 \gamma_2), \tag{3.52}$$

$$C_1 = -\frac{a_1 \gamma_1}{\pi^{1/2}}, \quad C_2 = \frac{a_2 \gamma_2}{\pi^{1/2}}. \tag{3.53}$$

(3.52) 符合渐近公式 (3.46).

刚才考虑过的特殊情形使我们推测: ($t \to \infty$, $\beta \to 0$ 时) $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$渐渐地仅依赖于 $z = x/t^{1/2}$,且可能分别趋于$f_1(z)$和 $f_2(z)$. 事实上可以证明这一点, 但其细节十分冗长,这里不予赘述.

4. 解 Stefan 问题的另一种方法

在第 1, 2 节里, Stefan 问题经化为 $v(t)=u_x(s(t),t)$的非线性积分方程而得到解决.其他类型的自由边界问题(见第 5 节),以及比热传导方程更一般的方程, 即对于系数充分光滑的抛物型方程

$$a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u - u_t = f(x,t),$$

也可以应用这一方法. 不过, 由于这种方法需要借助于基本解来表示 u, 看来局限于线性抛物型方程.

另一局限性在于当 $s(0) = b = 0$ 时, $v(t)$ 的积分方程在 $t = 0$ 处可能产生不可积的奇异性. 有时用 $s(0) = b_n \to 0$ 的问题去逼近原问题可以克服这个困难; 见问题 1—7.

在这一节, 我们给出解 Stefan 问题的另一种方法, 它既可用于非线性抛物型方程. 也可用于 $s(0) = b = 0$ 的情形. 不过, 它限于(在固定边界上)给出 u_x (而不是 u) 的边界条件的问题,即条件是(2.14)形式的问题,而不是(1.2)形式的问题.

我们就如下 Stefan 问题来叙述这个方法:

$$u_{xx} = u_t \qquad (0 < x < s(t),\ t > 0), \tag{4.1}$$

$$u_x(0,t) = f(x) < 0 \qquad (t > 0), \tag{4.2}$$

$$u(s(t),t) = 0 \qquad (t \geqslant 0, \text{且 } s(0) = 0), \tag{4.3}$$

$$u_x(s(t),t) = -\frac{ds(t)}{dt} \qquad (t > 0). \tag{4.4}$$

积分(4.1)并利用(4.2)—(4.4)我们得到

$$(4.5)\qquad s(t) = F(t) - \int_0^{s(t)} u(x, t)dx,$$

其中 $F(t) = -\int_0^t f(\tau)\,d\tau$.

对于任意的 $\lambda > 0$, 定义变换 T 如下. 设 $\sigma(t)$ 为一在区间 $0 \leqslant t \leqslant \lambda$ 上定义的连续可微的单调非减函数，且满足如下条件: $\sigma(0) = 0$, 当 $t > 0$ 时 $\sigma(t) > 0$. 设 $v(x, t)$ 为问题

$$(4.6)\qquad \begin{aligned} &v_{xx} = v_t \qquad (0 < x < \sigma(t),\ 0 < t \leqslant \lambda), \\ &v_x(0, t) = f(t) \qquad (0 < t \leqslant \lambda), \\ &v(\sigma(t), t) = 0 \qquad (0 < t < \lambda) \end{aligned}$$

的解. 我们令 $\rho = T\sigma$,其中

$$(4.7)\qquad \rho(t) = F(t) - \int_0^{\sigma(t)} v(x, t)dx.$$

显然, σ 是 T 的不动点，当且仅当一对 v, σ 是(4.1)—(4.4)的解.

可以证明 T 完全有定义，而且 $\rho(t)$ 仍是连续可微且单调非减的, $\rho(0) = 0$, 而当 $t > 0$ 时，有 $\rho(t) > 0$. 用第三章第 1 节定理 1 可以证明 T 有唯一的不动点. 因为本书不讨论形如 (4.6) 的问题，所以我们不再进一步追究存在性问题了，不过，我们将证明解的唯一性:

定理 5 假定 $f(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ 为连续函数，则 Stefan 问题 (4.1)—(4.4) 最多有一个解.

用第 1, 2 节的方法也可以证明问题(4.1)—(4.4)解的存在性. 它在问题 1—7 中给出.

证明 我们需要如下引理.

引理 3 设 $\sigma(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \lambda)$ 为一连续的非减函数, $\sigma(0) = 0$, 当 $t > 0$ 时 $\sigma(t) > 0$, 又设 $v(x, t)$ 为问题

$$(4.8)\qquad \begin{aligned} &v_{xx} = v_t \qquad (0 < x < \sigma(t),\ 0 < t < \lambda), \\ &v_x(0, t) = f(t) \qquad (0 < t < \lambda), \\ &v(\sigma(t), t) = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant \lambda) \end{aligned}$$

的解，则对任何 $B > \operatorname*{l.u.b.}_{0<t<\lambda} |f(t)|$ 有

$$(4.9)\qquad 0 \leqslant v(x, t) \leqslant B(\sigma(t) - x)$$
$$(0 \leqslant x \leqslant \sigma(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \lambda).$$

证明　利用极值原理可推出不等式 $v \geqslant 0$. 为了证明(4.9)的第二个不等式,对任何 $0 < t^* \leqslant \lambda$,我们考虑定解问题:

$$z_{xx} = z_t \qquad (0 < x < \sigma(t^*),\ 0 < t < t^*),$$
$$z(x, 0) = 0 \qquad (0 < x \leqslant \sigma(t^*)),$$
$$z_x(0, t) = -B \qquad (0 < t \leqslant t^*),$$
$$z(\sigma(t^*), t) = 0 \qquad (0 < t \leqslant \sigma(t^*)).$$

为了证明 z 的存在,我们取

$$z(x, t) = \int_0^t \psi(\tau)\widetilde{G}(x, t; 0, \tau)d\tau,$$

其中 $\widetilde{G}$ 为半空间 $-\infty < x < \sigma(t^*)$的 Green 函数,而$\psi$由条件 $z_x(0, t) = -B$ 确定. 利用极值原理,我们发现 $z \geqslant 0$. 特别地 $z(\sigma(t), t) \geqslant 0$. 再利用极值原理,我们得到,在区域 $0 \leqslant x \leqslant \sigma(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t^*$ 上 $z - v \geqslant 0$. 剩下要估计 z.

对任何 $\varepsilon > 0$,我们考虑函数 $\bar{z}(x, t) = z(x, t) - (B + \varepsilon) \cdot (\sigma(t^*) - x)$. 对 $0<x < \sigma(t^*)$, $0<t < t^*$ 它满足热传导方程,且

$$\bar{z}(x, 0) \leqslant 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant \sigma(t^*)),$$
$$\bar{z}_x(0, t) = \varepsilon > 0 \qquad (0 < t < t^*),$$
$$\bar{z}(\sigma(t^*), t) = 0 \qquad (0 < t < t^*),$$

运用极值原理我们断定 $\bar{z} \leqslant 0$. 因此, $v(x, t) \leqslant z(x, t) \leqslant (B + \varepsilon) \cdot [\sigma(t^*) - x]$. 取 $t = t^*$, $\varepsilon \to 0$ 我们得到

$$v(x, t^*) \leqslant B(\sigma(t^*) - x).$$

注意到 t^* 是区间$(0, \lambda)$内任意的点,从而证明了(4.9)的第二个不等式.

我们还需要如下引理.

引理 4　如果 u 在区域 $0 < x < s(t)$, $0 < t \leqslant \lambda$ 内满足热传导方程,其中 $s(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \lambda)$ 为一连续的正函数, $s(0) = 0$, 且有 $u(s(t), t) \leqslant A(0 \leqslant t \leqslant \lambda)$, $u_x(0, t) \geqslant 0(0 <t \leqslant \lambda)$,则对

于 $0 \leqslant x \leqslant s(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \lambda$ 有 $u(x, t) \leqslant A$.

证明　对任意的 $\varepsilon > 0$, 函数 $w = u + \varepsilon x$ 满足热传导方程，且对 $0 \leqslant t \leqslant \lambda$ 有 $w(s(t), t) \leqslant A + \varepsilon A'(A' = \underset{0<t<\lambda}{\text{l.u.b.}} s(t))$. 因为 $w_x(0, t) > 0$, 所以 w 不可能在点 $(0, t)$ 处取其极大值. 因此，据极值原理，$w \leqslant A + \varepsilon A'(0 \leqslant x \leqslant s(t),\ 0 \leqslant t \leqslant \lambda)$. 令 $\varepsilon \to 0$ 即可.

推论　在引理 4 中，若 $|u(s(t), t)| \leqslant A$, $u_x(0, t) = 0$, 则 $|u(x, t)| \leqslant A$.

现在我们回来证明定理 5. 首先对所有的 $t > \lambda$ 时证明唯一性，其中 λ 充分小. 假设 u_1, s_1 和 u_2, s_2 为(4.1)—(4.4)的两个解，并置

$$y(t) = \min(s_1(t), s_2(t))$$
$$z(t) = \max(s_1(t), s_2(t)).$$

据 (4.5) 有

$$(4.10)\qquad s_1(t) - s_2(t) = -\int_0^{y(t)} [u_1(x, t) - u_2(x, t)]dx + (-1)^i \int_{y(t)}^{z(t)} u_i(x, t)dx$$

其中 u_i 为 $y(t)$ 和 $z(t)$ 之间的解.

据引理 3, 取 $\sigma(\tau) = y(\tau)$ 有

$$(4.11)\qquad |u_1(y(\tau), \tau) - u_2(y(\tau), \tau)| \leqslant B|s_1(\tau) - s_2(\tau)|.$$

因为在 $x = 0$ 上 $\partial(u_1 - u_2)/\partial x = 0$, 所以由引理 4 的推论给出

$$(4.12)\qquad |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant B \underset{0\leqslant\tau\leqslant t}{\text{l.u.b}} |s_1(\tau) - s_2(\tau)| \quad (0 \leqslant x \leqslant y(t)).$$

从引理 3 我们还得到

$$(4.13)\qquad |u_i(x, t)| \leqslant B(z(t) - x),$$

其中 u_i 为出现在(4.10)右边的解. 把(4.12), (4.13)代入(4.10)并对 $t(0 < t < T)$ 取上确界，我们得到

$$(4.14)\qquad S(T) \leqslant BY(T)S(T) + B(S(T))^2,$$

其中

$$S(T)=\underset{0<t<T}{\text{l.u.b.}}|s_1(t)-s_2(t)|,\quad Y(T)=\underset{0<t<T}{\text{l.u.b.}}y(t).$$

因为当 $T\to 0$ 时，$S(T)\to 0$，$Y(T)\to 0$，所以对充分小的 T，不等式(4.14)不能成立，除非 $S(T)=0$. 但另一方面，对所有的 $t<\lambda$（λ 充分小），$s_1(t)=s_2(t)$，因此当 $t<\lambda$ 时也有

$$u_1(x,t)=u_2(x,t).$$

对 $0\leqslant t\leqslant\lambda$ 时证明了唯一性之后，我们就可以在 t 区间上用类似的方法逐步地证明唯一性. 因为 $S(\lambda)>0$，所以从第 3 节定理 2，也可推出对 $\lambda\leqslant t<\infty$ 时的唯一性.

5. 其他自由边界问题

若以

$$u_x(s(t),t)=-s(t)\frac{ds(t)}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{d(s(t))^2}{dt}\qquad(t>0)\tag{5.1}$$

代替(1.5)，则第 1 节定理 1 仍为真.

考虑如下的三维 Stefan 问题：

(5.2)

$$\begin{aligned}
&\Delta c(x,t)=c_t(x,t) && (a<x<s(t),\ t>0,\ a>0),\\
&c(a,t)=\bar{f}(t) && (\bar{f}(t)\geqslant 0\ \text{且}\ t\geqslant 0),\\
&c(x,0)=\bar{\varphi}(x) && (\bar{\varphi}(x)\geqslant 0,\ a<x\leqslant b,\ \text{且}\\
& && \qquad\bar{\varphi}(b)=0,\ b>a),\\
&c(s(t),t)=0 && (t\geqslant 0,\ \text{且}\ s(0)=b),\\
&c_x(s(t),t)=-\frac{ds(t)}{dt}\ (t>0), &&
\end{aligned}$$

其中 x 是三维欧几里得距离，而 Δ 为三个变数的 Laplace 算子的径向部分，即 $\Delta=\partial^2/\partial x^2+2x^{-1}\partial/\partial x$.

作代换 $u(x,t)=xc(x,t)$，可以推知，$u(x,t)$，$s(t)$ 满足以 $x=a$ 代替 $x=0$，而 $f(t)=a\bar{f}(t)$，$\varphi(x)=x\bar{\varphi}(x)$ 的问题(1.1)—(1.4)和补充方程(5.1). 由本节开头的一段可知，对所有 $t<\infty$，问题(5.2)的唯一解 $c(x,t)$，$s(t)$ 存在，并且 $s(t)$ 为 t 的非减函数.

其次，我们考虑如下问题．设有一孤立的三维滴状物，其四周围着同一物质的绝对过饱和或绝对次饱和蒸汽．在前一种情况下滴状物将在冷凝过程中增大，而在第二种情况下滴状物由于蒸发而减小．假定在两种情形下滴状物仍旧是球状的，在围绕原滴状物的蒸汽中并不产生新的滴状物．还假定饱和密度 g 在任何瞬时都与滴状物的半径无关．以 $c_0(x)$ 记蒸汽的密度，x 为离开滴状物中心的距离．假定 $\lim_{x\to\infty} c_0(x)$ 存在且不等于 g，我们就可把对任何 $t>0$ 时求蒸汽密度 $c(x, t)$ 和滴状物的半径 $x=s(t)$ 的问题(经某种变换后)化为如下问题：

$$
(5.3)\quad
\begin{aligned}
&u_{xx}=u_t && (s(t)<x<\infty,\ t>0),\\
&u(x,0)=\varphi(x) && (b<x<\infty),\\
&u(s(t),t)=s(t) && (t>0,\ s(0)=b>0),\\
&\alpha u_x(s(t),t)=s(t)\frac{ds(t)}{dt}+\alpha && (t>0).
\end{aligned}
$$

α 是个小的参数，在冷凝情况下 $\alpha<0$，而在蒸发情况下 $\alpha>0$．容易证明，当 $\alpha<0(\alpha>0)$ 时，$s(t)$ 随 t 增加(减小)．

我们假定

$$\operatorname*{l.u.b.}_{b<x<\infty}|\varphi(x)|<\infty，\text{当 } x\to\infty \text{ 时 } \varphi'(x)\to 0,$$

$$\int_0^\infty |\varphi(x)|dx<\infty,\ \varphi(b)=0,$$

并要求

(5.4) u, u_x 当 $x\to\infty$ 时，对有界集中的 t 保持一致有界．

如果 $|\alpha|$ 充分小，例如当 $|\alpha|\text{l.u.b.}|\varphi|<b/20$ 时(在物理学的应用中，实际上 $|\alpha|$ 很小)，我们可以证明如下结果：

(1) 如果 $\alpha<0$，则对所有的 $t<\infty$，问题 (5.3)，(5.4) 存在唯一解．

(2) 若 $\alpha>0$，则对所有的 $t<t_0$，(5.3)，(5.4) 存在唯一解，且当 $t\to t_0$ 时 $(t_0<\infty)$，$s(t)\to 0$．

(3) 若 $\alpha<0$，则

$$(5.5)\qquad \limsup_{t\to\infty}\left|\frac{s^2(t)}{2|\alpha|t}-1\right|=o(1),$$

$$(5.6)\qquad \limsup_{t\to\infty}\left|\frac{s(t)\dot{s}(t)}{|\alpha|}-1\right|=o(1)\qquad(\dot{s}=ds/dt),$$

其中当 $\alpha\to 0$ 时，$o(1)\to 0$.

(4) 为清楚起见，以 $u(x, t; \alpha)$, $s(t, \alpha)$ 记 (5.3), (5.4)的解，则当 t 限于任何有界集 $0\leqslant t\leqslant t^*$ 时，函数 $s(t;\alpha)$, $ds(t;\alpha)/dt$ 在（平衡）点 $\alpha=0$ 的邻域中是 α 的实解析函数. 函数 $U(x, t; \alpha)=u(x+s(t;\alpha), t; \alpha)$ 当 $0\leqslant x<\infty$, $0\leqslant t\leqslant t^*$ 时，在 $\alpha=0$ 的邻域中也是 α 的解析函数.

通过对于用第 1 节的方法把问题(5.3),(5.4)所归结成的积分方程的详细研究，以及运用基于极值原理的比较论证法，上述一切结果都可以推导出来. 其细节十分冗长，这里就不给出了.

最后，我们指出，用(5.5)和(5.6)可以推导出解 u 的渐近公式（比较第 3 节定理 4 后面的附注）. 于是得到，如果 α 小而 t 大，则解近似地仅为 $x/t^{1/2}$ 和 α 的函数. 作为一个直接推论，我们推出：对于充分大的时间，过饱和蒸汽在任意点 P 的密度是滴状物的半径和从滴状物的中心到 P 的距离之比的线性函数.

问　　题

问题 1—7 的目的是对 Stefan 问题(4.1)—(4.4)(注意，$s(0)=b=0$)建立解的存在定理. 鉴于定理 2，只要对某个 $\sigma>0$，对所有的 $t<\sigma$ 证明解的存在性就够了. 我们可以假定，在任意区间 $0<t<\sigma$ 内，$f(x)\neq 0$. 对于任何 $0<b<1$，考虑问题 (1.1),(2.14),(1.3),(1.4),(1.5)，其中 $\varphi(x)\equiv 0$；以 π_b 记这一问题，而以 u^b, s^b 记这个问题的(唯一)解. $v^b(t)=u^b_x(s^b(t), t)$ 满足积分方程.

$$(\bigstar)\qquad v^b(t)=-2\int_0^t f(\tau)N_x(s^b(t), t; 0, \tau)d\tau + 2\int_0^t v^b(\tau)N_x(s^b(t), t; s^b(\tau), \tau)d\tau.$$

1. 试证明：对于每一 $\sigma>0$，存在一个与 b 无关的正的常数，使得
$$-M\leqslant v^b(t)\leqslant 0\quad(0\leqslant t\leqslant\sigma).$$

[提示：当 $x \geqslant 0$ 时，$\int_0^t x(t-\tau)^{-1}K(x,t;0,\tau)d\tau \leqslant 1$，当 $v^b \leqslant 0$ 时(★)中第二个积分非负]

2．试证明函数族 $\{s^b(t)\}$ 同等连续且一致有界.

3．试证明函数族 $\{u^b(x,t)\}$（每个函数在各自的定义域 $0 \leqslant x \leqslant s^b(t)$，$0 \leqslant t \leqslant \sigma$ 上)同等连续且一致有界.

4．取序列 $\{b_n\}$ $(b_n \to 0)$ 使得一致地有 $u^{b_n} \to u$，$s^{b_n} \to s$，于是我们得到连续函数 $u(x,t)$，$s(t)$，而且 $u(s(t),t)=0$，$s(t)$ 是非减的．试证明当 $0<t\leqslant\sigma$ 时，$s(t)>0$.

[提示：对 u^b 积分(1.1)，并证明当 $s(t)\equiv 0$ 时，有 $\int_0^t f(\tau)d\tau \equiv 0$]

5．利用熟知的定理可以断言，从有界函数族 $\{w^b\}$ $(0<b<1)$ 的每一子集中，可以选出一个序列 $\{w^{d_n}\}$，使得对任何 (Lebesgue) 可积的有界函数 ψ，当 $b=d_n\to 0$ 时，有

$$(★★)\qquad \int_0^\sigma w^b(t)\psi(t)dt \to \int_0^\sigma w(t)\psi(t)dt,$$

其中 $w(t)$ 为某个可积函数．因此，对于任何 $\varepsilon>0$ 和 $\{b_n\}$ 的某个子序列中的 b，有

$$\int_0^{t-\varepsilon} v^b(\tau)N_x(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau \to \int_0^{t-\varepsilon} v(\tau)N_x(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau.$$

再证明有

$$\int_0^{t-\varepsilon} v^b(\tau)N_x(s^b(t),t;s^b(\tau),\tau)d\tau \to \int_0^{t-\varepsilon} v(\tau)N_x(s(t),t;s(\tau),\tau)d\tau;$$

$s(t)$ 和 $\{b_n\}$ 在问题 4 中已定义.

6．试证明：对任何 $0<\delta<\varepsilon$，有

$$\int_{t-\varepsilon}^t |v^b(\tau)N_x(s^b(t),t;s^b(\tau),\tau)|d\tau \leqslant M^2\varepsilon^{1/2} + A_0 M\int_{\gamma(b)}^\infty y^{-1/2}e^{-y}dy,$$

$$\int_{t-\varepsilon}^{t-\delta} |v(\tau)N_x(s(\tau),t;s(\tau),\tau)|d\tau \leqslant M^2\varepsilon^{1/2} + A_0 M\int_{\gamma}^\infty y^{-1/2}e^{-y}dy,$$

其中 $\gamma(b)=(s^b(t))^2/4\varepsilon$，$\gamma=(s(t))^2/4\varepsilon$，$A_0$ 为常数，$s(t)$ 如同问题 4 中所述，而 M 为问题 1 中的常数.

[提示：为了证明第二个不等式，利用 $\psi\equiv[\mathrm{sgn}(vN_x)]\cdot N_x$ 的 (★★)和第一个不等式.]

7．取 $b=b_{n'}\to 0$，其中 $\{b_{n'}\}$ 为问题 4 中所定义的序列 $\{b_n\}$ 的适当子序列，试证明(★)右边趋于同一个式子．这里 $b=0$，$v^0=v$，而

$$s^0(t) = s(t) = -\int_0^t v(\tau)d\tau.$$

于是推知 $\{v^{bn'}(t)\}$ 逐点收敛于某个函数 $v_0(t)$. 利用 Lebesgue 收敛定理，检验几乎处处有 $v(t) = v_0(t)$. 试证明(问题 4 中所定义的) $u(x, t)$, $s(t)$ 构成(4.1)—(4.4) 的解。

第 九 章

抛物型方程组的基本解

引言 这一章里在对系数作很弱的假定下我们构造任意阶(复值系数的)抛物型方程组的(复值)基本解. 粗略地说,我们仅假定关于(x, t)的一致连续性,关于x的一致 Hölder 连续性和有界性. 然后,象第一章那样,把基本解用于构造 Cauchy 问题的解,并证明解的唯一性. 另外,在本章里我们还要证明,基本解(大体上)和系数一样光滑. 于是,特别地,如果系数无穷可微,那么基本解也无穷可微.

读者要注意,本章所用的拟基本解不同于第一章所用的拟基本解,这里拟基本解是对系数依赖于t的方程来构造的.(见第一章末的附注).本章的分析比第一章更巧妙. 我们假定读者熟悉第一章的内容,因此,有时我们将省略那些类似于第一章的计算细节.

1. 定义

考虑 $M \times M$ 方程组

$$(1.1)\qquad \frac{\partial^{n_i} w_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{M} \sum_{2bk_0+|k|\leqslant 2bn_j} A_{k_0 k}^{ij}(x, t) D_t^{k_0} D_x^k w_j + g_i(x, t)$$

$$(i = 1, \cdots, M),$$

其中$n_1, \cdots, n_M$为正整数,$k = (k_1 \cdots, k_n)$, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$, $D_x^k = D_{x_1}^{k_1} \cdots D_{x_n}^{k_n}$, $D_{x_i} = \partial/\partial x_i$, $D_t = \partial/\partial t$. $g_i(x, t)$ 和系数 $A_{k_0 k}^{ij}(x, t)$ 都定义在点 (x, t) 的某个集合Ω内.

算子

$$(1.2)\qquad L_i^0 w = \sum_{j=1}^{M} \sum_{2bk_0+|k|=2bn_j} A_{k_0 k}^{ij}(x, t) D_t^{k_0} D_x^k w_j$$

称为 (1.1) 右边双重和所定义的算子 $L_i w$ 的主部(或首部). $L_i^0 w$ 的系数称为主系数(或首系数).

考虑行列式

$$(1.3)\qquad \det\left(\sum_{2bk_0+|k|=2b_n h} A_{k_0 k}^{jh}(x,t)\lambda^{k_0}(i\xi)^k - \delta_{jh}\lambda^{n_h}\right),$$

其中 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 为模 $|\xi|=\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\right)^{1/2}$ 等于 1 的实矢量, $\xi^k=\xi_1^{k_1}\cdots\xi_n^{k_n}$, δ_{jh} 是 Kronecker 记号,即当 $j\neq h$ 时 $\delta_{jh}=0$, 而当 $j=h$ 时 $\delta_{jh}=1$. $i=\sqrt{-1}$. 我们以 $\lambda_m(\xi;x,t)$ $(m=1,\cdots,n_1+\cdots+n_M)$ 记多项式 (1.3) 的根 λ. 如果在点 (x^0,t^0)上,

$$\max_j \operatorname*{l.u.b.}_{|\xi|=1} \mathrm{Re}\{\lambda_j(\xi;x^0,t^0)\}<0,$$

我们就说方程组(1.1)在点 (x^0,t^0) 处 (在 Petrowski 意义下) 是抛物型的, 或者说 (1.1) (在 Petrowski 意义下) 是一抛物组.

如果在 Ω 的每一点处, (1.1)是抛物的, 我们就简单地说(1.1)在 Ω 内是抛物的. $2b$ 称为方程组的抛物权数 (parabolic weight), 而 $2b\max_j n_j$ 称为方程组的阶.

如果存在常数 $\delta>0$, 使对所有的 $(x,t)\in\Omega$, 有

$$(1.4)\qquad \max_j \operatorname*{l.u.b.}_{|\xi|=1} \mathrm{Re}\{\lambda_j(\xi;x,t)\}<-\delta,$$

我们就说组(1.1)在 Ω 内是一致抛物的 (若主系数有界, 则现在的定义包含第一章第 1 节给出的二阶方程一致抛物性的定义). δ 称为抛物性的模 (module of parabolicity).

引进新的相依函数

$$(1.5)\qquad v_{j1}=w_j,\ v_{j2}=\frac{\partial w_j}{\partial t},\cdots v_{j,n_j-1}=\frac{\partial^{n_j-1}w_j}{\partial t^{n_j-1}}$$

$$(j=1,\cdots,M)$$

可把组(1.1)化为如下形式的方程组:

$$(1.6)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|\leq 2p} A_k^{ij}(x,t)D_x^k u_j+f_i(x,t)$$

$$(i=1,\cdots,N).$$

然而，多项式

(1.7) $$\det\left(\sum_{|k|=2p} A_k^{jh}(x,t)(i\xi)^k-\delta_{jh}\lambda\right)$$

的根一般说来不同于多项式 (1.3) 的根．于是，即使 (1.1) 是抛物的，(1.6) 也可以不是抛物的 (见问题 1，2)．

本书主要考虑形如 (1.6) 的抛物组．$2p$ 称为组的阶．我们仅考虑偶数阶抛物组，因为当 $2p$ 为奇数时，$\lambda_i(-\xi;x,t)=-\lambda_i(\xi;x,t)$，因此，方程组不可能是抛物型的．

方程组(1.1)的 Cauchy 问题是在带形区域 $R^n\times(0,T]$ 内求满足初始条件

(1.8) $$\frac{\partial^h w_i(x,0)}{\partial t^h}=\varphi_{ih}(x)$$

$$(h=0,1,\cdots,n_i-1;\ i=1,\cdots,M)$$

的 (1.1) 的解，其中 $\varphi_{ih}(x)$ 为 R^n 中的已知函数．对 (1.6)，初始条件为

(1.9) $$u_i(x,0)=\varphi_i(x)\qquad(i=1,\cdots,N).$$

在下面几节里我们将构造出组 (1.6) 的基本解，然后求解 Cauchy 问题 (1.6)，(1.9)． 所有的考虑在作某些修改后均可推广到更一般的组 (1.1)，但这里不做详细叙述．

在下文和第 2—4 节中，我们假定抛物组 (1.6) 是定义在集合 Ω 上的，而 Ω 是柱体

$$\bar{D}\times[0,T]=\{(x,t);\ x\in\bar{D},\ 0\leqslant t\leqslant T\},$$

其中 D 为 R^n 中的任意区域．

所谓(1.6)的基本解(或者基本矩阵) $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 是指对于 $(x,t)\in\Omega$，$(\xi,\tau)\in\Omega$，$t>\tau$ 定义的 $N\times N$ 函数矩阵，它作为 (x,t) $(x\in D,\ \tau<t\leqslant T)$ 的函数，满足 $f_i=0$ 的 (1.6) (即每列是 $f_i=0$ 的(1.6)的解)，且对 $\bar{D}$ 上任何连续函数 $f(\xi)$，和所有的 $x\in D$ 有

(1.10) $$\lim_{t\searrow\tau}\int_D \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi)d\xi=f(x).$$

如果D为无界，就进一步假定f满足如下有界性条件：对某个正的常数k，

(1.11) $$f(x)=0\{\exp[k|x|^q]\}\qquad\left(q=\frac{2p}{2p-1}\right).$$

（仅当$t-\tau$充分小时要求(1.10)中的积分存在.）

Γ的构造基于拟基本解方法. 下面两节将构造拟基本解并研究其若干性质.

2. 拟基本解

在这一节里,我们对系数仅依赖于t的抛物方程组

(2.1) $$\frac{\partial u_h}{\partial t}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|\leqslant 2p}A_k^{hj}(t)D_x^k u_j\qquad(h=1,\cdots,N)$$

构造基本解$Z(x,t;\xi,\tau)$. 在第3节将把这一基本解用于构造组(1.6)的拟基本解. 在整个这一节里我们假定(2.1)的系数$A_k^{hj}(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$是连续函数.

我们把下列线性常微分方程组和(2.1)联系起来：

(2.2) $$\frac{dv_h}{dt}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|\leqslant 2p}A_k^{hj}(t)(i\zeta)^k v_j\qquad(h=1,\cdots,N).$$

设$V(t;\zeta,\tau)=(V^{hj}(t;\zeta,\tau))$为(2.2)的矩阵解,它满足如下初始条件:

(2.3) $$V(t;\zeta,\tau)|_{t=\tau}=I\qquad(I\text{ 为单位矩阵}).$$

$V(t;\zeta,\tau)$称为组(2.2)的 Green 矩阵.

注意，从(2.1)对x作 Fourier 变换，在形式上我们就得到组(2.2). 再注意，(2.1)的基本解$Z(x,t;\xi,\tau)$仅作为$x-\xi$的函数而依赖于x,ξ. 因此,基本解的性质(1.10)变为

$$\lim_{t\searrow\tau}Z(x,t;\xi,\tau)*f(\xi)=f(x),$$

其中“*”是指卷积. 于是,$\lim\limits_{t\searrow\tau}Z$ 象 Dirac 测度那样作用于f. 因此,当$t\searrow\tau$时,Z的 Fourier 变换就趋于1.

可见在形式上,Z的 Fourier 变换应与 Green 矩阵V相同,这就产生构造Z的草案如下:

先推出$V(t;\zeta,\tau)$的适当估计,然后证明函数

$$(2.4)\qquad Z^{jh}(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{i\alpha\cdot(x-\xi)} V^{jh}(t; \alpha, \tau)d\alpha$$

$(\alpha \cdot x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)$ 是基本矩阵 Z 的元素.

遵循这一草案我们证明如下定理.

定理 1 设(2.1)为抛物组,它的系数在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上连续. 则在带形区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上 (2.1) 的基本解

$$Z(x, t; \xi, \tau) = Z(x - \xi; t, \tau)$$

存在,其元素由(2.4)给出,且对 $0 \leqslant |m| < \infty$ 如下不等式成立:

$$(2.5)\qquad |D_x^m Z^{jh}(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{C_m}{(t-\tau)^{(n+|m|)/2p}} \cdot \exp\left\{-c_m\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

其中 C_m, c_m 为正的常数,它们仅依赖于 m、(2.1)系数的界、主系数的连续性模以及抛物性的模 δ .

我们从一条初等引理入手.

引理 1 设 $f(z)$ 为 n 维复空间 C^n 中的连续实值函数, 假定对任何 $\lambda \geqslant 0$, $z \in C^n$ 有 $f(\lambda z) = \lambda^{2p} f(z)$, 且对所有的 $x \in R^n$

$$(2.6)\qquad f(x) \leqslant -\delta|x|^{2p},$$

其中 δ 为某个正的常数, 则存在常数 A 使对所有 $x \in R^n$, $y \in R^n$ 有

$$(2.7)\qquad f(x+iy) \leqslant -\frac{\delta}{2}|x|^{2p} + A|y|^{2p}.$$

证明 以 s 记 R^n 的单位超球面. 因为在 s 上 $f(x) < -\delta$,所以对每个 $x \in s$, 在 C^n 中存在 x 的邻域,使在此邻域内 $f < -\delta/2$. 用有限个这样的邻域覆盖 s, 我们就得出对某个 $\varepsilon_0 > 0$, 对于 $|x+iy| = 1$, 当 $|y| < \varepsilon_0$ 时有

$$f(x+iy) < -\frac{\delta}{2}.$$

因此,若 $x \in R^n$, $y \in R^n$,且 $|y| < \varepsilon_0|x+iy|$,则

$$(2.8)\quad f(x+iy)=f\left(\frac{x+iy}{|x+iy|}\right)|x+iy|^{2p}<-\frac{\delta}{2}|x+iy|^{2p}.$$

函数 $f(x+ie)+\frac{1}{2}\delta|x+ie|^{2p}$, 作为 x 的一个函数,是(与 e 无关地)上有界的, 其中 $e\in R^n$, $|e|=1$. 事实上,若 $|x|\sigma_0>1$,则(据(2.8))它为负,而当 $|x|\sigma_0\leqslant 1$ 时,由于它是 x, e 的连续函数,则它不超过与 e 无关的一个常数. 以 A 记它的与 e 无关的上确界,就有

$$f(x+iy)+\frac{\delta}{2}|x+iy|^{2p}$$

$$=|y|^{2p}\left[f(x'+ie)+\frac{\delta}{2}|x'+ie|^{2p}\right]\leqslant A|y|^{2p}\qquad(y\neq 0),$$

其中 $x'=x/|y|$, (2.7) 由此得证.

我们需要的下一个事实与借助于 $P(s)$ 的特征值 $\lambda_j(s)$ 来估计 $\exp[tP(s)]$ 有关, 其中 $P(s)$ 为 $N\times N$ 的矩阵, 其元素为 $s=(s_1,\cdots,s_n)$ $(s\in C^n)$ 的多项式. 以 $|B|$ 记矩阵 B 的所有元素的绝对值之和. 我们有

$$(2.9)\quad |\exp[tp(s)]|\leqslant B_0(1+t^{1/2p}+t^{1/2p}|s|)^{2p(N-1)}\cdot\exp\{t\max_j \mathrm{Re}[\lambda_j(s)]\},$$

其中 B_0 为一常数, 它仅依赖于 $P(s)$ 的元素所组成的多项式系数的界. 其证明,见 [44; 168—171].

令

$$P(t,\zeta)=P_0(t,\zeta)+P_1(t,\zeta),$$

其中

$$P_0(t,\zeta)=\left(\sum_{|k|=2p}A_k^{hj}(t)(i\zeta)^k\right),$$

$$P_1(t,\zeta)=\left(\sum_{0\leqslant|k|<2p}A_k^{hj}(t)(i\zeta)^k\right).$$

应用引理 1 于矩阵 $P_0(\tau,\zeta)$ 的各个特征值 $\lambda_{0j}(\tau,\zeta)$ 的实部, 我们就得到 $\max_j \mathrm{Re}[\lambda_{0j}(\tau,\zeta)]$的一个界. 把这个界代入 (以 $(t-$

$\tau)\cdot P_0(\tau,\zeta)$ 代替 $tP(s)$ 的) (2.9),并利用不等式

$$t^{N-1}e^{-\varepsilon t}\leqslant \text{const.}\ (\varepsilon=\delta/4,\ 0\leqslant t<\infty)$$

我们得到

$$|\exp(t-\tau)P_0(\tau,\zeta)|\leqslant B_1\exp[(t-\tau)Q(\xi,\eta)],\quad (0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T,\ \zeta=\xi+i\eta). \tag{2.10}$$

其中

$$Q(\xi,\eta)=-\frac{\delta}{4}|\xi|^{2p}+A|\eta|^{2p}, \tag{2.11}$$

而 B_1, A 是与 t, τ, ζ 无关的常数.

把组 (2.2), (2.3) 写成如下形式

$$\frac{dV}{dt}=P_0(t^*,\zeta)V+g(t,\zeta),\qquad V|_{t=\tau}=I, \tag{2.12}$$

其中

$$g(t,\zeta)=\{[P_0(t,\zeta)-P_0(t^*,\zeta)]+P_1(t,\zeta)\}V(t;\zeta,\tau). \tag{2.13}$$

于是(2.12)的解可写成如下形式

$$V(t;\zeta,\tau)=\exp[(t-\tau)P_0(t^*,\zeta)]+\int_\tau^t\exp[(t-\sigma)P_0(t^*,\zeta)]g(\sigma,\zeta)d\sigma. \tag{2.14}$$

利用(2.10)得到

$$|V(t;\zeta,\tau)|\leqslant B_1\exp[(t-\tau)Q(\xi,\eta)]+B_1\int_\tau^t\exp[(t-\sigma)Q(\xi,\eta)]|g(\sigma,\zeta)|d\sigma. \tag{2.15}$$

选取 $t^*=\tau$ 并取 $\tau<t\leqslant\tau+\varepsilon$, 从 (2.13) 我们得到

$$|g(t,\zeta)|\leqslant[\omega(\varepsilon)|\zeta|^{2p}+B_2|\zeta|^{2p-1}]|V(t;\zeta,\tau)|, \tag{2.16}$$

其中当 $\varepsilon\searrow 0$ 时 $\omega(\varepsilon)\searrow 0$,而 B_2 是与 t,τ,ζ,ε 无关的常数. 当 $|\zeta|\geqslant B_2/\omega(\varepsilon)$ 时利用不等式

$$B_2|\zeta|^{2p-1}\leqslant\omega(\varepsilon)|\zeta|^{2p},$$

我们可以化简(2.16)的右端,并把它代入(2.15),就立即得到

$$|V(t;\zeta,\tau)|\leqslant B_1\exp[(t-\tau)Q(\xi,\eta)] \tag{2.17}$$

$$+ 2B_1\omega(\varepsilon)|\zeta|^{2p}\int_\tau^t \exp[(t-\sigma)Q(\xi,\eta)]|V(\sigma;\zeta,\tau)|d\sigma.$$

以后需要如下引理（其证明，见问题 3）.

引理 2　设 $\varphi, \psi, \chi(\tau \leqslant t \leqslant T)$ 为实值连续函数，$\chi(t) \geqslant 0\ (\tau \leqslant t \leqslant T)$. 如果

$$\varphi(t) \leqslant \psi(t) + \int_\tau^t \chi(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma \qquad (\tau \leqslant t \leqslant T),$$

则

$$\varphi(t) \leqslant \psi(t) + \int_\tau^t \chi(\sigma)\psi(\sigma)\exp\left[\int_\sigma^t \chi(\rho)\,d\rho\right]d\sigma$$
$$(\tau \leqslant t \leqslant T).$$

取 $\varphi(t) = |V(t;\zeta,\tau)|\exp[-(t-\tau)Q(\xi,\eta)]$, $\psi(t) = B_1$, $\chi(t) = 2B_1\omega(\varepsilon)|\zeta|^{2p}$, 并注意到当 ε（与 t,σ,ζ 无关地）充分小时有

$$(2.18)\qquad \int_\sigma^t \chi(\rho)d\rho = 2B_1\omega(\varepsilon)(t-\sigma)|\zeta|^{2p}$$
$$\leqslant (t-\sigma)\left(\frac{\delta}{8}|\xi|^{2p} + |\eta|^{2p}\right) \qquad (\zeta = \xi + i\eta),$$

我们从(2.17)就得到

$$|V(t;\zeta,\tau)|\exp[-(t-\tau)Q(\xi,\eta)] \leqslant B_1$$
$$+ 2B_1^2\omega(\varepsilon)|\zeta|^{2p}\int_\tau^t \exp\left[(t-\sigma)\left(\frac{\delta}{8}|\xi|^{2p} + |\eta|^{2p}\right)\right]d\sigma.$$

因此，

$$|V(t;\zeta,\tau) \leqslant B_3\exp[(t-\tau)Q(\xi,\eta)]$$
$$\cdot\left\{1 + (t-\tau)|\zeta|^{2p}\exp\left[(t-\tau)\left(\frac{\delta}{8}|\xi|^{2p} + |\eta|^{2p}\right)\right]\right\}.$$

由此推出

$$(2.19)\qquad |V(t;\xi+i\eta,\tau)| \leqslant B_4\exp\{(t-\tau)[-\delta_0|\xi|^{2p}$$
$$+ A_0|\eta|^{2p}]\},$$

其中 $B_4 A_0, \delta_0$ 为与 t,τ,ξ,η 无关的正的常数. 当 $|\zeta| \geqslant B_2/\omega(\varepsilon)$ 时我们证明了(2.19)，其中 ε 是使(2.18)成立的固定的数. 如

果$|\zeta| < B_2/\omega(\varepsilon)$，则对某个适当的常数 B_4，(2.19)显然成立．

在区间 $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \varepsilon$ 上估计了 $V(t; \zeta, \tau)$ 之后，利用恒等式（见问题 4）

$$V(t; \zeta, \tau) = V(t; \zeta, \tau + \varepsilon)V(\tau + \varepsilon; \zeta, \tau) \tag{2.20}$$

我们就可以在区间 $\tau + \varepsilon \leqslant t \leqslant \tau + 2\varepsilon$ 上估计它．

于是，

$$|V(t; \zeta, \tau)| \leqslant |V(t; \zeta, \tau + \varepsilon)||V(\tau + \varepsilon; \zeta, \tau)|,$$

右边各因子都可利用有适当 t, τ 的不等式(2.19)来估计．类似地逐步进行下去，于是，对于所有 $\tau \leqslant t \leqslant T$ 我们就推导出不等式(2.19)．

还应指出，如果我们从等式

$$V(t; \zeta, \tau) = I + \int_\tau^t P(\sigma, \zeta)V(\sigma; \zeta, \tau)d\sigma$$

开始，对它取绝对值，就得到

$$|V(t; \zeta, \tau)| \leqslant N + \int_\tau^t |P(\sigma, \zeta)||V(\sigma; \zeta, \tau)|d\sigma,$$

再利用不等式$|P(\sigma, \zeta)| \leqslant \text{const.}(1 + |\zeta|^{2p})$和引理 2，即得不等式

$$|V(t; \zeta, \tau)| \leqslant \text{const.}\exp[\text{const.}(t - \tau)|\zeta|^{2p}] \tag{2.21}$$

其中常数为正．(2.21)是比(2.19)弱的不等式．

现在我们用(2.19)来估计(2.4)中所定义的函数 Z^{jh}． 因为(2.2)的系数是 $\zeta(\zeta \in C^n)$ 的整函数，所以由常微分方程的一般定理得出，$V^{jh}(t; \zeta, \tau)$ 也是 ζ 的整函数．利用 Cauchy 定理和(2.19)我们发现，函数

$$Z^{jh}(x, t; \xi, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{i(\alpha+i\beta)\cdot(x-\xi)}V^{jh}(t; \alpha + i\beta, \tau)d\alpha$$

$$(t > \tau)$$

与 β 无关，因此它与(2.4)所定义的函数相同．

再次利用(2.19)我们得到

$$|Z^{jh}(x, t; \xi, \tau)| \leqslant B_5 e^{-\beta\cdot(x-\xi)}\exp[A_0(t - \tau)|\beta|^{2p}] \tag{2.22}$$

$$\times\int_{R^n}\exp[-\delta_0(t-\tau)|\alpha|^{2p}]d\alpha.$$

我们需要如下事实（见问题 5）：对任何 $k>0$，存在 $\mu>0$，使得

(2.23) $$\mu k=\frac{\mu^{2p}}{2p}+\frac{k^q}{q}\qquad\left(q=\frac{2p}{2p-1}\right).$$

取 $\beta_k=|\beta_k|\operatorname{sgn}(x_k-\xi_k)$，$|\beta_1|=\cdots=|\beta_n|$，

(2.24) $$k=\frac{|x-\xi|}{n[2p\,A_0(t-\tau)]^{1/2p}},$$

然后选取$|\beta|$使得对于 $\mu=[2p\,A_0(t-\tau)]^{1/2p}|\beta|$ 有 (2.23) 成立，我们就得到，对某个常数 $A_1>0$，有

$$\begin{aligned}&-\beta\cdot(x-\xi)+(t-\tau)A_0|\beta|^{2p}\\ &\leqslant-\beta\frac{|x-\xi|}{n}+(t-\tau)A_0|\beta|^{2p}\\ &=-A_1\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}.\end{aligned}$$

把它代到 (2.22) 我们得到

(2.25) $$|Z^{ih}(x,t;\xi,\tau)|\leqslant B_5\exp\left\{-A_1\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}$$
$$\times\int_{R^n}\exp[-\delta_0(t-\tau)|\alpha|^{2p}]d\alpha.$$

取极坐标，然后作代换 $\rho=|\alpha|(t-\tau)^{1/2p}$，我们得到(2.25)右边的积分不超过下式的常数倍：

$$(t-\tau)^{-n/2p}\int_0^\infty\rho^{n-1}\exp[-\delta_0\rho^{2p}]d\rho\leqslant\text{const.}(t-\tau)^{-n/2p}.$$

把它代入 (2.25)，对 $m=0$ 我们得到 (2.5)。

为了对 $|m|>0$ 证明(2.5)，我们从下面的等式开始

$$D_x^mZ^{ih}(x,t;\xi,\tau)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}i(\alpha+i\beta)^me^{i(\alpha+i\beta)\cdot(x-\xi)}$$
$$\times V^{ih}(t;\alpha+i\beta,\tau)d\alpha.$$

从而

$$(2.26)\quad |D_x^m Z^{jh}(x,t;\xi,\tau)| \leqslant B_6|\beta|^{|m|}e^{-\beta\cdot(x-\xi)}\exp[A_0(t-\tau)|\beta|^{2p}]\cdot\int_{R^n}\exp[-\delta_0(t-\tau)|\alpha|^{2p}]d\alpha$$
$$+B_6 e^{-\beta\cdot(x-\xi)}\exp[A_0(t-\tau)|\beta|^{2p}]\times\int_{R^n}|\alpha|^{|m|}\exp[-\delta_0(t-\tau)|\alpha|^{2p}]d\alpha$$
$$=I+J.$$

我们象 $m=0$ 的情形那样估计 J,并注意到

$$\int_{R^n}|\alpha|^{|m|}\exp[-\delta_0(t-\tau)|\alpha|^{2p}]d\alpha$$
$$\leqslant \text{const.}(t-\tau)^{-(n+|m|)/2p}\int_0^\infty \rho^{n+|m|-1}\exp[-\delta_0\rho^{2p}]d\rho$$
$$\leqslant \text{const.}(t-\tau)^{-(n+|m|)/2p}.$$

因此 J 不超过 (2.5) 的右边.

至于 I,我们还如前进行,但要注意到 (见问题 5) 对于给定的 k, 使 (2.23) 成立的 μ 应为 $\mu=k^{q-1}$. 因为已选取 $|\beta|$ 使

$$\mu=[2p\,A_0(t-\tau)]^{1/2p}|\beta|,$$

又因 $q-1=1/(2p-1)$, 所以我们得到

$$(2.27)\qquad |\beta|=A_2\left(\frac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{1/2p}}\right)^{1/(2p-1)}(t-\tau)^{-1/2p}$$

(A_2 为正的常数).

在 I 中以 (2.27) 右边的 $|m|$ 次幂代替因子 $|\beta|^{|m|}$, 并象在 $m=0$ 的情形那样估计 I 的其余因子, 利用对任何固定的 $\varepsilon>0$ 和 $0\leqslant t<\infty$ 的不等式 $t^{1/2p}e^{-\varepsilon t}\leqslant$ const.,我们立即得到 I 也不超过(2.5)的右边. 由于(2.26), 因此对任何 m, (2.5) 证明完毕. 从前面的证明可推出有关常数 C_m, c_m 的论断.

因为当 $|\xi|\to\infty$ 时, $V^{jh}(x,\xi+i\eta,\tau)$ 关于 ξ 指数地递减, 所以 Fourier 变换的一般规则是有效的. 于是,取 (2.2) 的 Fourier 逆变换并利用 (2.4),我们就断定, $Z(x,t;\xi,\tau)$ 作为 (x,t) 的函数,满足 (2.1).

为完成定理 1 的证明, 还要证明: 如 $f(x)$ 为 R^n 中任何满足

(1.11)的连续函数，则

$$\lim_{t\searrow\tau}\int_{R^n} Z(x-\xi;t,\tau)f(\xi)d\xi=f(x). \tag{2.28}$$

因为当 $t\searrow\tau$ 时，

$$\int_{R^n} Z(x-\xi;t,\tau)d\xi=V(t;0,\tau)\to 1,$$

如写成 $f(\xi)=f(x)+[f(\xi)-f(x)]$，我们就可断定，只要证明当 $t\searrow\tau$ 时

$$\int_{R^n} Z(x-\xi;t,\tau)[f(\xi)-f(x)]d\xi\to 0 \tag{2.29}$$

就够了.

我们把上面那个积分拆成两部分：$|\xi-x|<\delta$ 的 I_1 和 $|\xi-x|>\delta$ 的 I_2. 取 δ 使当 $|\xi-x|<\delta$ 时，$|f(\xi)-f(x)|<\varepsilon$，这里 ε 是任意固定的正数，而 δ 为依赖于 ε 的固定正数. 如果我们利用(2.5)估计 $|Z|$，然后作代换 $|x-\xi|=\rho(t-\tau)^{1/2p}$，则我们得到

$$\int_{R^n} |Z(x-\xi,t,\tau)|d\xi\leqslant C, \tag{2.30}$$

式中 C 与 t、τ 无关. 类似地，当 $t\searrow\tau$ 时我们得到，

$$\int_{|\xi-x|>\delta} |Z(x-\xi;t,\tau)|\exp[2k|x-\xi|^q]d\xi\to 0. \tag{2.31}$$

利用 (2.30)，从而，有

$$\begin{aligned}|I_1|&\leqslant\varepsilon\int_{|\xi-x|<\delta}|Z(x-\xi;t,\tau)|d\xi\\&\leqslant\varepsilon\int_{R^n}|Z(x-\xi;t,\tau)|d\xi\leqslant C\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.32}$$

利用(2.31)和不等式

$$|f(\xi)|\leqslant \text{const.}\exp[2k|x-\xi|^q],$$

其中常数依赖于 x，我们得到，当 $t\searrow\tau$ 时，$I_2\to 0$（对每个固定的 x）. 因此，当 $t-\tau$ 充分小时，$|I_2|<\varepsilon$. 把它和(2.32)综合起来，即知，当 $t-\tau$ 充分小时，$|I_1+I_2|\leqslant(C+1)\varepsilon$. 因为 ε 是任意的，从而有 (2.29).

3. 带参量方程的拟基本解

考虑系数 $A_k^{ij}(y,t)$ 依赖于 t 和参量 y 的抛物组

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|\leqslant 2p}A_k^{ij}(y,t)D_x^k u_j\equiv P_i(y,t,D_x)u \quad (i=1,\cdots,N), \tag{3.1}$$

y 在 R^n 中变化. 令

$$\begin{aligned}P_{0i}(y,t,D_x)u&=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|=2p}A_k^{ij}(y,t)D_x^k u_j,\\ P_{1i}(y,t,D_x)u&=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|<2p}A_k^{ij}(y,t)D_x^k u_j,\end{aligned} \tag{3.2}$$

因此 $P_i=P_{0i}+P_{1i}$. P_{0i} 为 P_i 的主部. 我们需要如下假定:

(A) (3.1)的系数是 $\Omega=\{(y,t);\ y\in R^n,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 内的有界函数,关于 t 是连续的; P_{0i} 的系数关于 t 是连续的,在 Ω 内关于 (y,t) 是一致连续的.

(B) 在 Ω 内组 (3.1) 关于 (y,t) 是一致抛物的.

以 $Z(x-\xi,t;y,\tau)$ 记第 2 节中对组 (3.1) (关于固定的 y) 所构造的基本解,我们有:

$$|D_x^m Z(x-\xi,t;y,\tau)|\leqslant\frac{C_m}{(t-\tau)^{(n+|m|)/2p}}\times\exp\left\{-c_m\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}, \tag{3.3}$$

其中 C_m, c_m 都是与 y 无关的正的常数.

引理 3 考虑满足 (A), (B) 的如下形式的两个 $2p$ 阶 $N\times N$ 抛物组

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=P_i(y,t,D_x)u \quad (i=1,\cdots,N), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=Q_i(y,t,D_x)u \quad (i=1,\cdots,N), \tag{3.5}$$

并分别以 $Z(x-\xi,t;y,\tau)$, $\hat{Z}(x-\xi,t;y,\tau)$ 记(第 2 节所构造的) (3.4), (3.5)的基本解. 假定(3.4), (3.5)的系数 $A_k^{ij}(y,t)$ 和

$B_k^{ij}(y,t)$ 关于 y 分别有 r 阶导数，这些导数在 Ω 内为 (y,t) 的有界连续函数，并设在 Ω 内有

$$(3.6)\qquad |D_y^s[A_k^{ij}(y,t)-B_k^{ij}(y,t)]|\leqslant \epsilon\quad (0\leqslant|s|\leqslant r),$$

则 Z 和 $\hat{Z}$ 关于 y 有 r 阶连续导数，且每个这样的导数关于 x 有任意阶导数. 而且

$$(3.7)\qquad |D_y^m D_y^s[Z(x-\xi,t;y,\tau)-\hat{Z}(x-\xi,t;y,\tau)]|$$
$$\leqslant \frac{C_m\epsilon}{(t-\tau)^{(n+|m|)/2p}}\exp\left\{-c_m\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}$$
$$(0\leqslant|m|<\infty,\ 0\leqslant|s|\leqslant r),$$

其中 C_m, c_m 仅依赖于 $D_y^s A_k^{ij}(y,t)$, $D_y^s B_k^{ij}(y,t)$ $(0\leqslant|s|\leqslant r)$ 的界、(3.4), (3.5) 主系数 (关于 t) 的连续模以及 (3.4), (3.5) 的抛物性模(所有这些量可认为与 y 无关).

证明　设 $V=V(y,t;\zeta,\tau)$, $\hat{V}=\hat{V}(y,t;\zeta,\tau)$ 分别为 Z 和 $\hat{Z}$ 的 Fourier 变换. V 为下列问题的解:

$$(3.8)\qquad \begin{aligned}&\frac{\partial V^i}{\partial t}=P_i(y,t,\zeta)V\qquad (i=1,\cdots,N),\\ &V|_{t=\tau}=I.\end{aligned}$$

由常微分方程的标准定理得出 D_yV 存在. 关于 y 微分 (3.8), 对于 D_yV 我们得到问题

$$(3.9)\qquad \begin{aligned}&\frac{\partial(D_yV^i)}{\partial t}=P_i(y,t,\zeta)(D_yV)+[D_yP_i(y,t,\zeta)]V,\\ &D_yV|_{t=\tau}=0.\end{aligned}$$

利用现在关于 y 一致地成立的估计式 (2.19), 并运用第 2 节对问题 (3.9) 的论证,我们就得到 D_yV 的界(比较 (2.19))

$$(3.10)\qquad |D_yV(y,t;\xi+i\eta,\tau)|$$
$$\leqslant B\exp\{(t-\tau)[-\delta_0|\xi|^{2p}+A_0|\eta|^{2p}]\}.$$

其中 B, δ_0, A_0 为某些正的常数. 关于 y 再一次微分 (3.9), 并利用已得到的 $|V|$ 和 $|D_yV|$ 的不等式,通过第 2 节那样的论证, 我们就得到和 (3.10) 同样形式的 D_y^2V 的界. 对所有 $|s|\leqslant r$, 我们可以继续用这样的方法推导出 D_y^sV 的界. 取 Fourier 逆变换, 我们

就发现 $D_y^s Z(x-\xi, t; y, \tau)$ 存在，并且不超过 $m=0$ 的(2.5)的右边．通过第 2 节同样的论证就得到 $D_x^m D_y^s Z$ 的界．于是我们断定，所有的导数 $D_x^m D_y^s Z(0 \leqslant |m| < \infty, 0 \leqslant |s| \leqslant r)$ 存在，而且是连续函数，并对 $0 \leqslant |m| < \infty, 0 \leqslant |s| \leqslant r$ 有

$$
(3.11) \qquad |D_x^m D_y^s Z(x-\xi, t; y, \tau)| \leqslant \frac{B_m}{(t-\tau)^{(n+|m|)/2p}} \times \exp\left\{-b_m\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},
$$

其中 B_m, b_m 是某些正的常数，它们仅依赖于 $D_y^s A_k^{ij}(y, t)$ $(0 \leqslant |s| \leqslant r)$的上界、$P_i$ 主系数（关于 t）的连续模以及(3.4)的抛物性模．所有这些量都可认为是与 y 无关的．

以上的论证对 $\hat{Z}(x-\xi, t; y, \tau)$ 也是有效的．

现在考虑矩阵 $W = V - \hat{V}$．它的元素 W^{hj} 满足方程组

$$
(3.12) \qquad \begin{aligned} \frac{dW^{hj}}{dt} = & \sum_{m=1}^{N} \sum_{|k|\leqslant 2p} A_k^{hm}(y, t)(i\xi)^k W^{mj} \\ & + \sum_{m=1}^{N} \sum_{|k|\leqslant 2p} [A_k^{hm}(y, t) - B_k^{hm}(y, t)](i\zeta)^k \hat{V}^{mj}, \end{aligned}
$$

$$
W^{hj}|_{t=\tau} = 0.
$$

把(3.12)写成矩阵形式

$$
(3.12') \qquad \frac{dW}{dt} = P(y, t, \zeta)W + g(y, t, \zeta), \qquad W|_{t=\tau} = 0,
$$

利用假定(3.6)以及对 $D_y^s \hat{V}$ 的不等式(它和上面对 $D_y^s V$ 导出的那些不等式是一样的)，我们得到

$$
(3.13) \qquad |D_y^s g(y, t, \zeta)| \leqslant B'\varepsilon(1+|\zeta|^{2p})\exp\{(t-\tau) \cdot [-\delta_0'|\xi|^{2p} + A_0'|\eta|^{2p}]\},
$$

其中 B', δ_0', A_0' 都是与 ζ, ε 无关的正的常数．如象在估计(2.2)，(2.3)的解时那样考虑 W，对于 $s=0$ 利用(3.13)我们得到

$$
(3.14) \qquad |W(y, t; \zeta, \tau)|
$$

$$\leqslant B''\varepsilon \exp\{(t-\tau)[-\delta'|\xi|^{2p}+A'|\eta|^{2p}]\},$$

其中 B'', δ', A' 都是与 ζ, ε 无关的正的常数.

关于 y 微分 (3.12′) 一次，并对 $0 \leqslant |s| \leqslant 1$ 利用 (3.13) 和 (3.14),我们就得到 $D_y W$ 不超过(3.14)的右边 (有不同的常数).

关于 y 继续微分(3.12′)我们就得到 w 对 y 的所有阶数不超过 r 的导数的界,这些界和(3.14)的一样，但有不同的常数. 利用这些估计并取 $D_y^s W$ 的 Fourier 逆变换,我们就得到 $m=0$ 的不等式 (3.7). 我们用和第 2 节同样的论证(在 $|m|>0$ 的情况下与推导 (2.5) 有关),就推出对任何 m 的不等式 (3.7).

在引理 3 中取

$$Q_i(y,t,D_x)=P_i(y+h,t,D_x),$$

我们得到如下结果.

引理 4 假定组 (3.1) 满足 (*A*), (*B*), 并假定 $D_y^s A_k^{ij}(y,t)$ $(0\leqslant|s|\leqslant r)$ 是 Ω 内的连续有界函数, 关于 y 满足 Hölder 条件 (指数为 α), 在 Ω 内满足一致 Hölder 条件. 则对所有的 $0\leqslant |m|<\infty$, $0\leqslant|s|\leqslant r$, 有

$$(3.15)\qquad |D_x^m D_y^s z(x-\xi,t;y,\tau)|\leqslant \frac{C_m}{(t-\tau)^{(n+|m|)/2p}} \times\exp\left\{-c_m\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

$$(3.16)\qquad |D_x^m D_y^s[Z(x-\xi,t;y+h,\tau)-Z(x-\xi,t;y,\tau)| \leqslant \frac{C_m|h|^\alpha}{(t-\tau)^{(n+|m|)/2p}}\exp\left\{-c_m\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

其中 C_m, c_m 为 (与 y, x, ξ, t, τ, h 无关的) 正的常数.

附注 从 (3.11) 的证明得出, 即使省略 $D_y^s A_k^{ij}(y,t)$ 的 Hölder 连续性假定, (3.5) (或 (3.11)) 仍为真.

引理 5 假定组(3.1)满足引理 4 的假定 $(r=0)$. 设 $f(x,t)$ 为 Ω 内的连续函数, 对某个 $a<cT^{-1/(2p-1)}$ $(c=\min\limits_{|m|\leqslant 2p}\{c_m\})$, 满足

$$(3.17)\qquad |f(x,t)|\leqslant \text{const.}\exp[a|x|^q] \qquad \left(q=\frac{2p}{2p-1}\right),$$

其中 c_m 为 (3.15), (3.16) 中的常数. 而且假定 $f(x, t)$ 关于 x 是 Hölder 连续的,它的 Hölder 系数在 Ω 的任意有界集中对于 (x, t) 是一致的,则积分

$$(3.18) \qquad \Phi(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{R^n} Z(x-\xi, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi$$

对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 收敛, $D_x^k \Phi(x, t)$ $(0 \leqslant |k| \leqslant 2p)$ 和 $D_t \Phi(x, t)$ 存在并且对 $0 < t \leqslant T$ 都是连续函数,而且

$$(3.19) \qquad D_x^k \Phi(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{R^n} D_x^k Z(x-\xi, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi.$$

$$(3.20) \qquad D_t \Phi(x, t) = f(x, t) + \int_0^t d\tau \int_{R^n} D_t Z(x-\xi, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi.$$

证明　本引理的证明是基于和第一章第 3 节中同样的方法,类似地把积分拆成若干部分.现在从引理 4 得到的对 x 及其导数的估计是不同的, 但不会发生任何困难. 因此我们省略其细节.

注意,(3.18)—(3.20)关于 τ 的积分在 $\tau = t$ 处是非正常的.

4. 基本解的构造. Cauchy问题

我们考虑方程组(1.6)并作如下假设:

(A_1)　(1.6)的系数是 $\Omega = R^n \times [0, T]$ 内的连续有界函数,而且在 Ω 内主系数关于 t 是连续的, 关于 (x, t) 是一致连续的.

(A_2)　(1.6) 的系数对 x 是 Hölder 连续的 (指数为 α). 它的 Hölder 系数在 Ω 的任意有界子集中关于 (x, t) 是一致的, 而且主系数关于 x 是 Hölder 连续的 (指数为 α), 且对所有 $(x, t) \in \Omega$ 是一致的.

定理 2　假定 (1.6) 在 $\Omega = R^n \times [0, T]$ 中是一致抛物的, (A_1), (A_2) 成立,则 (1.6) 的基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 存在,且对 $0 \leqslant |m| < 2p$ 满足不等式

$$(4.1) \qquad |D_x^m \Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{C}{(t-\tau)^{(n+|m|)/2p}}$$

$$\times \exp\left\{-c\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

其中 C, c 为正的常数.

证明　对于 $f_i=0$,把方程组 (1.6) 写成如下形式:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=P_i(x,t,D_x)u=P_{0i}(x,t,D_x)u+P_{1i}(x,t,D_x)u, \tag{4.2}$$

其中 P_{0i} 为 P_i 的主部. 设 $Z(x-\xi,t;y,\tau)$ 为方程组

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=P_{0i}(y,t,D_x)u \tag{4.3}$$

在第 2 节中所构造的基本解. 遵循拟基本解方法,我们来构造如下形式的 Γ:

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau)=Z(x-\xi,t;\xi,\tau)+\int_\tau^t d\sigma\int_{R^n}Z(x-y,t;y,\sigma)\Phi(y,\sigma;\xi,\tau)dy, \tag{4.4}$$

其中 Φ 为 $N\times N$ 矩阵.

设 K 为 $N\times N$ 矩阵,其第 i 列 K^i 由下式给出

$$\begin{aligned}K^i(x,t;\xi,\tau)&=[P_i(x,t,D_x)-\delta_iD_t]Z(x-\xi,t;\xi,\tau)\\&=[P_{0i}(x,t,D_x)-P_{0i}(\xi,t,D_x)]\\&\quad\times Z(x-\xi,t;\xi,\tau)+P_{1i}(x,t,D_x)Z(x-\xi,t;\xi,\tau),\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 $\delta_iD_tZ=D_tZ^i$ (根据定义). 利用 (3.3) 和 (A_2),我们得到

$$|K(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{A_1}{(t-\tau)^{(n+2p-\alpha)/2p}}\times\exp\left\{-a_1\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}, \tag{4.6}$$

其中 A_i, a_i 表适当的正的常数.

如果 Φ 为 Hölder 连续,因而可应用引理 5 于 (4.4) 右边的积分,于是,当且仅当

$$\Phi(x,t;\xi,\tau)=K(x,t;\xi,\tau)+\int_\tau^t d\sigma\int_{R^n}K(x,t;y,\sigma)\Phi(y,\sigma;\xi,\tau)dy \tag{4.7}$$

时，Γ（作为 (x, t) 的函数）满足方程组(4.2)．级数

$$(4.8)\qquad \Phi(x, t; \xi, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x, t; \xi, \tau)$$

是 (4.7) 的形式解，其中 $K_1 = K$，

$$(4.9)\qquad K_m(x, t; \xi, \tau) = \int_\tau^t d\sigma \int_{R^n} K_1(x, t; y, \sigma) \cdot K_{m-1}(y, \sigma; \xi, \tau) dy.$$

为了证明级数(4.8)收敛且为(4.7)的解，我们需要如下的引理．

引理 6 设

$$I_a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(t-\sigma)(\sigma-\tau)]^{1/2p}} \exp\{-af(x, \xi, y; t, \tau, \sigma)\} dy,$$

其中 $\tau < \sigma < t$，$-\infty < x < \infty$，$-\infty < y < \infty$，而 a 为一正数，

$$f(x, \xi, y; t, \tau, \sigma) =$$

$$\left(\frac{|x-y|^{2p}}{t-\sigma}\right)^{1/(2p-1)} + \left(\frac{|y-\xi|^{2p}}{\sigma-\tau}\right)^{1/(2p-1)}.$$

对任何 $0 < \varepsilon < 1$，存在仅依赖于 ε, a, p 的常数 M，使得

$$(4.10)\qquad I_a \leqslant \frac{M}{(t-\tau)^{1/2p}} \exp\left\{-a(1-\varepsilon)\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}.$$

证明 f 作为 $\sigma(\tau < \sigma < t)$ 的函数在点 σ 处取最小值，这里 σ 满足 $y = [x(\sigma-\tau) + \xi(t-\sigma)]/(t-\tau)$．其最小值是

$$[|x-\xi|^{2p}/(t-\tau)]^{1/(2p-1)}.$$

因而，

$$(4.11)\qquad I_a \leqslant I_{\varepsilon a} \exp\left\{-a(1-\varepsilon)\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

其中 $I_{\varepsilon a}$ 定义为 I_a，其中以 εa 代 a 如果 $\tau \leqslant \sigma \leqslant \tau + (t-\tau)/2$，则我们利用不等式

$$f(x, \xi, y; t, \tau, \sigma) \geqslant \left(\frac{|y-\xi|^{2p}}{\sigma-\tau}\right)^{1/(2p-1)}$$

并在 $I_{\varepsilon a}$ 中作代换 $|y-\xi|=\rho(\sigma-\tau)^{1/2p}$. 因为 $t-\sigma\geqslant(t-\tau)/2$，我们得到

$$I_{\varepsilon a}\leqslant \text{const.}/(t-\tau)^{1/2p}.$$

把它代到 (4.11)，就得出不等式 (4.10). 在 $[\tau+(t-\tau)/2]\leqslant\sigma\leqslant t$ 的情形，(4.10)的证明是类似的.

现在我们把引理 6 推广到 n 个变量的情形. 引进范数

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^q\right)^{1/q}, \tag{4.12}$$

其中 $q=\dfrac{2p}{2p-1}$. 对 $\tau<\sigma<t$，我们定义

$$f_n(x,\xi,y;t,\tau,\sigma)=\left(\frac{\|x-y\|^{2p}}{t-\sigma}\right)^{1/(2p-1)}+\left(\frac{\|y-\xi\|^{2p}}{\sigma-\tau}\right)^{1/(2p-1)};$$

于是我们有引理 6 的如下推广.

引理 7 设

$$I_a=\int_{R^n}\frac{1}{[(t-\sigma)(\sigma-\tau)]^{n/2p}}\exp\{-af_n(x,\xi,y;t,\tau,\sigma)\}dy$$

其中 $\tau<\sigma<t$, $x\in R^n$, $\xi\in R^n$, 而 a 为任何正数. 对任何 $0<\varepsilon<1$，存在仅依赖于 ε, a, p, n 的常数 M，使得

$$I_a\leqslant\frac{M}{(t-\tau)^{n/2p}}\exp\left\{-a(1-\varepsilon)\left(\frac{\|x-\xi\|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}.$$

证明　注意到对于 $b=(1-\varepsilon)a$，有

$$\exp\{-bf_n(x,\xi,y;t,\tau,\sigma)\}=\prod_{j=1}^{n}\exp\{-bf_1(x_j,\xi_j,y_j;t,\tau,\sigma)\},$$

就可得出，如(4.11)大括号中的 $|x-\xi|$ 代之以 $\|x-\xi\|$，则 (4.11) 仍有效. $I_{\varepsilon a}$ 的估计类似于 $n=1$ 情况下的估计.

注意到 (4.6) 意味着

$$|K(x,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{A_1}{(t-\tau)^{(n+2p-\alpha)/2p}} \tag{4.13}$$

$$\cdot \exp\left\{-a_2\left(\frac{\|x-\xi\|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

并利用引理 7，我们得到

$$|K_2(x, t; \xi, \tau)| \leqslant A_2\int_\tau^t \frac{1}{[(t-\sigma)(\sigma-\tau)]^{(2p-\alpha)/2p}} I a_2\, d\sigma$$

$$\leqslant \frac{A_3}{(t-\tau)^{(n+2p-2\alpha)/2p}} \exp\left\{-a_3\left(\frac{\|x-\xi\|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}. \tag{4.14}$$

按此法逐步进行下去，我们就得到某个正整数 m_0，使得

$$|K_{m_0}(x, t; \xi, \tau)| \leqslant A_4\exp\left\{-a_4\left(\frac{\|x-\xi\|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}.$$

于是，通过关于 m 的归纳法我们可以证明

$$\begin{aligned}|K_{m+m_0}(x, t; \xi, \tau)| &\leqslant A_4[A_5(t-\tau)^{\alpha/2p}]^m \\ &\times\frac{1}{\Gamma(1+m\alpha/2p)} \exp\left\{-a_5\left(\frac{\|x-\xi\|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},\end{aligned} \tag{4.15}$$

其中 a_5 为任何小于 $\min\{a_2, a_4\}$ 的正的常数．事实上，可从(4.13)，(4.15)和不等式（见引理 6，7 的证明）

$$\exp\{-a_5 f_n(x, \xi, y; t, \tau, \sigma)\}$$

$$\leqslant \exp\left\{-a_5\left(\frac{\|x-\xi\|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}$$

得出，当我们取 $a_5 < a_2$ 时，有

$$|K_{m+m_0+1}(x, t; \xi, \tau)|$$

$$\leqslant A_6 A_4 A_5^m \exp\left\{-a_5\left(\frac{\|x-\xi\|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1(2p-1)}\right\} J/\Gamma\left(1+\frac{m\alpha}{2p}\right),$$

其中

$$J = \int_\tau^t\left\{\int_{R^n}\frac{1}{(\sigma-\tau)^{n/2p}}\exp\left\{-(a_2-a_5)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\|y-\xi\|^{2p}}{\sigma-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\} dy\right\}\frac{(t-\sigma)^{m\alpha/2p}}{(\sigma-\tau)^{(2p-\alpha)/2p}}\, d\sigma.$$

J 的里层的那个积分不超过某个常数 A_7．因为

$$\int_\tau^t (t-\sigma)^{m\alpha/2p}(\sigma-\tau)^{(\alpha-2p)/2p}d\sigma$$

$$=(t-\sigma)^{(m+1)\alpha/2p}\,\Gamma\left(1+\frac{m\alpha}{2p}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2p}\right)\Big/\Gamma\left(1+\frac{(m+1)\alpha}{2p}\right),$$

如取 $A_5 \geqslant A_6 A_7 \Gamma(\alpha/2p)$，就推出以 $m+1$ 代替 m 后的不等式 (4.15)．于是，对所有的 $m \geqslant 0$，(4.15) 证明完毕．

从(4.15)得出，(4.8)中的级数收敛，并满足方程 (4.7)．而且，从关于 K_m (同样对 $m \leqslant m_0$) 的估计式得出

(4.16) $$|\Phi(x,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{A_8}{(t-\tau)^{(n+2p-\alpha)/2p}} \times \exp\left\{-a_6\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}.$$

其次，我们必需建立 $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ 关于 x 的 Hölder 连续性，对每个 $0<\beta<\alpha$，我们应有

(4.17) $$|\Phi(x,t;\xi,\tau)-\Phi(y,t;\xi,\tau)| \leqslant \frac{\text{const.}|x-y|^\beta}{(t-\tau)^{(n+2p-\alpha+\beta)/2p}}\left\{\exp\left[-a_7\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right] + \exp\left[-a_7\left(\frac{|y-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right]\right\}.$$

(4.17) 的证明类似于 (1.4.17) 的证明，因此省略．

利用(4.16)，(4.17)并把 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 写成(1.4.26)类似的形式，应用引理 5，我们立即可知，$\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 是方程组 (4.2) 的解．

为了证明基本解的第二个性质，即 (1.10)，我们首先证明和 (1.4.30) 类似的结果．此外还必须证明当 $t\searrow\tau$ 时，

$$\int_{R^n} Z(x-\xi,t;\xi,\tau)d\xi \to 1.$$

为了证明这一性质，我们忆及

$$\int_{R^n} Z(x-\xi,t;0,\tau)d\xi = 1.$$

于是只要证明当 $t\searrow\tau$ 时，

$$\int_{R^n}[Z(x-\xi,t;\xi,\tau)-Z(x-\xi,t;0,\tau)]d\xi\to 0$$

就够了．相应于 $|\xi|<\delta$ 和 $|\xi|\geqslant\delta$，把积分拆成两部分，并利用引理 4 就可以得到这个关系式．

剩下要证明不等式 (4.1)．据 (4.4) 和引理 5，有

$$(4.18)\quad D_x^m\Gamma(x,t;\xi,\tau)=D_x^m Z(x-\xi,t;\xi,\tau)+\int_\tau^t d\sigma\int_{R^n}D_x^m Z(x-y,t;y,\sigma)\Phi(y,\sigma;\xi,\tau)dy.$$

现在我们使用 (3.3)，(4.16) 和引理 7 来估计上式右端．

在定理 2 中，如果仍假定 (1.6) 的所有系数 A_k^{ij} 关于 x 是 Hölder 连续的，其 Hölder 系数在 Ω 中是一致的，则对 $|m|=2p$，(4.1) 也成立，并且

$$(4.19)\quad |D_x^m\Gamma(x,t;\xi,\tau)-D_x^m\Gamma(y,t;\xi,\tau)|\leqslant\frac{\text{const.}|x-y|^\beta}{(t-\tau)^{(n+|m|+\beta)/2p}}\cdot\left\{\exp\left[-a_8\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right]+\exp\left[-a_8\left(\frac{|y-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right]\right\},$$

其中当 $|m|<2p$ 时，β 为不超过 1 的任意正数，而当 $|m|=2p$ 时，β 为小于 α 的任意正数．

因为 $|m|=2p$ 的(4.1) 和 (4.19) 两个估计式往后都用不着，所以省略它们的证明．

从 Γ 的式子推出，若 f 为连续函数，它满足 (3.17)，其中 $a<c'T^{-1/(2p-1)}$，c' 为与 P_i 有关的常数(但与 T 无关)，则 $\int\Gamma f$ 可以写成和的形式 $\int Zf+\int Z\hat{f}$ (比较第一章第 5 节)，其中 $\hat{f}=\int\Phi f$ 仍为连续函数，它满足 (3.17) (但 a 不同)．若 $f(x,t)$ 关于 x 是 Hölder 连续的，且对 Ω 的有界子集是一致的，则 $\hat{f}(x,t)$ 也有同样的 Hölder 连续性 (因为可由 (4.17) 推出)．因此有：

引理 8　如果以 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ 代替 $Z(x-\xi,t;\xi,\tau)$，只要满足定理 2 的假设，只要在 (3.17) 中对某个 (与 T 无关的) 常数

c' 有 $a < c' \cdot T^{-1/(2p-1)}$，则引理 5 仍为真.

现在我们来解 Cauchy 问题(1.6)，(1.9). 所谓(1.6)，(1.9)在带形区域 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 中的解是指一个函数 u，它当 $0 < t \leqslant t_0$ 时满足(1.6)(对 $0 < t \leqslant t_0$，假定 $D_t u$ 和 $D_x^m u (0 \leqslant |m| \leqslant 2p)$ 存在并且连续)，对 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 它是连续的，且当 $x \in R^n$ 时满足(1.9). 把(1.6)，(1.9)写成矩阵形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, D_x)u + f(x, t), \tag{4.20}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{4.21}$$

我们证明如下定理.

定理 3 设在带形区域 $\Omega = R^n \times [0, T]$ 内(4.20)为一致抛物组，且满足 (A_1)，(A_2)，设 $f(x, t)$ 为 Ω 内的连续函数，关于 x 是 Hölder 连续的，且对 Ω 的任何有界子集是一致的，而 $\varphi(x)$ 为 R^n 内的连续函数，最后，假定对于 $q = 2p/(2p-1)$，有

$$|f(x, t)| \leqslant A \exp[a|x|^q] \qquad (\text{在 } \Omega \text{ 内}), \tag{4.22}$$

$$|\varphi(x)| \leqslant A \exp[a|x|^q] \qquad (\text{在 } R^n \text{ 内}), \tag{4.23}$$

则在带形区域 $0 \leqslant t \leqslant t_0$ 内 Cauchy 问题(4.20)，(4.21)的解存在，且对某个常数 a' 有

$$|u(x, t)| \leqslant \text{const.}\exp[a'|x|^q] \qquad (x \in R^n,\ 0 \leqslant t \leqslant t_0), \tag{4.24}$$

其中 $t_0 = \min\{T, (\bar{c}/a)^{2p-1}\}$，而 $\bar{c}$ 为依赖于 P(但不依赖于 T)的常数.

证明　鉴于引理 8 和定理 2，函数

$$-\int_0^t \int_{R^n} \Gamma(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi\, d\tau \tag{4.25}$$

在某个带形区域 $0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内为 $\varphi \equiv 0$ 的(4.20)，(4.21)的解，其次，显然可把第一章第 6 节定理 11 的证明推广到现在这种抛物组的情形，因此，函数

$$\int_{R^n} \Gamma(x, t; \xi, 0) \varphi(\xi) d\xi \tag{4.26}$$

在某个带形区域 $0 \leqslant t \leqslant t_2$ 内是 $f \equiv 0$ 的(4.20)，(4.21)的解.

综合(4.25)，(4.26)我们得出

$$(4.27)\qquad u(x,t)=\int_{R^n}\Gamma(x,t;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi-\int_0^t\int_{R^n}\Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau$$

是某个带形区域 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 内 Cauchy 问题 (4.20), (4.21) 的解，因为 t_1 和 t_2 都有 $\min\{T,(c^*/a)^{(2p-1)}\}$ 的形式，其中 c^* 为仅依赖于 P (但不依赖于 T) 的常数，所以对于 t_0 也如此. 于是剩下证明 (4.24). 它可由如下引理推出.

引理 9 对任意正数 $q, A, B(B<A)$, 存在正数 c, c', 使对所有 $x\in R^n$ 有

$$(4.28)\qquad \int_{R^n}\exp[-A|x-\xi|^q]\exp[B|\xi|^q]d\xi\leqslant c'\exp[c|x|^q].$$

证明 对某个使 $A-\varepsilon>B$ 的 $\varepsilon>0$, 写成

$$\exp[-A|x-\xi|^q]=\exp[-\varepsilon|x-\xi|^q]\times\exp[-(A-\varepsilon)|x-\xi|^q]$$

我们就看出，只要对所有的 $x\in R^n$, $\xi\in R^n$ 证明

$$(4.29)\qquad B|\xi|^q\leqslant(A-\varepsilon)|x-\xi|^q+c|x|^q$$

就够了. 如果 $\xi=0$, (4.29) 当然满足，于是假定 $\xi\neq 0$. 以 $|\xi|$ 除 (4.29) 两边，并令 $y=x/|\xi|$, $e=\xi/|\xi|$, (4.29) 就化为

$$(4.30)\qquad B\leqslant(A-\varepsilon)|y-e|^q+c|y|^q.$$

因为 $A-\varepsilon>B$, 于是对某个充分小的常数 $\eta>0$, (4.30) 当 $|y|<\eta$ 时成立. 若 $|y|>\eta$, 则 (4.30) 当 $c\eta^q=B$ 时成立.

利用 (4.1) 我们得到:

推论 定理 3 的那个解 $u(x,t)$ 满足:

$$(4.31)\qquad |D_x^k u(x,t)|\leqslant \underset{t|k|}{\text{const.}}\exp[a'|x|^q]\qquad(0\leqslant|k|<2p).$$

我们在柱体 $\Omega=\overline{D}\times[0,T]$ 上简短地讨论基本解来结束本节，其中 D 为 R^n 中的任意区域. 把在 $D=R^n$ 情况下构造的基本解经过显而易见的修改后即可得到在现在这种情况下构造的基本解. 于是，拟基本解是一样的，但在 Γ 和 Φ 的定义中 ((4.4), (4.7) 中) 在 R^n 上的积分应代之以在 D 上的积分. 于是，我们得到如下

结果.

定理 4 假定方程组(1.6)在 $\Omega=\bar{D}\times[0,T]$ 上是一致抛物的,(A_1),(A_2) 在 $\Omega=\bar{D}\times[0,T]$ 上成立,则(1.6)存在基本解 $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$,且不等式(4.1)成立.

5. 伴随方程组

在 $\Omega=\bar{D}\times[0,T]$ 上给定了方程组

$$(5.1)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|\leqslant 2p}A_k^{ij}(x,t)D_x^k u_j\qquad (i=1,\cdots,N),$$

其中 D 为 R^n 的任何区域. 我们定义伴随方程组为

$$(5.2)\qquad \frac{\partial v_i}{\partial t}=-\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|\leqslant 2p}(-1)^{|k|}D_x^k[A_k^{ji}(x,t)v_j]$$
$$(i=1,\cdots,N).$$

如果我们把方程组(5.1),(5.2)写成如下形式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=P_i(x,t,D_x)u_i,\qquad \frac{\partial v_i}{\partial t}=Q_i(x,t,D_x)v$$

则对一切在 Ω 内部有紧支集的无穷可微函数 u_i, v_i 有

$$(5.3)\qquad \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega[v_iP_i(x,t,D_x)u+u_iQ_i(x,t,D_x)v]dx\,dt=0.$$

事实上,以(5.2)代替 Q_i,并进行分部积分,我们就得知(5.3)成立. 性质(5.3)唯一地确定线性微分算子 Q_i,即不可能有两个不同的算子 Q_i 和 $Q^*(i=1,\cdots,N)$ 的方程组,使(5.3)成立. 事实上,在相反的情形,对一切如(5.3)那样的 v 就会推出 $(Q_i-Q_i^*)v\equiv 0$,因此,据第一章第 8 节定理 14,$Q_i\equiv Q_i^*$,这就导致矛盾.

把方程组(5.2)写成如下形式

$$(5.4)\qquad \frac{\partial v_i}{\partial t}=-\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|\leqslant 2p}A_k^{*ij}(x,t)D_x^k v_j\qquad (i=1,\cdots,N),$$

并假定(5.4)的系数满足第 4 节假定 (A_1),(A_2) 并以 $\bar{D}$ 代 R^n,又假定(5.1)在 $\Omega=\bar{D}\times[0,T]$ 上是一致抛物的.

(5.4)的基本解(或者基本矩阵)是一个对 $(x,t)\in\Omega$, $(\xi,\tau)\in\Omega$, $t<\tau$ 定义的 $N\times N$ 矩阵 $\Gamma^*(x,t;\xi,\tau)$,作为 (x,t)

$(x \in D, 0 \leqslant t < \tau)$ 的函数，它满足 (5.4)，并且对所有的 $x \in D$ 满足关系式

(5.5) $$\lim_{t \nearrow \tau} \int_D \Gamma^*(x, t; \xi, \tau) f(\xi) d\xi = f(x)$$

其中 $f(x)$ 为 $\bar{D}$ 上的任意连续函数，并存在某个 $k > 0$，使(1.11)成立.

Γ^* 可以被构造成如下形式

(5.6) $$\Gamma^*(x, t; \xi, \tau) = Z^*(x - \xi, t; \xi, \tau) + \int_t^\tau d\sigma \int_D Z^*(x - \xi, t; y, \sigma) \Phi^*(y, \sigma; \xi, \tau) dy$$

其中 Z^* 是伴随方程组的基本解 (见第 4 节). Γ^* 的性质类似于 Γ.

我们需要下面的假定:

(A_3) 导数 $D_x^h A_k^{ij}(x, t)$ $(0 \leqslant |h| \leqslant |k|)$ 是 $\Omega = R^n \times [0, T]$ 内的连续有界函数，且关于 x 是 Hölder 连续的(指数为 α)，且对 Ω 的有界子集中所有的 (x, t) 是一致的.

定理 5 设方程组 (5.1) 在 $\Omega = R^n \times [0, T]$ 内是一致抛物的，假定 (A_1)，(A_2)，(A_3) 成立，则

(5.7) $$\Gamma^*(\xi, \tau; x, t) = (\Gamma(x, t; \xi, \tau))^\sim$$

其中 $A^\sim$ 表示 A 的转置.

证明 设 u, v 为两个光滑的纯量函数，$D_x = \partial/\partial x_i$，则

$$\begin{aligned} vD_x^m u &= D_x(v D_x^{m-1} u) - (D_x v)(D_x^{m-1} u) \\ &= D_x(v D_x^{m-1} u) - D_x[(D_x^{m-2} u) + (D_x^2 v)(D_x^{m-2} u) \\ &= \cdots \\ &= D_x\{v D_x^{m-1} u - (D_x v)(D_x^{m-2} u) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{m-1}(D_x^{m-1} v)(D_x u)\} + (-1)^m (D_x^m v) u. \end{aligned}$$

因此，

(5.8) $$v D_x^m u - (-1)^m u D_x^m v = D_x B(u, v)$$

其中 $B(u, v)$ 是关于 u, v 和它们直到 $\leqslant m - 1$ 阶导数的双线性

函数.

如果 D_x^m 为任意的m阶偏导数，那么我们用类似的方法可以得到

$$(5.9)\qquad v D_x^m u-(-1)^{|m|} u D_x^m v=\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} B_j(u, v).$$

以 $w \cdot v$ 记任何两个矢量 w, v 的纯量积 $\sum w_i v_i$. 令

$$A_k=(A_k^{ij}),$$

$$(5.10)\qquad Pu=\sum_{|k| \leqslant 2p} A_k D_x^k u, \qquad P^* v=\sum_{|k| \leqslant 2p}(-1)^{|k|} D_x^k(A_k^{\sim} v),$$

显然，(5.1)，(5.2) 可写成如下形式:

$$(5.11)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=Pu, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=-P^* v.$$

利用 (5.9) 我们得到

$$(5.12)\qquad v A_k D_x^k u-(-1)^{|k|} u D_x^k(A_k^{\sim} v)=\sum \frac{\partial}{\partial x_j} B_{jk}[u, v],$$

其中 $B_{jk}[u, v]$ 为关于 u, v 及其直到 $\leqslant |k|-1$ 阶导数的分量的双线性式. 对 k 求和我们得到

$$(5.13)\qquad v\left(Pu-\frac{\partial u}{\partial t}\right)-u\left(P^* v+\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\sum \frac{\partial}{\partial x_j} B_j[u, v]-\frac{\partial}{\partial t}(uv),$$

其中 $B_j=\sum B_{jk}$. 恒等式(5.13)称为 Green **恒等式**. 如果 u, v 为矩阵 U, V, 则 (5.13) 由

$$(5.14)\qquad V\left(PU-\frac{\partial U}{\partial t}\right)-\left(P^* V^{\sim}+\frac{\partial V^{\sim}}{\partial t}\right)^{\sim} U=\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{B}_j(U, V)-\frac{\partial(VU)}{\partial t}$$

代替，其中 $\hat{B}_j$ 的元素是关于 U, V 的元素及其不超过 $2p-1$ 阶的导数的元素的某个双线性表达式.

在(5.14)中取 $U = \Gamma(x, t; x^0, t^0)$, $V = (\Gamma^*(x, t; \bar{x}, \bar{t}))^\sim$, 并在集合 $t^\circ + \varepsilon < t < \bar{t} - \varepsilon$, $|x| < R(\varepsilon > 0, R > 0)$ 上积分, 然后取 $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ 就推出(5.7)(比较第一章第8节).

利用关于 Cauchy 问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Pu,\ u(x, 0) = 0$$

的解 u 和 $v = h\Gamma$ (h 为一矢量函数)的 Green 公式,我们就可以运用第一章第9节定理16的证明方法,从而得到 Cauchy 问题的唯一性定理如下:

定理 6 设方程组(5.1)(或(1.6))在 $\Omega = R^n \times [0, T]$ 内是一致抛物的,且假定 (A_1), (A_2), (A_3) 成立, 则对某个 $k>0$ 满足

$$\int_0^T \int_{R^n} |u(x, t)| \exp[-k|x|^q] dx\, dt < \infty \tag{5.15}$$

$$\left(q = \frac{2p}{2p-1}\right)$$

的 Cauchy 问题(1.6), (1.9)至多有一个解.

6. 基本解的可微性

我们需要下面的假定:

(C) 导数 $D_x^k A_k^{ij}(x, t)$ $(0 \leqslant |h| \leqslant r$; r 为正整数)存在,并且在 $\Omega = R^n \times [0, T]$ 内是 (x, t) 的有界连续函数,而(1.6)的主系数关于 t 是连续的,在 Ω 中关于 (x, t) 是一致的.

定理 7 设(1.6)是 $\Omega = R^n \times [0, T]$ 内的一致抛物组,并设(C)成立. 设 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 是第4节中所构造的(1.6)的基本解,则对于所有的 $0 \leqslant |a| + |b| \leqslant r$, $0 \leqslant |m| < 2P$, $D_x^{m+a} D_\xi^b \Gamma$ $(x, t; \xi, \tau)$ 存在,而且是连续函数,又对某个常数 $\boldsymbol{d} > 0$,有

$$|D_x^{m+a} D_\xi^b \Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(|m|+|a|+|b|+n)/2p}} \exp\left\{-d\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}, \tag{6.1}$$

(6.2) $$|D_x^m D_\xi^l \Gamma(\xi + x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+|m|)/2p}} \times \exp\left\{-d\left(\frac{|x|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}.$$

证明　考虑 (4.5) 中所定义的函数 K. 据假定 (C) 和不等式 (3.15),有

(6.3) $$|D_x^a D_\xi^b K(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+2p-1+|a|+|b|)/2p}} \times \exp\left\{-b_1\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

(6.4) $$|D_\xi^b K(z + \xi, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+2p-1)/2p}} \times \exp\left\{-b_1\left(\frac{|z|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

其中 b_i 记正的常数.

其次,考虑由 (4.9) 定义的 K_2. 写成

(6.5) $$K_2(x, t; \xi, \tau) = \int_\tau^{\tau+(t-\tau)/2} d\sigma \int_{R^n} K(x, t; y, \sigma)K(y, \sigma; \xi, \tau)dy + \int_{\tau+(t-\tau)/2}^t d\sigma \int_{R^n} K(x, t; y, \sigma)K(y, \sigma; \xi, \tau)dy \equiv K_{21}(x, t; \xi, \tau) + K_{22}(x, t; \xi, \tau).$$

对于 K_{21}, $t - \sigma \geqslant (t-\tau)/2 > 0$. 因此

$$D_x^a K_{21}(x, t; \xi, \tau) = \int_\tau^{\tau+(t-\tau)/2} d\sigma \int_{R^n} [D_x^a K(x, t; y, \sigma)] \times K(y, \sigma; \xi, \tau)dy.$$

作代换 $y = \xi + z$, 我们得到

(6.6) $$D_x^a K_{21}(x, t; \xi, \tau) = \int_\tau^{\tau+(t-\tau)/2} d\sigma \times \int_{R^n} [D_x^a K(x, t; \xi + z, \sigma)]K(\xi + z, \sigma; \xi, \tau)dz.$$

应用 D_ξ^b 于 (6.6) 的两边,并假定 D_ξ^b 可以和右边的积分交换,使用 (6.3), (6.4) 后, 我们得到

$$|D_x^a D_\xi^b K_{21}(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \text{const.} \int_\tau^{\tau+(t-\tau)/2} d\sigma$$

$$\times \int_{R^n} (t-\sigma)^{-(n+2p-1+|a|+|b|)/2p} \cdot (\sigma-\tau)^{-(n+2p-1)/2p}$$

$$\times \exp\left\{-b_1\left(\frac{|x-\xi-z|^{2p}}{t-\sigma}\right)^{1/(2p-1)}\right\}$$

$$\times \exp\left\{-b_1\left(\frac{|z|^{2p}}{\sigma-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\} dz.$$

利用第 4 节引理7，我们得到

$$(6.7) \quad |D_x^a D_\xi^b K_{21}(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+2p-2+|a|+|b|)/2p}}$$

$$\times \exp\left\{-b_2\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}.$$

用证明第一章第 3 节定理 3 的方法，可以证明 $D_x^a D_\xi^b K_{21}$ 存在以及 D_ξ^b 可以和 (6.6) 右边的积分交换.

因为可以类似于 K_{21} 那样处理 K_{22}，所以我们得到

$$(6.8) \quad |D_x^a D_\xi^b K_2(x, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+2p-2+|a|+|b|)/2p}}$$

$$\times \exp\left\{-b_2\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}.$$

如果在 $K_2(\xi+z, t; \xi, \tau)$ 的积分中（见 (4.9)）作代换 $y=\xi+z'$，我们得到

$$K_2(\xi+z, t; \xi, \tau)$$

$$= \int_\tau^t d\sigma \int_{R^n} K(\xi+z, t; \xi+z', \sigma) K(\xi+z', \sigma; \xi, \tau) dz'.$$

把 D_ξ^b 作用于上式两边，并利用 (6.4) 我们就得到

$$(6.9) \quad |D_\xi^b K_2(\xi+z, t; \xi, \tau)| \leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+2p-2)/2p}}$$

$$\times \exp\left\{-b_2\left(\frac{|z|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}.$$

不等式 (6.8)，(6.9) 是和 (6.3)，(6.4) 类似的不等式.

我们可以归纳地估计 K_m，并证明对所有的 $1\leqslant m<\infty$，有

$$|D_x^a D_\xi^b K_m(x,t;\xi,\tau)|\leqslant \frac{B_m}{(t-\tau)^{(n+2p-m+|a|+|b|)/2p}}$$

$$\times\exp\left\{-b_3\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

$$|D_\xi^b K_m(\xi+z,t;\xi,\tau)|\leqslant \frac{B_m}{(t-\tau)^{(n+2p-m)/2p}}$$

$$\times\exp\left\{-b_3\left(\frac{|z|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

其中 $B_m=B^m/\Gamma\left(1+\frac{m\alpha}{2p}\right)$，$B$ 为常数．于是从 (4.8) 推出

$$\text{(6.10)}\qquad |D_x^a D_\xi^b\Phi(x,t;\xi,\tau)|\leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+2p-1+|a|+|b|)/2p}}$$

$$\times\exp\left\{-b_3\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\},$$

$$\text{(6.11)}\qquad |D_\xi^b\Phi(\xi+z,t;\xi,\tau)|\leqslant \frac{\text{const.}}{(t-\tau)^{(n+2p-1)/2p}}$$

$$\times\exp\left\{-b_3\left(\frac{|z|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}.$$

如果利用 (3.15) 和 (6.10)，(6.11)，我们就可以用上面处理 $K_2(x,t;\xi,\tau)$的方法处理(4.4)右边的那个积分．若以 $I(x,t;\xi,\tau)$ 记之，于是我们就得到 $D_x^{m+a}D_\xi^b I$ 是连续函数

$$(0\leqslant|a|+|b|\leqslant r,\ 0\leqslant|m|<2p),$$

并且当以 I 代 Γ 时，不等式 (6.1)，(6.2) 仍有效．利用(3.15)和 Γ 的定义 (4.4)，就得出定理 7 的证明．

因为

$$\text{(6.12)}\qquad \frac{\partial\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial t}=P(x,t,D_x)\Gamma(x,t;\xi,\tau),$$

所以从定理 7 我们可以断定，如果 (1.6) 的系数关于 (x,t) 充分

光滑，则 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 关于 $(x, t; \xi)$ 也充分光滑．从定理 5 我们也可以推出 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 关于 τ 的光滑性．特别地，我们有下面定理．

定理 8 如果在 $\Omega = R^n \times [0, T]$ 中一致抛物组 (1.6) 的系数在 Ω 内无穷可微，如果所有的导数都是有界函数，则 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 关于 $(x, t; \xi, \tau)$ 是无穷可微的，并且对所有非负整数 a, b, c, d 有

$$(6.13) \quad |D_x^a D_\xi^b D_t^c D_\tau^d \Gamma(x, t; \xi, \tau)| \leqslant c'(t-\tau)^{-(n+|a|+|b|+2pc+2pd)/2p} \times \exp\left\{-c\left(\frac{|x-\xi|^{2p}}{t-\tau}\right)^{1/(2p-1)}\right\}.$$

其中 c, c' 为依赖于 a, b, c, d 的正的常数．

如果有无穷可微系数的抛物组定义在柱体 $D_0 \times [0, T]$ 内，其中 D_0 为 R^n 的区域，如果 D 为 R^n 中有界区域 $(\overline{D} \subset D_0)$，那么我们可以在带形区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 中 $\overline{D} \times [0, T]$ 的某个邻域外修改抛物组的定义，使得新的抛物组满足定理 8 的假定．其证明类似于第三章第 7 节引理 1．应用定理 8 于修改后的抛物组，我们得到下面的定理．

定理 9 如果 (1.6) 为在柱体 $D_0 \times [0, T]$ 中有无穷可微系数的抛物组，D 为 R^n 中的有界区域且 $\overline{D} \subset D_0$，那么在 $\overline{D} \times [0, T]$ 上(1.6)的基本解 $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ 存在，它对于 $(x, t; \xi, \tau)$ 是无穷可微的，且 (6.2)，(6.13) 成立．

设在空间 (x, t) 的区域 G 内抛物组

$$(6.14) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, D_x)u + f(x, t)$$

的解为 $u(x, t)$，假定 $\Omega = \overline{D} \times [0, T]$ 为 G 的闭的有界子区域，并且 D 的边界 ∂D 充分光滑．

设 Green 恒等式 (5.13) 中的 v 为基本矩阵 $\Gamma^*(x, t; \xi, \tau)$ 的任一列，积分这个恒等式，我们就得到

$$(6.15) \quad u(\xi, \tau) = -\int_0^\tau \int_D (\Gamma^*(x, t; \xi, \tau))^\sim f(x, t)\,dx\,dt + I(\xi, \tau),$$

其中 $I(\xi,\tau)$ 是在 $t=0$ 和 $\partial D\times[0,\tau]$ 上所取的边界积分的和. 如果 P 的系数无穷可微,则据定理 5, 9,我们可以假定

$$(\Gamma^*(x,t;\xi,\tau))^{\sim}=\Gamma(\xi,\tau;x,t),$$

并可假定 Γ 为满足 (6.2), (6.13) 的无穷可微函数.

于是积分 $I(\xi,\tau)$ 对 $\xi\in D$, $0<\tau\leqslant T$ 是无穷可微的. 至于 (6.15) 右边第一个积分,我们把它写成如下形式

$$\begin{aligned}&\int_0^{\tau/2}\int_D\Gamma(\xi,\tau;x,t)f(x,t)dx\,dt\\&\quad+\int_{\tau/2}^{\tau}\int_D\Gamma(\xi,\tau;x,t)f(x,t)dx\,dt\\&=J_1(\xi,\tau)+J_2(\xi,\tau).\end{aligned}$$

$J_1(\xi,\tau)$ 显然是无穷可微的. 至于 J_2, 首先注意到,如果在 ∂D 的小邻域内我们对于 x 修改 $f(x,t)$ 的定义, 则对于从 ∂D 到 ξ 为有界的 ξ, $J_2(\xi,\tau)$的可微性不受影响. 于是,如果 $f(x,t)$ 在原区域 G 中是无穷可微函数, 我们就可以对 J_2 修改 f, 使得它仍旧是无穷可微的,且当 $x\notin D$ 时它恒为零. 在 $J_2(\xi,\tau)$ 中作代换 $x=\xi+z$,就得到

$$J_2(\xi,\tau)=\int_{\tau/2}^{\tau}\int_{R^n}\Gamma(\xi,\tau;\xi+z,t)f(\xi+z,t)dz\,dt.$$

利用 $m=0$ 的(6.2)就得出,(对任何 $|b|>0$) $D_\xi^bJ_2(\xi,\tau)$ 存在,且为连续函数.

于是我们证明了对任何 $|b|>0$, $D_\xi^bu(\xi,\tau)$ 存在且为连续函数. 从微分方程组 (6.14) 我们推出 $D_\tau D_\xi^bu$, $D_\tau^2D_\xi^bu$ 等等都存在, 并且都是连续函数. 于是我们证明了下面的定理.

定理 10 如果 (6.14) 为抛物组,它的系数在区域 G 内无穷可微, 则在 G 内 (6.14) 的每个解都是 G 内的无穷可微函数.

从定理 10 的证明我们推出:

推论 如果 (6.14) 为区域 G 内的抛物组, 如果 P 及其伴随算子 P^* 的系数在 G 内有对 x 的 r 阶连续导数 ($r\geqslant 1$), 且 f 在 G 内对 x 有 r 阶连续导数, 则 (6.14) 在 G 内的任何一个解对 x 有 $r+2p-1$ 阶连续导数.

事实上，在处理 J_2 时，首先关于 ξ 对它微分 $|m|$ 次 $(0\leqslant|m|\leqslant 2p-1)$，然后作代换 $x=\xi+z$ 即可.

如果 f 和 P, P^* 的系数关于 (x, t) 可微到某个阶，那么利用方程 (6.14) 和上面的推论，可以推出 $u(x, t)$ (关于 (x, t)) 具有相应阶的可微性.

在第三章里，我们证明了关于二阶抛物型方程的解的可微性定理，参见第 5 节定理 11. 该定理的证明基于第三章第 2 节定理 5 的内先验估计，现在倘若用第 2 节中所构造的常系数抛物组的基本解，代替热传导方程的基本解，我们就可以把定理 5 及其证明推广到任意阶的抛物组，其中距离函数 $d(P, Q)$ 由

$$d(P, Q)=[|x-x^0|^2+|t-t^0|^{1/p}]^{1/2} \quad (P=(x, t),\ Q=(x^0, t^0)) \tag{6.16}$$

定义. 利用已推广到抛物组的定理 5，于是第三章第 5 节定理 11 的证明，经过显而易见的修改后，可以推广到这种方程组，而且我们得到下面的结果

定理 11 设(1.6)为区域 G 内的抛物组，并且假定函数

$$D_t^m D_x^h f(x, t),\ D_t^m D_x^h A_k^{ij}(x, t), \quad (0\leqslant 2pm+|h|\leqslant r, 0\leqslant m\leqslant s) \tag{6.17}$$

对于某个 $r\geqslant 1, s\geqslant 0$，关于尺度(6.16)，在 G 内是 Hölder 连续的(指数为 α). 如果 u 为 (1.6) 在 G 内的解，$D_x^h u(0\leqslant|h|\leqslant 2p)$ 为 Hölder 连续函数 (指数为 α)，则函数

$$D_t^m D_x^h u \quad (0\leqslant 2pm+|h|\leqslant r+2p,\ 0\leqslant m\leqslant s+1) \tag{6.18}$$

存在，并且是 Hölder 连续的(指数为 α).

通过修改第三章第 5 节定理 13 的证明，也可以把定理 11 推广到非线性抛物组.

7. 椭圆型方程

考虑微分方程组

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{|k|\leqslant m} A_k^{ij}(x) D_x^k u_j=f_i(x) \qquad (i=1,\cdots,N), \tag{7.1}$$

并构成矩阵

$$(7.2) \qquad P(x, \xi) = \Big(\sum_{|k|=m} A_k^{ij}(x) \xi^k \Big).$$

如果对任何实矢量 $\xi \neq 0$,有 $\det P(x, \xi) \neq 0$,我们就说组(7.1)是椭圆型的或者说 (7.1) 是椭圆组. m 是方程组的阶. 如果方程组的系数是实的,则 m 必为偶数. 事实上,如果 m 是奇数,则根据 $\det P(x, -\xi) = -\det P(x, \xi)$ 得出,存在实矢量 $\xi^0 \neq 0$,使得

$$\det P(x, \xi^0) = 0.$$

为简单起见,现在考虑在区域 D 内的单个椭圆型方程

$$(7.3) \qquad Lu = \sum_{|k| \leqslant m} A_k(x) D_x^k u = f(x).$$

假定系数 $A_k(x)$ 属于 $C^{|k|}(D)$,因而 L 的伴随算子 L^* 存在. 于是我们有 Green 恒等式 (见 (5.13))

$$(7.4) \qquad v\, L\, u - u\, L^* v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} B_i[u, v],$$

其中 $B_i[u, v]$ 为关于 u, v 及其直到 $\leqslant m-1$ 阶导数的双线性式.

设 R 为有界区域且 $\bar{R} \subset D$,边界 ∂R 是充分光滑的. 在 R 上积分 (7.4),我们得到

$$(7.5) \qquad \int_R (vLu - uL^*v) dx = \int_{\partial R} B[u, v] ds_x,$$

其中 ds_x 是 ∂R 上的曲面元素,而 $B[u, v] = \Sigma \nu_i B_i[u, v]$, ν_i 是 ∂R 在 $x (x \in \partial R)$ 处外法线的第 i 个方向余弦.

D 中的基本解是对 $x \in D$, $z \in D$, $x \neq z$ 定义的有下列性质的函数 $K(x, z)$: 对 $C^m(D)$ 中每一个函数 $v(x)$ 和对于每一个具有充分光滑边界 ∂R 的区域 R,使得 $z \in R$, $\bar{R} \subset D$,有

$$(7.6) \qquad v(z) = \int_R K(x, z) L^* v(x) dx + \int_{\partial R} B[K(x, z), v(x)] ds_x.$$

我们说 $K(x, z)$ 在 $x = z$ 处有一个极点.

鉴于 (7.5),条件 (7.6) 和下面条件等价:

$$
(7.7)\qquad v(z)=\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{R_\epsilon} v(x)LK(x,z)dx + \int_{|x-z|=\epsilon} B[K(x,z),v(x)]ds_x^\epsilon\right\},
$$

其中 R_ε 是球心在 z,半径为 ϵ 的球关于 R 的余集，ds_x^ϵ 是该球边界上的曲面元素. 由此得出,对所有的 $x\in D$, $x\neq z$ 有 $LK(x,z)=0$。条件(7.7)意味着 $K(x,z)$ 在极点 $x=z$ 附近的某种性态.

在第五章第 6 节里对二阶椭圆型方程所定义的基本解也是现在定义意义下的基本解.

在构造椭圆型方程基本解时发生两点困难，它们在抛物情况下并未遇到. 第一个困难发生在构造常系数方程基本解时，我们不能应用先构造 K 的 Fourier 变换式,然后取 Fourier 逆变换的方法,因为一般说来,基本解在∞处是不可积的.

第二个困难发生在完成拟基本解方法后得到一个 Fredholm 型积分方程(比较第五章第 6 节)不一定有解. 不过,可以证明,如果区域 D 的直径充分小，则积分方程有解. 积分方程有解的另一种情形是 ∂D 和 L 的系数都充分光滑,且下列性质成立:

$Lu=0$ 在 D 内的每一个具有如下性质的解 u 恒为零: u 及其前 $m-1$ 阶导数在 ∂D 上为零. 即下列 Cauchy 问题只有零解:

$$
(7.8)\qquad \begin{aligned} &Lu=0 \quad (\text{在 } D \text{ 中}),\\ &\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}=0, 0\leqslant j\leqslant m-1 \quad (\text{在 } \partial D \text{ 上}), \end{aligned}
$$

其中 ν 为 ∂D 的法线.

于是,在上述两种情况下在 D 内都存在基本解.

我们叙述有关构造常系数方程基本解的某些结果. 当 L 的系数为常数时，因为 $K(x,z)$ 仅为 $(x-z)$ 的函数，所以我们写成 $K(x,z)=K(x-z)$. 令 $r=|x|$,我们有:

$$
(7.9)\quad K(x)=\begin{cases} A\left(\frac{x}{r},\ r\right)r^{m-n} & (n \text{ 为奇数}),\\ B\left(\frac{x}{r},\ r\right)r^{m-n}+C\left(\frac{x}{r},r\right)r^{m-n}\log r & (n \text{ 为偶数}), \end{cases}
$$

其中 $A(\xi, r)$, $B(\xi, r)$, $C(\xi, r)$都是$|\xi| = 1$, $r=0$ 的邻域内(ξ, τ)的解析函数，而 $C\left(\frac{x}{r}, r\right)r^{m-n}$ 是在 $x = 0$ 处解析的函数 $C(x)$。

如果(常系数)椭圆算子是齐次的(即，如果它和其主部相同)，则

$$
(7.10)\quad K(x) = \begin{cases} A\left(\frac{x}{r}\right) r^{m-n} & (n\ \text{为奇数，或}\ m < n), \\ B\left(\frac{x}{r}\right) r^{m-n} + C(x)\log r & \\ & (n\ \text{为偶数，且}\ m \geqslant n), \end{cases}
$$

其中 $A(\xi)$, $B(\xi)$ 是 $|\xi| = 1$ 邻域中的解析函数，而 $C(x)$ 是 $(m - n)$ 次多项式.

最后，我们指出，椭圆型方程的解的可微性问题，可以仿照抛物型方程的情形来处理，或者利用基本解，或者利用 Schauder 型内估计. 后一种方法可以证明，如果对某个整数 p 和 $0<\alpha<1$，方程的系数和 f 属于 $C^{p+\alpha}$，则 $Lu = f$ 的解属于 $C^{m+p+\alpha}$。这些结果对于椭圆型方程组也正确.

问　　题

1．试证明：在 (1.3) 和 (1.7) 中如果我们分别取 $0 \leqslant 2bk_0 + |k| \leqslant 2bn_h$ 和 $0 \leqslant |k| \leqslant 2p$，则两个行列式的根相同 (据 (1.5) 从 (1.1) 就得到 (1.6)).

［提示：当且仅当方程组 (1.1) ((1.6)) 的非平凡解

$$w_j = C_j \exp[\lambda t + i\xi \cdot x]\ (v_{jh} = C_{jh} \exp[\lambda t + i\xi \cdot x])$$

存在时，λ 是第一个 (第二个) 行列式的根. 证明如果 v_{jh} 是 (1.6) 的这样一个解，则 $w_j = C_{j1} \exp[\lambda t + i\xi \cdot x]$ 是 (1.1) 的解.］

2．设从(1.7)中的矩阵当 $\lambda = 0$ 且以$0 \leqslant |k| \leqslant 2p$ 代替 $|k| = 2p$ 时所得到的矩阵是 $P(\xi)$. 试证明：当且仅当对某两个正的常数 δ, C 和任意的实矢量 ξ，有

$$\max_j \operatorname{Re}\{\lambda_j(\xi)\} \leqslant -\delta|\xi|^{2p} + C$$

时，(1.6) 是抛物的，其中 $\lambda_j(\xi)$ 为 $P(\xi)$ 的根。

[提示：设 $P_0(\xi)$ 是当 $\lambda=0$ 时(1.7)中的矩阵。取 $\xi_0=\xi/|\xi|$，并写成

$$\det(P(\xi)-\lambda I)=|\xi|^{2NP}\det(P_0(\xi_0)+\epsilon(\xi)-\lambda^* I),$$

其中当 $|\xi|\to\infty$ 时，$\lambda^*=\lambda/|\xi|^{2p}$，$\epsilon(\xi)\to 0$。]

3．证明第 2 节引理 2.

$\left[\text{提示: } \rho(t)=\int_\tau^t \chi(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma \text{ 满足 } \rho'-\chi\rho\leqslant\chi\psi.\right]$

4．证明 (2.20)

[提示：两边满足 (2.2)，(2.3)。]

5．试证明对于每个 $p>1$，$q=p/(p-1)$，$\alpha>0$，$\beta>0$ 有

$$\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q},$$

并且当且仅当 $\beta=\alpha^{p-1}$ 时等号成立。

[提示：右边表示两个面积的和：一个由 $y=x^{p-1}$，$x=\alpha$，$y=0$ 所限定，而另一个由 $y=x^{p-1}$，$x=0$，$y=\beta$ 所限定。]

6．考虑常系数 $2p$ 阶抛物组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P(D_x)u,$$

它是齐次的（即 P 与其主部相同）。证明第 2 节中所构造的基本解 $Z(x,t;\xi,\tau)=Z(x-\xi;t,\tau)$ 对所有 $-\infty<\tau<t<\infty$，$x\in R^n$，$\xi\in R^n$ 满足(2.5)（C_m，c_m 与 x，ξ，t，τ 无关）。

7．证明下面的（Liouville 型）定理：如果 u 是问题 6 中抛物组在 $-\infty<t<0$ 中的解，且对于某个 $\beta\geqslant 0$，$\gamma\geqslant 0$，如果

$$|u(x,t)|\leqslant \text{const.}(1+|t|)^\beta(1+|x|)^\gamma \qquad (-\infty<t<0,\ x\in R^n),$$

那么 $u(x,t)$ 为关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的次数 $\leqslant[\gamma]$，和关于 t 的次数 $\leqslant\min\{[\beta],[\gamma/2p]\}$ 的一个多项式。

[提示：把 u 表示为类似于 $f\equiv 0$ 的 (4.3.7)，而 G 为问题 6 的基本解。（象紧接着 (4.3.7) 估计 $D_x^i J$ 那样）证明

$$|D_t^i D_x^j u(p)|\leqslant K d^{-2pi-j}\,\underset{N}{\text{l.u.b.}}|u|,$$

并取 $d\to\infty$。]

8．证明 $K(x)=r^{2p-n}(A_{pn}\log r+B_{pn})$ 是 p- 调和方程 $\Delta^p u=0$ 的基本解

$$\left(\text{其中}\ \Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2\right).$$

这里 $r = |x|$，A_{pn}，B_{pn} 为常数，且当 $2p < n$ 或 n 为奇数时 $A_{pn} = 0$，而当 $2p \geqslant n$ 且 n 为偶数时 $B_{pn} = 0$。

第 十 章

任意阶椭圆型和抛物型方程的边值问题

引言 在这一章里我们考虑任意 $2m$ 阶“强椭圆”算子的 Dirichlet 问题,即求强椭圆方程

$$(0.1) \qquad Lu = f \qquad (\text{在 } D \subset R^n \text{ 内})$$

的解,使满足边界条件

$$(0.2) \qquad \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \varphi_j \qquad (j = 0, 1, \cdots, m-1)\ (\text{在 } \partial D \text{ 上}),$$

其中 ν 是边界 ∂D 的法线. 我们认为 D 是有界的. 主要结果是:或者齐次问题 ($f = 0$, $\varphi_i = 0$) 有唯一解 (解为 $u = 0$),于是问题 (0.1), (0.2) 对任何 f, φ_j 也有唯一解;或者齐次问题有非零解,于是问题 (0.1), (0.2) 仅对满足若干“正交”关系的 f 和 φ_j 有解.

另外我们把强椭圆型方程的这一结果和其他结果用于解抛物型方程在柱体中的第一初值边值问题,即求抛物型方程

$$(0.3) \qquad Lu - \frac{\partial u}{\partial t} = f \qquad (\text{在 } D \times (0, T] \text{内})$$

的解,使满足初始条件

$$(0.4) \qquad u(x, 0) = \phi(x) \qquad (x \in D)$$

和满足边界条件

$$(0.5) \qquad \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \varphi_j \qquad (j = 0, 1, \cdots, m-1)$$

$$(x \in \partial D,\ 0 < t \leqslant T),$$

其中 f, φ_j 和 (在 (0.3), (0.5) 中) L 的系数都是 (x, t) 的函数.

解 (0.1), (0.2) 的方法与前几章中解边值问题所用的方法完全不同. 可以把它概括如下: (a) 形成“广义” Dirichlet 问题,然

后通过 Hilbert 空间中泛函的表示定理求解，把问题化为表示定理，是通过某种不等式来实现.(b) 证明"广义"解在D内是充分光滑的(只要f和L的系数,以及数据充分光滑),以便在通常意义下它满足(0.1). (c) 证明"广义"解在边界附近是充分光滑的,以便在通常意义下它也满足 (0.2).

在详细叙述上述各项时,最有用的是弱导数,强导数和平滑算子 (mollifiers) 的概念. 在第 1 节里引进这些概念. 在第 2 节给出某些一般的微分不等式. 在第 3，4，5 节里分别给出 (a)，(b)，(c) 的证明. 在第 6 节里将在 Hilbert 空间中建立形如

$$dx/dt + A(t)x = f(t)$$

的方程的存在定理，在第 7 节里我们把这一定理和椭圆型方程的结果用于解问题 (0.3)—(0.5). 在第 8 节我们叙述高阶抛物型方程解的若干性质.

1. 弱导数和强导数. 平滑算子

在整个这一章里D总是表示 R^n 中的有界区域，∂D 是它的边界. $L^2(D)$ (或简单地 L^2) 是范数为

$$|u|_0^D = \left\{\int_D |u(x)|^2 dx\right\}^{1/2}$$

而纯量积为

$$(u, v)_0^D = \int_D u(x)\overline{v(x)}dx$$

的D内所有复值可测函数 $u(x)$ 所组成的 Hilbert 空间. 我们以 $C^m(D)$ $(0 \leqslant m \leqslant \infty)$ 记在D内有m阶连续导数的所有函数的集合，$C^m(\overline{D})$ 记所有其前m阶导数在D内一致连续的函数的集合(因此可以被看作在 ∂D 上也由连续性来定义)，而以 $C_c^m(D)$ 记在D内有紧支集的那些 $C^m(D)$ 的函数. 我们定义

$$C_c^m(\overline{D}) = C_c^m(D).$$

如果 $u \in C^j(D)$,则对于任何 $\varphi \in C_c^\infty(D)$, $|\alpha| \leqslant j$,而 $v(x) = D^\alpha u(x)$ 有

$$(1.1) \qquad \int_D u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_D v(x) \varphi(x) dx,$$

其中 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \partial/\partial x_i$, $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. 公式(1.1)引起下面的定义.

定义 设对于D的任何紧子区域A, u, v属于$L^2(A)$. 如果对任何$\varphi \in C_c^\infty(D)$, (1.1)成立,我们就说$v$是$u$的$\alpha$阶**弱导数**,并写成$D^\alpha u = v(\text{w.d.})$.

如果 $D^\alpha u = v$ (w. d.), 且 $D^\alpha u = w$ (w. d.), 则对任何 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 有 $\int (v - w)\varphi\, dx = 0$, 因此 $v = w$ (即几乎处处 $v(x) = w(x)$). 我们断定任何α阶弱导数被唯一定义. 特别地, $D^\alpha 0 = 0(\text{w.d.})$.

设 $\hat{C}^j(D)$ $(0 \leqslant j < \infty)$ 为一切有有限范数

$$|u|_j^D = \left\{\sum_{|\alpha|\leqslant j} \int_D |D^\alpha u(x)|^2 dx\right\}^{1/2} \tag{1.2}$$

的函数$u(x)$所成的$C^j(D)$的子集. $\hat{C}^j(D)$是纯量积为

$$(u, v)_j^D = \sum_{|\alpha|\leqslant j} \int_D D^\alpha u(x) D^\alpha \overline{v(x)}\, dx \tag{1.3}$$

的纯量积空间(或预 Hilbert 空间 (Pre-Hilbert space)).

当不致混乱时,我们将省略上标"D".

我们以$H^j(D)$,或简单地以H^j记$\hat{C}^j(D)$的(关于范数(1.2)的)完备化空间.$\{u_m\}$为 $\hat{C}^j(D)$ 中的 Cauchy 序列,当且仅当对任何 $\alpha(0 \leqslant |\alpha| \leqslant j)$, 当 m, $k \to \infty$ 时,

$$\int_D |D^\alpha u_m(x) - D^\alpha u_k(x)|^2 dx \to 0. \tag{1.4}$$

因为$L^2(D)$是完备空间,所以存在函数$u^\alpha \in L^2(D)$,使得当$m \to \infty$时

$$\int_D |D^\alpha u_m(x) - u^\alpha(x)|^2 dx \to 0. \tag{1.5}$$

因为当且仅当 $\hat{C}^j(D)$ 中的两个 Cauchy 序列是等价的 Cauchy 序列时,它们才对于$0 \leqslant |\alpha| \leqslant j$确定 $L^2(D)$ 的同一元素 u^α,所以我们可以认为H^j的元素就是以上述方法所得到的矢量

$$\{u^\alpha;\ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant j\},$$

引理 1　如果 $\{u^\alpha;\ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant j\}$ 属于 H^j，则

$$u^\alpha = D^\alpha u^0 (\text{w.d.}).$$

证明　设 $\{u_m\}$ 是 $\hat{C}^j(D)$ 中的 Cauchy 序列，使得对于 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant j$，(1.5) 成立．利用 Schwarz 不等式容易证明，对任何 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 有

$$(1.6)\qquad \int_D D^\alpha u_m(x)\varphi(x)dx \to \int_D u^\alpha(x)\varphi(x)dx,$$

$$(1.7)\qquad \int_D u_m(x)D^\alpha\varphi(x)dx \to \int_D u^0(x)D^\alpha\varphi(x)dx.$$

由分部积分法，有

$$\int_D u_m(x)D^\alpha\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_D D^\alpha u_m(x)\varphi(x)dx.$$

在上面的等式中让 $m \to \infty$，并利用 (1.6)，(1.7)，我们就得到 $u = u^0$，$v = u^\alpha$ 的关系式(1.1)．因此 $D^\alpha u^0 = u^\alpha(\text{w.d.})$．

推论 1　矢量 $\{u^\alpha;\ 0 \leqslant |\alpha| \leqslant j\}$ 由其分量 u^0 唯一确定．

事实上，我们必须证明若 $u^0 = 0$，则 $u^\alpha = 0$．可是，从引理 1 和关系式 $D^\alpha 0 = 0(\text{w.d.})$ 就可推出这一结论．

从这个推论得出，可以认为 $H^j(D)$ 的元素就是 $L^2(D)$ 的某个线性子空间的元素，即

推论 2　$L^2(D)$ 的元素 u 属于 $H^j(D)$，当且仅当在 $\hat{C}^j(D)$ 中存在 Cauchy 序列 $\{u_m\}$，使得 $u_m \to u \in L^2(D)$．

今后我们将假定 $H^j(D)$ 就是 $L^2(D)$ 的线性子空间．

定义　如果对于 D 的任何紧子区域 A，$u \in H^j(A)$，我们就说 u 在 D 内有直到 j 阶的强导数，或者说 u 在 D 内有 j 阶强导数．

于是，对 D 的每一紧子区域 A，都存在 $\hat{C}^j(A)$ 中的序列 $\{u_m\}$，使得 $|u_m - u|_0^A \to 0$，且使得对某个 $u^\alpha \in L^2(A)$ $(0 < |\alpha| \leqslant j)$ 有 $|D^\alpha u_m - u^\alpha|_0^A \to 0$．从推论 1 可知，$u^\alpha$ 与 A 无关．我们称 u^α 为 u 在 D 内的 α 阶强导数，并记作 $D^\alpha u = u^\alpha(\text{s.d.})$．据引理 1，$u^\alpha$ 也是 u 的 α 阶弱导数．于是，强导数也是弱导数．

如果 $u \in C^j(D)$，则（通常的）导数 $D^\alpha u (0 \leqslant |\alpha| \leqslant j)$ 也是 u

在D内的α阶强导数.

定义 在范数(1.2)之下，空间$C_c^\infty(D)$的完备化空间记作$\mathring{H}^j(D)$，或简单地记作$\mathring{H}^j$.

我们认为$\mathring{H}^j$就是H^j的线性子空间. 注意，$H^0=\mathring{H}^0=L^2$. 对于$j=0$，我们常用记号

$$|u|=|u|_0, \qquad (u,v)=(u,v)_0.$$

现在关于 Hilbert 空间中的收敛性我们作几点附注. 在有纯量积$(,)$的 Hilbert 空间中，我们说序列$\{u_m\}$弱收敛(于u)，如果对任何$f\in H$，序列$\{(u_m,f)\}$收敛(于(u,f)). 弱收敛序列是有界的. 从H的任何有界序列$\{u_m\}$中可以取出一个弱收敛的子序列. 如果$\{u_m\}$弱收敛于u，则存在一个子序列$\{u_{m'}\}$，它的算术平均序列按H的范数收敛于u(见问题1).

引理2 设$u\in L^2(D)$，并假定存在$C^j(D)$的序列$\{u_m\}$使得

(a) $\{u_m\}$弱收敛于$L^2(D)$中的u，且

(b) $|u_m|_j^D\leqslant$常数(与m无关).

则$u\in H^j(D)$，且对任何$0\leqslant|\alpha|\leqslant j$，强导数$D^\alpha u$是$\{D^\alpha u_m\}$(在$L^2(D)$中)的弱极限.

证明 由于(b)，我们可以选取在$H^j(D)$中弱收敛的子序列$\{u_{m'}\}$. 选取$\{u_{m'}\}$的子序列$\{u_{m''}\}$，其算术平均序列$v_{m''}$在$H^j(D)$中收敛. 据(a)，因为这些算术平均序列$v_{m''}$也弱收敛于$u\in L^2(D)$，所以$|v_{m''}-u|_0^D\to 0$. 从引理1的推论2得出$u\in H^j(D)$.

其次，对任何$\varphi\in C_c^\infty(D)$，我们有

$$\int_D D^\alpha u_m\cdot\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_D u_m D^\alpha\varphi dx$$

$$\to(-1)^{|\alpha|}\int_D uD^\alpha\varphi dx=\int_D u^\alpha\varphi dx,$$

其中$u^\alpha=D^\alpha u$(s.d.). 因为$C_c^\infty(D)$在$L^2(D)$中稠密，(利用(b))我们容易得到，对于任何$f\in L^2(D)$，

$$\int_D D^\alpha u_m f dx \to \int_D u^\alpha f dx,$$

即 $D^\alpha u_m$ 在 $L^2(D)$ 中弱收敛于 u^α.

现在，我们引进光滑算子，或者平滑算子，它在研究强导数中是十分有用的工具.

定义 设 $\rho(x)$ 为 R^n 中的 C^∞ 函数，它满足下列性质(关于 ρ 的构造，见第一章问题 1.):

(1) $\rho(x) = 0 \qquad (|x| \geqslant 1)$,

(2) $\rho(x) \geqslant 0 \qquad (|x| \leqslant 1)$,

(3) $\int_{R^n} \rho(x) dx = 1$.

对于任何 $\varepsilon > 0$，算子

$$(J_\varepsilon u)(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|y-x|<\varepsilon} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \tag{1.8}$$

称为 u 的平滑算子. 函数 u 定义在 D 上，而平滑算子仅在 D 的紧子区域 A 上考虑，取 ε 小于 ε_0，其中 ε_0 为从 A 到 D 的边界 ∂D 的距离. 因为当 $x \in A$, $|y-x| < \varepsilon$ 时，$y \in D$，于是 (1.8) 中的积分完全有定义. 而且

$$(J_\varepsilon u)(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_D \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy. \tag{1.9}$$

如果 $u \in L^2(D)$，则 $J_\varepsilon u$ 属于 $C^\infty(A)$. 如果 u 属于 $C^m(D)$，且 $|\alpha| \leqslant m$，则容易验证

$$D^\alpha(J_\varepsilon u) = J_\varepsilon(D^\alpha u). \tag{1.10}$$

引理 3 如果 $u \in L^2(D)$，则

$$|J_\varepsilon u|_0^A \leqslant |u|_0^D, \tag{1.11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |J_\varepsilon u - u|_0^A = 0. \tag{1.12}$$

证明 (1.11) 的证明是简单的:

$$(|J_\varepsilon u|_0^A)^2 = \int_A \left|\frac{1}{\varepsilon^n}\int_D \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy\right|^2 dx$$

$$\leqslant \int_A \left\{\left[\frac{1}{\varepsilon^n}\int_D \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy\right]\right.$$

$$\times\left[\frac{1}{\varepsilon^n}\int_D\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)|u(y)|^2dy\right]\Bigg\}dx$$

$$=\int_D|u(y)|^2\left[\frac{1}{\varepsilon^n}\int_A\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dx\right]dy$$

$$\leqslant\int_D|u(y)|^2dy=(|u|_0^D)^2.$$

为了证明(1.12)，首先考虑 u 在 D 内连续的情形. 写成

$$(J_\varepsilon u)(x)-u(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_D\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)[u(y)-u(x)]dy$$

令 $\delta(\varepsilon)=\text{l.u.b.}|u(x)-u(y)|$，其中 x 在 A 中变化，y 在 D 中变化，且 $|y-x|\leqslant\varepsilon$，我们有

$$|(J_\varepsilon u)(x)-u(x)|\leqslant\delta(\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon^n}\int_D\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy=\delta(\varepsilon).$$

因此，当 $\varepsilon\to0$ 时

$$\int_A|J_\varepsilon u-u|^2dx\to0.$$

为了在仅假定 u 属于 $L^2(D)$ 的情形证明(1.12)，设 v 是 D 内的连续函数，使得 $|u-v|_0^D<\delta$，其中 δ 为任意给定的正数. 写成

$$J_\varepsilon u-u=J_\varepsilon(u-v)+(J_\varepsilon v-v)+(v-u)$$

并注意到，据(1.11)有 $|J_\varepsilon(u-v)|_0^A\leqslant\delta$，我们得到

$$|J_\varepsilon u-u|_0^A\leqslant2\delta+|J_\varepsilon v-v|_0^A.$$

因为对于连续函数已证明(1.12)，所以当 ε 充分小时，我们得到 $|J_\varepsilon u-u|_0^A\leqslant3\delta$，由此(1.12)证毕.

引理 4 如果 u 是 j 次强可微的，并且它的 j 阶导数是 k 次强可微的，则 u 有 $j+k$ 阶强导数.

证明 取 D 的子区域 A，B，且 $\bar{A}\subset B\subset\bar{B}\subset D$，并设 ε_0 为从 $\bar{A}$ 到 B 的边界的距离. 因为 u 属于 $L^2(B)$，于是如 $\varepsilon<\varepsilon_0$，则 $J_\varepsilon u$ 在 A 上有定义，且据引理 3 当 $\varepsilon\to0$ 时，$|J_\varepsilon u-u|_0^A\to0$. 鉴于引理 2，剩下要证明

(1.13) $$|J_\varepsilon u|_{j+k}^A\leqslant\text{常数(与 }\varepsilon\text{ 无关)}.$$

如果$|\gamma|>j$，则$\gamma=\alpha+\beta$，其中$|\beta|=j$. 对任何$x\in A$，有

(1.14) $$(D^\gamma J_\varepsilon u)(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_B D_x^{\alpha+\beta}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)dy$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_B D_x^\alpha\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)D^\beta u(y)dy$$

在上面等式中，我们利用了强导数$D^\beta u$的定义，以及对任何固定的$x\in A$，$D_x^\alpha\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$属于$C_c^\infty(B)$这个事实. 同样地我们得到(1.14)的右边等于

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\int_B\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)D^\alpha(D^\beta u(y))dy=[J_\varepsilon(D^\alpha(D^\beta u))](x).$$

于是，我们证明了

(1.15) $$D^\gamma(J_\varepsilon u)=J_\varepsilon(D^\alpha(D^\beta u)).$$

从(1.15)和(1.11)我们得到

$$|D^\gamma(J_\varepsilon u)|_0^A\leqslant|D^\alpha(D^\beta u)|_0^B<\infty.$$

如果$|\gamma|\leqslant j$，则由上面有关推理部分我们得到

$$D^\gamma(J_\varepsilon u)=J_\varepsilon(D^\gamma u),$$

利用(1.11)我们得到

$$|D^\gamma(J_\varepsilon u)|_0^A\leqslant|D^\gamma u|_0^B<\infty.$$

由此(1.13)证毕.

附注 1 由引理 2，因为$\{D^\gamma J_\varepsilon\}$在$L^2(A)$中弱收敛于强导数$D^\gamma u$，又据(1.12)，因为$J_\varepsilon(D^\alpha(D^\beta u))$按$L^2(A)$的范数趋于$D^\alpha(D^\beta u)$，所以从(1.15)得出

(1.16) $$D^{\alpha+\beta}u=D^\alpha(D^\beta u)\qquad(s.d.).$$

附注 2 证明(1.14)中第二个等式成立所用的论据表明，如果仅假定u有α阶弱导数，则(1.10)也成立.

对于任何$\varphi\in C_0^1(D)$，$u\in C^1(D)$成立的关系式

(1.17) $$\int_D Du\varphi dx=-\int_D uD\varphi dx,$$

当仅假定 u 在 D 内有一阶强导数时，也成立. 通过完备化，即取 $C^1(A)$ 中按 $H^1(A)$ 的范数收敛于 u 的函数序列 $\{u_m\}$，对每一 u_m 写下关系式 (1.17)，然后让 $m\to\infty$ 就可推出这一结论. 这里 A 为包含 φ 的支集的任意区域，并且 $\bar{A}\subset D$.

于是我们对仅有强导数的函数 u 建立了分部积分的标准规则 (1.17). 也可用上面的理由把其他的微积分标准规则推广到有强导数的函数上.

单位分解 设 $D_1,\cdots,D_N$ 是 D 的开子集，使得

$$D=\bigcup_{i=1}^{N} D_i$$

(我们说 D_i 构成 D 的开覆盖). 则存在函数 φ_i 使得:

(1) $\varphi_i\in C_c^\infty(R^n)$ 和 (φ_i 的支集) $\cap D\subset D_i$,

(2) $\varphi_i\geqslant 0$,

(3) 在 D 中 $\sum\varphi_i=1$.

我们说 φ_i 构成从属于开覆盖 $\{D_i\}$ 的单位分解. 关于证明，例如见 [44; 45—47].

引理 5 设 $D_1,\cdots,D_N$ 是 D 的子区域，

$$D=\bigcup_{i=1}^{N} D_i.$$

如果对于每个 i，函数 u 属于 $H^j(D_i)$，则 u 属于 $H^j(D)$.

证明 设 $\{\varphi_i\}$ 是从属于覆盖 $\{D_i\}$ 的单位分解. 因为 $u\in H^j(D_i)$，所以存在 $H^j(D_i)$ 的序列 $\{u_{i,m}\}$，使得当 $m,k\to\infty$ 时

(1.18) $\quad |u_{i,m}-u_{i,k}|_j^{D_i}\to 0,\ |u_{i,m}\to u|_0^{D_i}\to 0.$

令 $u_m=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i u_{i,m}$，我们有

$$D^\alpha u_m-D^\alpha u_k=\sum_{i=1}^{N}D^\alpha[\varphi_i(u_{i,m}-u_{i,k})].$$

利用 Leibniz 规则展开右边，然后应用 (1.18) 我们得到，当 $m,k\to\infty$ 时有

$$|D^\alpha u_m - D^\alpha u_k|_0^D \leqslant \text{const.} \sum_{i=1}^{N} \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|} |D^\beta u_{i,m} - D^\beta u_{i,k}|_0^{D_i} \to 0,$$

其中 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant j$. 因为当 $m \to \infty$ 时有

$$|u_m - u|_0^D = \left|\sum_{i=1}^{N} \varphi_i (u_{i,m} - u)\right|_0^D$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} |u_{i,m} - u|_0^{D_i} \to 0,$$

由此推出 $u \in H^j(D)$.

引理 5 表明，强导数的概念是一个局部的概念(虽然它并不是一个点状的概念). 于是:

推论 如果对于每点 $x \in D$，存在一个邻域，使 u 在其中有 j 阶强导数，则 u 在 D 内有 j 阶强导数.

引理 6 设 D 是一个有界区域，其边界由两个不相交的集合 Γ_1 和 Γ_2 组成，其中 Γ_2 是超平面 $x_n = c$ 上的开区域. 如果 u 在 D 内有 j 阶连续的强导数，并且它的所有不超过 j 阶的强导数都属于 $L^2(D)$，则对于任何 D 的子区域 $A(\bar{A} \subset D + \Gamma_2)$，$u$ 属于 $H^j(A)$.

证明 设 B 为 D 的一个子区域，其闭包在 $D + \Gamma_2$ 中，使得 $A \subset B$，又设 B 的边界由两个不相交的集合 ∂B_1 和 ∂B_2 组成，其中 ∂B_2 是 $x_n = c$ 上的一个开集. 类似地，我们可以假定 A 的边界分解为两个不相交的集合 ∂A_1 和 ∂A_2，∂A_2 是 $x_n = c$ 上的一个开集. 我们取区域 B，使得 $\overline{\partial A_2} \subset \partial B_2$ 且 $\overline{\partial A_1} \cap \overline{\partial B_1} = \varnothing$. 最后，我们可以假定 B 在半空间 $x_n > c$ 中

现在我们定义平滑算子，与 (1.8)、(1.9) 比较是略微不同的，即

$$(1.19) \qquad (J'_\varepsilon u)(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_D \rho\left(\frac{x_\varepsilon - y}{\varepsilon}\right) u(y) dy$$

其中当 $x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ 时 $x_\varepsilon = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n + 2\varepsilon)$. 且 $0 < 3\varepsilon < \varepsilon_0$，$\varepsilon_0$ 为从 ∂A_1 到 ∂B_1 的距离.

对引理 3 的证明作一些明显的修改，我们就发现，如果

$u \in L^2(B)$，则

(1.20) $$|J'_\varepsilon u|_0^A \leqslant |u|_0^B,$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时

(1.21) $$|J'_\varepsilon u - u|_0^A \to 0.$$

因为对于任何固定的 $x \in A$，$\rho((x_\varepsilon - y)/\varepsilon)$ 属于 $C_c^\infty(B)$，所以对于任何 $0 \leqslant |\alpha| \leqslant j$，我们得到

(1.22) $$\begin{aligned}(D^\alpha J'_\varepsilon u)(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_D D_x^\alpha \rho\left(\frac{x_\varepsilon - y}{\varepsilon}\right)u(y)dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_D \rho\left(\frac{x_\varepsilon - y}{\varepsilon}\right)D^\alpha u(y)dy \\ &= (J'_\varepsilon(D^\alpha u)(x).\end{aligned}$$

因为强导数 $D^\alpha u$ 属于 $L^2(D)$,所以运用性质(1.21)，从(1.22)我们断定,当 $\varepsilon \to 0$ 时，

$$|D^\alpha(J'_\varepsilon u) - D^\alpha u|_0^A \to 0.$$

因此，$u \in H^j(A)$.

我们回顾所谓 ∂D 属于 C^j 是指可以用有限个开集 N_k 覆盖 ∂D,使得每一个集合 $N_k \cap \partial D$ 都可表为(3.8.6)的形式,并且 $h \in C^j$ (见第三章第 8 节).

定理 1 设 ∂D 是 $C^j(j \geqslant 1)$ 类的. 如果 u 在 D 内有 j 阶强导数,并且它的所有强导数 $D^\alpha u(0 \leqslant |\alpha| \leqslant j)$ 属于 $L^2(D)$，则 u 属于 $H^j(D)$.

注意,逆定理自明,即如果 $u \in H^j(D)$,则 u 的所有前 j 阶强导数存在,且属于 $L^2(D)$.

证明 鉴于引理 5，只要证明每一点 $x^0 \in \partial D$ 有邻域 N_0，使得 u 属于 $H^j(N_0 \cap D)$就够了. 对 x^0 的某个邻域 N,我们可以假定 $N \cap \partial D$ 可表为如下形式:

$$x_n = h(x_1, \cdots, x_{n-1}),$$

其中 $h \in C^j$，并且 $N \cap D$ 落在 $x_n > h(x_1, \cdots, x_{n-1})$ 那一侧. 作变换

(1.23) $$y_i = x_i \qquad (i = 1, \cdots, n-1),$$

$$y_n = x_n - h(x_1, \cdots, x_{n-1}) \text{ 或 } x_n = y_n + h(y_1, \cdots, y_{n-1}).$$

如果 $V(y) = v(x)$，其中 $v \in C^1$，则

$$(1.24) \qquad \frac{\partial V}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}.$$

由此得出，$\sum|\partial v(x)/\partial x_i|$ 的 L^2 范数上有界，且以 $\sum|\partial V(y)/\partial y_i|$ 的 L^2 范数的正的常数倍为下界．因此，当且仅当 $\{\partial V_m/\partial y_i\}$ $(i=1, \cdots, n)$ 为 L^2 的 Cauchy 序列时，$\{\partial v_m/\partial x_i\}$ $(i=1, \cdots, n)$ 为 L^2 中的 Cauchy 序列．由此得出，当且仅当 $V(y)$ 有一阶强导数时（属于 $H^1(M^*)$，其中 M^* 是 $N \cap D$ 在 y 空间的象），$v(x)$ 有一阶强导数（属于 $H^1(N \cap D)$）．而且 (1.24) 式对强导数（通过完备化）也成立．

上述附注对于所有不超过 j 阶的强导数也成立．因此，如果我们证得 $U(y) = u(x)$ 属于 $H^j(M^{**})$，就可得出对 x^0 的某个邻域 N_0，$u(x)$ 属于 $H^j(N_0 \cap D)$，其中 M^{**} 与 M^* 相关，就如同在引理 6 的证明中区域 A 与区域 B 相关一样．从引理 6 得出 $U \in H^j(M^{**})$．

2. 微分不等式

引理 7　对任何 $\varepsilon > 0$ 和任何整数 $j > 0$，存在常数 $C = C(\varepsilon, j)$ 使不等式

$$(2.1) \qquad |u|_{j-1}^2 \leqslant \varepsilon |u|_j^2 + C|u|_0^2$$

对任何 $u \in \mathring{H}^j(D)$ 成立．

注意，C 与 D 无关．

证明　首先考虑 $u \in C_c^\infty(D)$ 的情形．设 $\tilde{u}$ 为 u 的 Fourier 变换，即

$$\tilde{u}(\xi) = \int_{R^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\,dx.$$

于是

$$(2.2) \qquad \widetilde{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \tilde{u}(\xi).$$

据 Plancherel 定理，如果 $v \in L^2(R^n)$，则 $\tilde{v} \in L^2(R^n)$，并且

$$(2.3) \qquad \int_{R^n} |\tilde{v}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n \int_{R^n} |v(x)|^2 dx.$$

因此，利用 (2.2) 我们得到

$$(2.4)\qquad (2\pi)^n\int_{R^n}|D^\alpha u(x)|^2dx=\int_{R^n}|\xi^\alpha|^2|\tilde{u}(\xi)|^2d\xi.$$

由此得出

$$(2.5)\qquad \begin{aligned}|u|_{j-1}^2&=(2\pi)^{-n}\sum_{|\alpha|\leqslant j-1}\int_{R^n}|\xi^\alpha|^2|\tilde{u}(\xi)|^2d\xi,\\ |u|_j^2&=(2\pi)^{-n}\sum_{|\alpha|\leqslant j}\int_{R^n}|\xi^\alpha|^2|\tilde{u}(\xi)|^2d\xi.\end{aligned}$$

因为对任何 $\varepsilon>0$ 以及所有 $\xi\in R^n$ 和某个仅依赖于 ε, j 的常数 C，有

$$\sum_{|\alpha|\leqslant j-1}|\xi^\alpha|^2\leqslant\varepsilon\sum_{|\alpha|\leqslant j}|\xi^\alpha|^2+C,$$

所以从 (2.5) 我们得到

$$|u|_{j-1}^2\leqslant\varepsilon|u|_j^2+(2\pi)^{-n}C\int_{R^n}|\tilde{u}(\xi)|^2d\xi.$$

由 (2.3)，因为最后的积分等于 $(2\pi)^n|u|_0^2$，所以推出 (2.1).

对 $C_c^\infty(D)$ 中的函数 u 已证明了 (2.1)，现在通过完备化我们可以对任意的 $u\in\mathring{H}^j(D)$ 证明 (2.1)，即在 $C_c^\infty(D)$ 中取收敛于 $u\in\mathring{H}^j(D)$ 的序列 $\{u_m\}$，把(2.1)应用于每一个 u_m，然后令 $m\to\infty$ 即可.

在下一引理中我们把不等式 (2.1) 推广到 $H^j(D)$ 的函数.

引理 8 假定 ∂D 是 C^2 类的，对任何 ε 和任何整数 $j>0$ 存在常数 $C=C(\varepsilon,j,D)$，使不等式(2.1)对任何 $u\in H^j(D)$ 成立.

证明 只需对 $\hat{C}^j(D)$ 中的函数 u 证明(2.1)就够了，因为对于任何 $u\in H^j(D)$ 的证明可以通过完备化得到. (1.1)是下面不等式的推论:

$$(2.6)\qquad \sum_{|\alpha|=i}\int_D|D^\alpha u|^2dx\leqslant\varepsilon\sum_{|\beta|=j}\int_D|D^\beta u|^2dx+\frac{C(j,D)}{\varepsilon^{i/(j-i)}}\int_D|u|^2dx.\quad(i<j),$$

其中 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，而 ε_0, $C(j,D)$ 仅依赖于 j 和 D.

我们首先对 $i=1$, $j=2$, $n=1$ 和 $0<\varepsilon<4|D|^2$ 证明(2.6)，其中 $|D|$ 为区间 D 的长度．把 D 分为长度大于 $(\varepsilon/4)^{1/2}$ 而小于 $(\varepsilon/2)^{1/2}$ 的子区间(这里用了不等式 $\varepsilon<4|D|^2$)．对每一个这样的子区间 $a<x<b$，令 $\alpha=(b-a)/4$，并设 x_1, x_2 分别为区间 $a<x<a+\alpha$ 和 $a+3\alpha<x<b$ 中的变点．据中值定理，我们有

$$
(2.7)\qquad \frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}=Du(x_{12})\qquad (x_1<x_{12}<x_2).
$$

对任何 $x\in(a,b)$，写成

$$
Du(x)=Du(x_{12})+\int_{x_{12}}^{x}D^2u(\xi)d\xi
$$

并利用(2.7)我们得到

$$
|Du(x)|\leqslant\frac{|u(x_1)|+|u(x_2)|}{2\alpha}+\int_a^b|D^2u(\xi)|d\xi.
$$

在 x_1, x_2 各自的区间 $(a, a+\alpha)$, $(a+3\alpha, b)$ 中对 x_1, x_2 积分，我们得到

$$
\alpha^2|Du(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|u(\xi)|d\xi+\alpha^2\int_a^b|D^2u(\xi)|d\xi.
$$

取平方并用 Schwarz 不等式，我们得到

$$
|Du(x)|^2\leqslant\frac{2}{\alpha^3}\int_a^b|u(\xi)|^2d\xi+8\alpha\int_a^b|D^2(\xi)|^2d\xi.
$$

在区间 (a, b) 中对 x 积分，我们得到

$$
\begin{aligned}
\int_a^b|Du|^2dx&\leqslant 2(b-a)^2\int_a^b|D^2u|^2dx\\
&\quad+\frac{2^7}{(b-a)^2}\int_a^b|u|^2dx\leqslant\varepsilon\int_a^b|D^2u|^2dx\\
&\quad+\frac{2^9}{\varepsilon}\int_a^b|u|^2dx.
\end{aligned}
$$

在所有子区间上求和我们就推出

$$
(2.8)\qquad \int_D|Du|^2dx\leqslant\varepsilon\int_D|D^2u|^2dx+\frac{2^9}{\varepsilon}\int_D|u|^2dx.
$$

现在将对 $n>1, i=1, j=2$ 来证明 (2.6). 首先考虑 D 为各棱平行于坐标轴的立方体的情形. 令 $\partial u/\partial x_1 = Du$. 把 u 看作是以 $x_2, \cdots, x_n$ 为参数的 x_1 的函数，对参数 $x_2, \cdots, x_n$ 积分后应用 (2.8),我们就得到

$$\int_D |\partial u/\partial x_1|^2 dx$$

不超过 (2.6) 的右边. 因为对任何 $\partial u/\partial x_k$ 有类似的界，于是对 $i=1, j=2$ 我们得出 (2.6). 如果 D 不是立方体，那么我们可以用有限多个区域 Γ_λ, Δ_μ 覆盖 D，其中 Γ_λ 为棱平行于坐标轴的立方体，而各 Δ_μ 可通过一对一的变换 $y=y(x)$ 被映射到 y 空间中其边平行于坐标轴的立方体中,映射 $y=y(x)$ 及其逆映射有二阶连续导数. 对每一 Γ_λ (其中 $C(j, D)$ 仅依赖于 j) 和对于每一 Δ_μ (其中 $C(j, D)$ 依赖于 j 和 D) (2.6) 成立 ($i=1, j=2$). 对 λ, μ 求和，就得出对于 $i=1, j=2$ (和适当的 $C(j, D)$) 的不等式 (2.6).

现在我们将对所有的 i, j 来证明 (2.6)，用关于 j 的归纳法. 当 $j=1$ 时,我们已对 $i=1$ 证明了 (2.6)，而当 $i=0$ 时，不证自明. 假定对所有的 $j \leqslant k$, (2.6) 成立，我们对 $j=k+1$ 证明 (2.6)也成立. 我们采用记号

$$|D^m u|^2 = \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2.$$

如果 $i=k$,那么把 $i=1, j=2$ 的(2.6)应用于 u 的 $(k-1)$ 阶导数,则对于任何充分小的 ε，我们得到

$$\int_D |D^k u|^2 dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_D |D^{k+1} u|^2 dx + \frac{C_1}{\varepsilon} \int_D |D^{k-1} u|^2 dx$$

其中 C_m 记仅依赖于 k 和 D 的正的常数. 利用对于 $j=k$, $i=k-1$ 的归纳法假设，我们有

$$\int_D |D^{k-1} u|^2 dx \leqslant \delta \int_D |D^k u|^2 dx + \frac{C_2}{\delta^{k-1}} \int_D |u|^2 dx.$$

把它代入前面的不等式，并取 $\delta = \varepsilon/2C_1$ 我们就得到 $i=k$,

$j = k + 1$ 的(2.6).

如果 $i < k$，则据归纳法假定有

$$\int_D |D^i u|^2 dx \leqslant \delta \int_D |D^k u|^2 dx + \frac{C_3}{\delta^{i/(k-i)}} \int_D |u|^2 dx.$$

由 $i = k$, $j = k + 1$ 的 (2.6) 有

$$\int_D |D^k u|^2 dx \leqslant \mu \int_D |D^{k+1} u|^2 dx + \frac{C_4}{\mu^k} \int_D |u|^2 dx.$$

把最后这个不等式代到前面不等式，并取 $\delta = \varepsilon^{(k-i)/(k+1-i)}$, $\mu = \varepsilon^{1/(k+1-i)}$,我们就得到对于 $j = k + 1$ 的 (2.6).

在下面两条定理中，对任何 $i \geqslant [n/2] + 1$，借助于范数 $|u|_i$ 我们得到函数 u 的一致的界.

定理 2 (Sobolev 引理) 对 R^n 中任何有界区域 D 和 $\hat{C}^j(D)$中 $(j = [n/2] + 1)$ 任何函数 u 以及所有的 $y \in D$ 有

$$|u(y)|^2 \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant j} R^{2|\alpha|-n} \int_D |D^\alpha u(x)|^2 dx, \tag{2.9}$$

其中 R 为从 y 到 D 的边界的距离，而 C 是仅依赖于 n 的常数.

证明　设 $g(t)$ 为实变量 t 的这样一个属于 C^∞ 的函数，当 $t < \frac{1}{2}$ 时，$g(t) = 1$；而当 $t \geqslant 1$ 时，$g(t) = 0$. 函数 $h(t) = g(t/R)$ 满足

$$\left| \frac{d^k h(t)}{dt^k} \right| \leqslant \frac{A_k}{R^k}, \tag{2.10}$$

其中 A_k 为仅依赖于 g 和 k 的常数. 令 $r = |x - y|$，并注意到 $h(0) = 1$, $h(R) = 0$ 我们就得到

$$u(y) = -\int_0^R \frac{\partial}{\partial r} [h(r) u(x)] dr.$$

在以 y 为心的 $(n-1)$ 维单位球面 Ω 上积分，我们得到

$$\Omega_n u(y) = -\int_\Omega \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} (hu) dr d\Omega$$

$$\left(\Omega_n = \int_\Omega d\Omega \right).$$

关于 r 分部积分 $(j-1)$ 次我们得到

$$\Omega_n u(y)=\frac{(-1)^j}{(j-1)!}\int_{\Omega}\int_0^R r^{j-1}\frac{\partial^j}{\partial r^j}(hu)dr\,d\Omega.$$

写成 $r^{j-1}=r^{j-n}r^{n-1}$ 并使用 Schwarz 不等式，就推出

$$|u(y)|^2\leqslant C_1\left\{\int\left|\frac{\partial^j}{\partial r^j}(hu)\right|^2 dV\right\}\left\{\int r^{2(j-n)}dV\right\}, \tag{2.11}$$

其中 $dV=r^{n-1}dr\,d\Omega$ 是D的体积元素，而 C_i 记仅依赖于 n 的正的常数．(2.11) 中的积分是在球 $r<R$ 上取的．因为 $2j>n$，所以 (2.11) 右边最后的积分不超过 C_2R^{2j-n}．我们使用 Leibniz 规则和 (2.10) 估计第一个积分．于是得到

$$|u(y)|^2\leqslant C_3\sum_{k=0}^{j}R^{2k-n}\int_D\left|\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\right|^2 dV. \tag{2.12}$$

注意到

$$\left|\frac{\partial^k u(x)}{\partial r^k}\right|\leqslant C_4\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha u(x)|\qquad(0\leqslant k\leqslant j)$$

就可从(2.12)推出不等式(2.9)．

不等式 (2.9) 对于在D的边界附近估计 $u(y)$ 是没有用的，因为此时 R变成任意小．为了在边界附近得到好的界，我们必须把某个条件强加于 D．

定义　我们说D满足锥条件 (cone condition)，如果 $\bar{D}$ 上每一点 y 都是有限锥 $\Gamma_y(\rho)$ 的顶点，即锥与半径为 ρ 的球在顶点 y 相交，使得 $\Gamma_y(\rho)$ 在 $\bar{D}$ 中，且锥的体积不小于 $\gamma\rho^n$，其中 ρ,γ 是与 y 无关的正数．

定理 2′　假定D满足锥条件，则对任何 $u\in\hat{C}^j(D)(j=[n/2]+1)$，和所有的 $y\in D$，有

$$|u(y)|^2\leqslant C'\sum_{|\alpha|\leqslant j}\int_D|D^\alpha u(x)|^2dx \tag{2.13}$$

其中 C' 为仅依赖于 n, ρ, γ 的常数．

把前面的证明稍加修改，以 ρ 代 R，并 (代替 Ω) 仅对锥 $\Gamma_y(\rho)$ 的立体角积分，就得到定理 2′ 的证明．

读者可以验证，如果D为凸集，则锥条件得到满足，当∂D为C^1类时也得到满足.

假设D满足锥条件，且$u\in H^j(D)$，$j=[n/2]+1$. 设$\{u_m\}$为$\hat{C}^j(D)$中的函数序列，它按$H^j(D)$的范数收敛于u. 把(2.13)应用于u_m-u_k，我们得出，$\{u_m\}$为D中的一致收敛序列. 因此，它的逐点的极限$u^*(x)$是一连续函数，且满足(2.13). 因为几乎处处有$u(x)=u^*(x)$，所以就得到下面的结果.

推论 1 设D满足锥条件. 如果$u\in H^j(D)$，$j=[n/2]+1$，则可以认为u就是D中一致连续的函数$u(x)$，且(2.13)成立.

同样可以证明:

推论 2 设D满足锥条件. 如果$u\in H^j(D)$，$j\geqslant[n/2]+1$，则可以认为u就是在D中有$j-[n/2]-1$阶一致连续导数的函数$u(x)$.

定理 3 (Rellich 引理) 设$\{u_m\}$是$\mathring{H}^1(D)$ (D为有界域)中使$|u_m|_1^D\leqslant \text{const.}<\infty$的函数序列，则存在子序列$\{u_{m'}\}$使$m'\to\infty$，$k'\to\infty$时，有

$$|u_{m'}-u_{k'}|_0^D\to 0,$$

即$\mathring{H}^1(D)$的有界集为$L^2(D)$的预紧集.

证明 只要在u_m为实值函数时证明本定理就够了. 我们首先建立两条引理.

引理 9 (Poincaré 不等式) 设Q为立方体$0\leqslant x_i\leqslant\sigma$ $(i=1,\cdots,n)$，并设u为属于$C^1(Q)$的实值函数，则

$$|u|_0^2\leqslant\frac{1}{\sigma^n}\left(\int_Q u(x)dx\right)^2+\frac{n}{2}\sigma^2|u|_1^2. \tag{2.14}$$

证明 对任何$x\in Q$，$y\in Q$，有

$$\begin{aligned}
&u(x_1,x_2,\cdots,x_n)-u(y_1,y_2,\cdots,y_n)\\
&=\int_{y_1}^{x_1}\frac{\partial}{\partial\xi_1}u(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)d\xi_1\\
&\quad+\int_{y_2}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}u(y_1,\xi_2,x_3,\cdots,x_n)d\xi_2
\end{aligned}$$

$$+\cdots+\int_{y_n}^{x_n}\frac{\partial}{\partial\xi_n}u(y_1,\cdots,y_{n-1},\xi_n)d\xi_n.$$

取平方并利用 Schwarz 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&u^2(x)+u^2(y)-2u(x)u(y)\\&\leqslant n\sigma\int_0^\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}u(\xi_1,x_2,\cdots,x_n)\right)^2d\xi_1\\&\quad+n\sigma\int_0^\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}u(y_1,\xi_2,x_3,\cdots,x_n)\right)^2d\xi_2\\&\quad+\cdots+n\sigma\int_0^\sigma\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}u(y_1,\cdots,y_{n-1},\xi_n)\right)^2d\xi_n.\end{aligned}$$

对 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n$ 积分，我们得到

$$\begin{aligned}&2\sigma^n\int_Q u^2(x)dx-2\left(\int_Q u(x)dx\right)^2\\&\leqslant n\sigma^{n+2}\sum_{i=1}^n\int_Q\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)^2dx,\end{aligned}$$

从这个不等式就推出 (2.14).

引理 10（Friedrich 不等式） 对任何 $\varepsilon>0$，存在整数 $M>0$ 和属于 $L^2(D)$（D 为有界域）中的实值函数 $w_1,\cdots,w_M$，其中 $|w_j|_0=1$，使得对 $\mathring{H}^1(D)$ 中的任何实值函数 u 有：

$$|u|_0^2\leqslant\varepsilon|u|_1^2+\sum_{j=1}^M(u,w_j)^2. \tag{2.15}$$

证明 只要对 $u\in C_c^1(D)$ 证明本引理就够了，因为通过完备化就能推出它对所有 $u\in\mathring{H}^1(D)$的正确性. 扩张 u，使得在 D 外 $u=0$，并设 Q 为包含 $\overline{D}$ 的立方体，它的棱平行坐标轴. 设 σ_0 是各棱的长度. 引进超平面 $x_i=y_{mi}$，把 Q 分成许多立方体，使得对所有的 m,i，有 $y_{m+1,i}-y_{mi}=\sigma$；取 σ 使 σ_0/σ 为一整数. 以 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_M(M=(\sigma_0/\sigma)^2)$ 记这些立方体.

由引理 9，有

$$(|u|_0^{Q_j})^2\leqslant\frac{1}{\sigma^n}\left(\int_{Q_j}udx\right)^2+\frac{n}{2}\sigma^2(|u|_1^{Q_j})^2.$$

对 i 求和，并引进函数

$$w_j = \begin{cases} \sigma^{-n/2} & 在 Q_j 中, \\ 0 & 在 Q_j 外, \end{cases}$$

只要 σ 使 $n\sigma^2/2 \leqslant \varepsilon$，我们就得到(2.15)。

现在我们可以完成定理 3 的证明．设 $h = 1, 2, \cdots$，并对任何 $\varepsilon = 1/h$，象引理 10 那样，我们取有穷序列 $w_{jh}(j = 1, \cdots, M(h))$．设 $\{u_{m1}\}$ 为 $\{u_m\}$ 的子序列，并使得 $\{(u_{m1}, w_{j1})_0\}(j = 1, 2, \cdots, M(1))$ 为收敛序列．类似地，我们归纳地定义 $\{u_{m,h+1}\}$ 为 $\{u_{mh}\}$ 的子序列，它使得 $\{(u_{m,h+1}, w_{j,h+1})_0\}$ $(j = 1, 2, \cdots M(h+1))$ 为收敛序列．设 $\{u_{m'}\}$ 为对角序列 $\{u_{mm}\}$．于是，当 $m' \to \infty$ 时，对任何 h, j 有 $(u_{m'}, w_{jh})_0 \to 0$．

给定 $\varepsilon = 1/h$，选取 m_0' 使得当 $m' \geqslant m_0'$, $k' \geqslant m_0'$ 时有

$$\sum_{j=1}^{M(h)} (u_{m'} - u_{k'}, w_{jh})^2 < \varepsilon.$$

于是，据引理 10 有

$$|u_{m'} - u_{k'}|_0^2 \leqslant \varepsilon + \varepsilon(|u_{m'}|_1 + |u_{k'}|_1)^2 \leqslant (1 + 4K^2)\varepsilon,$$

其中 $K = \mathrm{l.u.b.}|u_m|_1$．因为可以使 ε 任意小，于是证明完毕．

下面两条引理与估计差商的范数有关．

引理 11 设 B 为有界区域 D 的子区域，且 $\bar{B} \subset D$，又设 h_0 为 B 到 D 的边界的距离．设 $j \geqslant 1$，又设 $u \in H^j(D)$．则差商，比方说对于 x_1 的差商，

$$u^h(x) = \frac{1}{h}(u(x_1 + h, x_2, \cdots, x_n) - u(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

当 $|h| < h_0$ 时，在 B 上完全有定义，并且

$$|u^h|_{j-1}^B \leqslant |u|_j^D, \tag{2.16}$$

$$\lim_{h \to 0} \left| u^h - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_0^B = 0 \tag{2.17}$$

引理 11′ 设 D, j 如同引理 11 所述，且 $u \in \mathring{H}^j(D)_0$ 扩张 u 使在 D 之外 $u = 0$，则

$$|u^h|_{j-1}^D \leqslant |u|_j^D, \tag{2.18}$$

$$(2.19)\qquad \lim_{h\to 0}\left|u^h - \frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_0^D = 0,$$

其中 u^h 如引理 11 所定义.

引理 11 的证明. 如果 $u\in \hat{C}^j(D)$, $0\leqslant|\alpha|<j$, 则

$$\int_B |D^\alpha u^h(x)|^2\, dx$$
$$= \int_B \left|\frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} D^\alpha D_{\xi_1} u(\xi_1, x_2, \cdots, x_n)\,d\xi_1\right|^2 dx.$$

利用 Schwarz 不等式,然后作代换 $\xi_1=\xi_1'+x_1$, 我们就得到

$$\int_B |D^\alpha u^h(x)|^2\, dx \leqslant \int_B \frac{1}{h}\int_0^h |D^\alpha D_{\xi_1'} u(\xi_1'+x_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 d\xi_1' dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^h\left\{\int_B |D^\alpha D_{x_1} u(\xi_1'+x_1, x_2, \cdots, x_n)|^2 dx\right\} d\xi_1'.$$

对里层的积分作置换 $x_1+\xi_1'\to x_1$,并注意到此时 B 被映射到 D 的子集中 (因为 $|h|<h_0$), 我们就可断定里层的积分不超过

$$\int_D |D^\alpha D_{x_1} u(x)|^2\, dx.$$

因此

$$\int_B |D^\alpha u^h(x)|^2\, dx \leqslant \int_D |D^\alpha D_{x_1} u(x)|^2\, dx.$$

对 α 求和,就推出 (2.16). 对 $u\in\hat{C}^j(D)$ 证明了 (2.16)之后, 通过完备化即可推出它对于 $u\in H^j(D)$ 的正确性. 事实上, 在 $\hat{C}^j(D)$ 中取 $|u_m-u|_j^D\to 0$ 的序列 $\{u_m\}$, 注意到, 当 $0\leqslant|\alpha|<j$, $|h|<h_0$ 时有

$$\int_B |D^\alpha u_m(x_1+h, x_2, \cdots, x_n) - D^\alpha u(x_1+h, x_2, \cdots, x_n)|^2 dx$$
$$\leqslant \int_D |D^\alpha u_m(x) - D^\alpha u(x)|\, dx$$

(在上式左边作置换 $x_1+h\to x_1$ 就得出此不等式), 我们得到, 对固定的 h, $|h|<h_0$, 当 $m\to\infty$ 时

$$|u_m^h - u^h|_{j-1}^B \to 0.$$

因为 (2.16) 对所有的 u_m 成立，所以对于 u 也成立.

为了证明 (2.17)，首先注意到 (2.17) 对 $\hat{C}^j(D)$ 的函数 u 成立，因为此时在 D 的紧子集中一致地有 $u^h(x)\to\partial u(x)/\partial x_1$. 如果 $u\in H^j(D)$，则对任何 $\epsilon>0$，我们可以找到函数 $v\in\hat{C}^j(D)$，使得 $|v-u|_j^D\leqslant\epsilon$. 由 (2.16) 还有 $|u^h-v^h|_0^B\leqslant\epsilon$. 因此，当 $|h|$ 充分小时，我们有

$$\left|u^h-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_0^B\leqslant|u^h-v^h|_0^B+\left|v^h-\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|_0^B$$
$$+\left|\frac{\partial v}{\partial x_1}-\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_0^B\leqslant 2\epsilon+\left|v^h-\frac{\partial v}{\partial x_1}\right|_0^B\leqslant 3\epsilon,$$

于是证明完毕.

引理 11′ 的证明　　对于包含 $\bar{D}$ 的任何有界区域 G，u 属于 $H^j(G)$. 事实上，如果 $\{u_m\}$ 是 $C_c^\infty(D)$ 中的函数序列，且按 $H^j(D)$ 范数收敛于 u，如果令在 D 之外 $u_m=0$ 扩张 u_m，则 $u_m\in C_c^\infty(G)$，且当 $m\to\infty$ 时，

$$|u_m-u|_j^G\to 0.$$

注意到 $|u|_j^G=|u|_j^D$，于是，将引理 11 应用于 D,G（代替 B,D）就推出引理 11′.

我们以 $\mathring{H}^1$ 中函数边界性态的基本结果来结束这一节.

引理 12　　设 D 为有界区域，其边界 ∂D 是 C^1 类的. 如果 u 为 $\bar{D}$ 中的连续函数，且 $u\in\mathring{H}^1(D)$，则在 ∂D 上 $u=0$.

证明　　设 $x^0\in\partial D$. 我们首先考虑如下特殊情形：存在 x^0 的邻域 N，使得 $N\cap\partial D$ 在超平面 $x_n=0$ 上，且 $N\cap D$ 在半空间 $x_n>0$ 中. 设 S_k 为一 n 维直球柱，其底 B 在 $N\cap\partial D$ 上，轴平行于 x_n 轴. 并设 x^0 为 B 的中心，而 k 为 S_k 的高. 如果 w 属于 $\hat{C}^j(S_k)$ 且在 $\bar{S}_k$ 上连续，在 B 上为零，则

$$|w(x)|^2\leqslant\left(\int_0^{x_n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|dx_n\right)^2\leqslant k\int_0^{x_n}\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2dx_n.$$

在 S_k 上取积分，我们得到

$$\int_{S_k}|w|^2dx\leqslant k^2\int_{S_k}\left|\frac{\partial w}{\partial x_n}\right|^2dx. \tag{2.20}$$

现在我们考虑一般情形．$N\cap\partial D$ 不必是一个平面．我们假设，可把 $N\cap\partial D$ 表为 $x_n=h(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 的形式，其中 $h\in C^1$。变换（1.23）把 $N\cap\partial D$ 映射到 $y_n=0$ 上的开集内，并且假定，$N\cap D$ 被映射到 $y_n>0$ 的一个区域内．令 $W(y)=w(x)$，据（2.20）我们有

$$(2.21)\qquad \int_{S_k^*}|W(y)|^2\,dy\leqslant k^2\int_{S_k^*}\left|\frac{\partial W(y)}{\partial y_n}\right|^2dy,$$

其中 S_k^* 为 y 空间中的直球柱，其定义类似于 S_k．它的底 B^* 的中心为 x^0 的象 y^0，且使得对所有充分小的 k，在变换(1.23)下，S_k^* 在 $D\cap N$ 的象中．

回到 x 坐标，从（2.21）我们得到

$$(2.22)\qquad \int_{\tilde{S}_k}|w(x)|^2\,dx\leqslant Ck^2\int_{\tilde{S}_k}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial w(x)}{\partial x_i}\right|^2dx,$$

其中 C 是常数，而 $\tilde{S}_k$ 和 S_k^* 在映射(1.23)之下互相对应．C 依赖于函数 h 的一阶导数的界，但不依赖于 k．于是在 $w\in\hat{C}^1(\tilde{S}_k)$，$w$ 在 $\bar{\tilde{S}}$ 上连续，且在 $N\cap\partial D$ 上 $w=0$ 的这些假定之下，我们证明了（2.22）．因为 $u\in\mathring{H}^1(D)$，所以可以用 $C_c^\infty(D)$ 中的函数序列按 $\mathring{H}^1(D)$ 的范数来逼近它．因为（2.22）对于每一个这样的函数都成立，所以对于 u 它也成立．把（$w=u$ 的）（2.22）的两边除以 k，并让 $k\to 0$，我们就得到，当 $k\to 0$ 时

$$(2.23)\qquad \frac{1}{k}\int_{\tilde{S}_k}|u(x)|^2\,dx\to 0.$$

回到 y 坐标，我们得到，当 $k\to 0$ 时

$$(2.24)\qquad \frac{1}{k}\int_{\tilde{S}_k}|u(x)|^2\,dx\geqslant\frac{C'}{k}\int_{S_k^*}|U(y)|^2\,dy$$

$$\to C'\int_{B^*}|U(y_1,\cdots,y_{n-1},0)|^2\,dy_1\cdots dy_{n-1},$$

其中 C' 是一个正的常数．又因为

$$\int_{B^*}|U(y_1,\cdots,y_{n-1},0)|^2dy_1\cdots dy_{n-1}\geqslant C''\int_B|u(x)|^2\,dB_x,$$

其中在变换(1.23)之下 B 对应于 B^*, dB_x 为 B 的曲面元素，而 C'' 为某个正的常数．从 (2.23)，(2.24) 我们得到

$$\int_B |u(x)|^2 dB_x = 0,$$

即在 B 上 $u(x) = 0$． 特别地，$u(x^0) = 0$． 因为 x^0 为 ∂D 上任意的点，故在 ∂D 上有 $u = 0$．

3. 椭圆型方程 Dirichlet 问题解的存在理论

在这一节里，我们考虑散度形式的 $2m$ 阶方程，即

$$(3.1)\quad Lu \equiv \sum_{0\leqslant|\rho|,\ |\sigma|\leqslant m} (-1)^{|\rho|} D^\rho(a^{\rho\sigma}(x) D^\sigma u) = f(x).$$

须要注意，如果导数 $D^\alpha(|\alpha| > m)$ 的系数属于 $C^{|\alpha|-m}$，则每个 $2m$ 阶方程都可以写成散度形式．反之，如果 $a^{\rho\sigma} \in C^{|\rho|}$，则 (3.1) 可以写成 $\sum A_\alpha D^\alpha u$ 的形式．

如果对任何实矢量 $\xi \neq 0$，有

$$(3.2)\quad \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \xi^\rho a^{\rho\sigma}(x) \xi^\sigma \neq 0,$$

我们就说方程 (3.1) 在点 x 处是椭圆的（或椭圆型的）．如果在区域 D 的每一点处，方程都是椭圆的，就说它在 D 内是椭圆的．如果 $Lu = f$ 是椭圆型方程，则 L 是椭圆算子．

如果方程(3.1)可写成 $\sum A_\alpha D^\alpha u = f$ 的形式，则现在的椭圆性定义和在第九章第 7 节中给出的定义一致．

在下文中我们将需要较(3.2)强的条件，即对任何实矢量 ξ 和 $x \in D$，有

$$(3.3)\quad \operatorname{Re}\left\{\sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \xi^\rho a^{\rho\sigma}(x) \xi^\sigma\right\} \geqslant C_0|\xi|^{2m} \qquad (C_0 > 0).$$

如果(3.3)得到满足，我们就说(3.1)在 D 内是强椭圆型方程，而 L 在 D 内是强椭圆算子．(3.3) 中的 C_0 称为强椭圆性的模．

注意，椭圆性仅指

$$(3.4)\quad \left|\sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \xi^\rho a^{\rho\sigma}(x) \xi^\sigma\right| \geqslant C_1|\xi|^{2m} \qquad (C_1 = C_1(x) > 0),$$

而一致椭圆性是指 C_1 与 $x \in D$ 无关，且(3.4)的左边不超过 $|\xi|^{2m}/C_1$. C_1 称为椭圆性的模.

如果 L 的主系数是有界的实值函数，则当且仅当 L 或者 $-L$ 在 D 内为一致椭圆时，L 在 D 内是强椭圆的.

整个这一节将作下面的假定:

(A_1) L 在有界区域 D 内是强椭圆的，且强椭圆性的模

$$C_0 > 0.$$

(A_2) L 的系数(在 D 内)不超过常数 C_1.

(A_3) L 的主系数在 D 内有连续模 $C_2(t)$ (即对所有的 $|\rho| = |\sigma| = m$, $x \in D$, $y \in D$, 有 $|a^{\rho\sigma}(x) - a^{\rho\sigma}(y)| \leqslant C_2(|x-y|)$, 而当 $t \searrow 0$ 时, $C_2(t) \searrow 0$).

我们还暂时假定:

(A_4) 系数 $a^{\rho\sigma}$ 属于 $C^{|\rho|}$ 和 $C^{|\sigma|}$.

定义　我们说函数 u 是方程

$$Lu = f \tag{3.5}$$

在 D 内的古典解(或者简单地说是解)，如果 $u \in C^{2m}(D)$，且(3.5)在 D 内每一点都得到满足. 我们说函数 u 是(3.5)的弱解，如果对于 D 的任何紧子区域 A, $u \in L^2(A)$，且对任何 $\varphi \in C_c^\infty(D)$

$$(L^*\varphi, u) = (\varphi, f) \tag{3.6}$$

成立. 这里 L^* 为 L 的伴随算子. 于是，因为我们考虑形如(3.1)的 L，所以 L^* 由

$$L^*v = \sum_{0\leqslant|\rho|,|\sigma|\leqslant m} (-1)^{|\sigma|} D^\sigma(\overline{a^{\rho\sigma}} D^\rho v) \tag{3.7}$$

给出.

如果 u 是(3.5)的古典解，则它显然也是(3.5)的弱解. 反之，如果 u 是弱解，此外，$u \in C^{2m}(D)$，则 u 是古典解. 因为对任何 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 分部积分(3.6)的左边得出 $(\varphi, Lu) = (\varphi, f)$，即(3.5)"逐点"成立(只要 f 为连续函数).

(古典的) Dirichlet 问题是求(3.5)的古典解 u，使在 ∂D 上满足下列边界条件:

$$(3.8)\qquad \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}=\varphi_j \qquad (j=0,1,\cdots,m-1),$$

其中 ν 为 ∂D 的法线．假定 u 属于 $C^{m-1}(\overline{D})$，且 ∂D 至少是 C^1 类的，因而导数 $\partial^j u/\partial \nu^j$ 完全有定义．通常把 φ_j 叫做 Dirichlet **数据**．

设 u_0 为 $C^{m-1}(\overline{D})$ 中满足 (3.8) 的任何函数．于是边界条件 (3.8)等价于函数 $w=u-u_0$ 及其前 $m-1$ 阶导数在 ∂D 上同时为零的条件．

据第 2 节引理 12；属于 $\mathring{H}^1(D)$的连续函数 w 必在 C^1 类的 ∂D 上为零.反之，也可以证明在 ∂D 上为零的 $H^1(D)$ 的连续函数属于 $\mathring{H}^1(D)$． 也可以把这两个论断推广到 $\mathring{H}^m(D)$ 类，即如果 ∂D 是 C^m 类的，且 $w\in C^{m-1}(\overline{D})$，则当且仅当 $w\in H^m(D)$，且它和它的前 $m-1$ 阶导数在 ∂D 上都为零时，$w\in \mathring{H}^m(D)$．

鉴于上两段的论述，使我们产生把 $u-u_0$ 属于 $\mathring{H}^m(D)$ 的条件看作是条件 (3.8) 的弱形式．现在我们定义:

广义 Dirichlet 问题(第一种提法) 给定了函数 $u_0\in H^m(D)$ 和函数 $f\in H^0(D)$，求 (3.5) 的弱解，使得 $u-u_0$ 属于 $\mathring{H}^m(D)$．

在这一节里我们将求解广义 Dirichlet 问题． 在第 4，5 节里将证明，只要 f，φ_j，∂D 以及 L 的系数是充分光滑的，那么广义 Dirichlet 问题的解也是古典 Dirichlet 问题的解．

我们给出广义 Dirichlet 问题的一种有用的新提法． 首先我们注意到，如果 u 是(3.5)的古典解，那么通过分部积分，对所有的 $\varphi\in C_c^\infty(D)$ 有

$$(3.9)\qquad B[\varphi,u]=\sum_{0\leqslant|\rho|,\,|\sigma|\leqslant m}(D^\rho\varphi,\,a^{\rho\sigma}D^\sigma u)=(\varphi,f)$$

或者

$$(3.10)\qquad B[\varphi,u-u_0]=(\varphi,f)-B[\varphi_1 u_0].$$

$B[u,v]$ 关于 u 是线性的，关于 v 是反线性的，而由 Schwarz 不等式，

$$(3.11)\qquad |B[u,v]|\leqslant \text{const.}\,|u|_m|v|_m$$

其中常数仅依赖于 L 的系数的界．注意，$B[u, v]$ 是对 H^m 中的任何 u, v 定义的（并且 (3.11) 成立）．

由前面的广义 Dirichlet 问题的定义得出，解 u 必属于 H^m．我们断定：对所有的 $\varphi \in C_c^\infty(D)$，$u$ 满足

$$(3.12) \qquad (L^*\varphi, u) = B[\varphi, u].$$

实际上，对于 $u \in C^m(D)$，通过分部积分就可推出这一结论，而对于 $u \in H^m(D)$，用 $C^m(D)$ 中的函数按 $H^m(D)$ 范数逼近它，就得出 (3.12)．

因为广义 Dirichlet 问题的解 u 满足 (3.6)，考虑到 (3.12) 它也满足关系式 (3.10)．反之，(3.10) 蕴含 (3.6)．于是我们证明了：

引理 13 u 是广义 Dirichlet 问题的解，当且仅当 $u - u_0 \in \mathring{H}^m(D)$，而且 (3.10) 对于所有的 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 都成立．

在引理 13 的基础上，我们可以把广义 Dirichlet 问题重新阐述如下：求函数 u，使得 $u - u_0 \in \mathring{H}^m(D)$，且对所有 $\varphi \in C_c^\infty(D)$，(3.10) 成立．

在证明引理 13 时，我们使用了假定 (A_4)．不过从 $B[\varphi, v]$ 的形式看出，即使省略假定 (A_4)，广义 Dirichlet 问题新的提法还是有意义的．在这一节里我们按照新的提法在没有假定 A_4 的情况下求解广义的 Dirichlet 问题．为今后参考起见，我们叙述：

广义 Dirichlet 问题（第二种提法） 给定函数 $u_0 \in H^m(D)$ 和函数 $f \in H^0(D)$，求一函数 u 使得 $u - u_0 \in \mathring{H}^m(D)$ 和对所有 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 有 (3.10) 成立．

下面的定理在解广义 Dirichlet 问题时起着决定性的作用．

定理 4（Gåvding 不等式） 如果 L 满足假定 (A_1)—(A_3)，则存在常数 $C > 0$ 和 k_0，使得对所有的 $\varphi \in \mathring{H}^m(D)$，有

$$(3.13) \qquad \mathrm{Re} B[\varphi, \varphi] \geqslant C|\varphi|_m^2 - k_0|\varphi|_0^2.$$

常数 C 和 k_0 仅依赖于 C_0，C_1，C_2 和 D．

证明　只要对 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 证明 (3.13) 就够了．实际上，对于任何 $u \in \mathring{H}^m(D)$，我们在 $C_c^\infty(D)$ 中取序列 $\{\varphi_j\}$，使 $|u - \varphi_j|_m \to 0$，把 (3.13) 应用于每一个 φ_j，并注意到当 $j \to \infty$ 时，$B[\varphi_j,$

$\varphi_j|\to B[u,u]$，所以 (3.13) 对 u 也成立.

我们引进记号

$$|\hat{\varphi}|_j=\left\{\sum_{|\alpha|=j}\int_D|D^\alpha\varphi(x)|^2dx\right\}^{1/2}, \tag{3.14}$$

首先考虑 L 为齐次（即 L 与其主部相同），且其系数为常数的情形.

利用规则 (2.2)，(2.3) 我们有

$$\begin{aligned}B[\varphi,\varphi]&=\sum_{|\rho|=|\sigma|=m}(D^\rho\varphi,a^{\rho\sigma}D^\sigma\varphi)\\&=\sum_{|\rho|=|\sigma|=m}((i\xi)^\rho\tilde{\varphi},a^{\rho\sigma}(i\xi)^\sigma\tilde{\varphi})\\&=\int_{R^n}|\tilde{\varphi}(\xi)|^2\left[\sum_{|\rho|=|\sigma|=m}\xi^\rho a^{\rho\sigma}\xi^\sigma\right]d\xi.\end{aligned} \tag{3.15}$$

利用 (3.3) 及关系式

$$|\xi|^{2m}=\sum_{|\rho|=m}|\xi^{2\rho}|,$$

我们得到

$$\operatorname{Re}B[\varphi,\varphi]\geqslant C_0\int_{R^n}|\tilde{\varphi}(\xi)|^2\left[\sum_{|\rho|=m}\xi^\rho\xi^\rho\right]d\xi.$$

因为当 $a^{\rho\sigma}=\delta^{\rho\sigma}$(当 $\rho\neq\sigma$ 时，$\delta^{\rho\sigma}=0$，当 $\rho=\sigma$ 时，$\delta^{\rho\sigma}=1$)时，右边的积分和(3.15)的右边相同，所以对于 $a^{\rho\sigma}=\delta^{\rho\sigma}$ 利用 (3.15)，我们立即得到

$$\operatorname{Re}B[\varphi,\varphi]\geqslant C_0\sum_{|\rho|=m}(D^\rho\varphi,D^\rho\varphi),$$

即

$$\operatorname{Re}B[\varphi,\varphi]\geqslant C_0|\hat{\varphi}|_m^2. \tag{3.16}$$

其次，我们考虑 L 仍为齐次，但不假定其系数为常数的情形. 假如 φ 的支集在点 $x^0\in D(A\subset D)$ 的开邻域 A 中，而 A 的直径 $|A|$ 又充分小时，我们估计 $\operatorname{Re}B[\varphi,\varphi]$.

写成

$$B[\varphi, \varphi] = \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} (D^\rho\varphi, a^{\rho\sigma}(x^0)D^\sigma\varphi)$$

$$+ \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} (D^\rho\varphi, [a^{\rho\sigma}(x) - a^{\rho\sigma}(x^0)]D^\sigma\varphi)$$

$$= I + J.$$

据(3.16)

$$\operatorname{Re} I \geqslant C_0|\hat{\varphi}|_m^2.$$

如果$|A|$充分小(依赖于 C_0 和条件(A_3)中的函数 C_2),则

$$|J| < \frac{1}{2} C_0|\hat{\varphi}|_m^2.$$

我们断定,对所有 $\varphi \in C_c^\infty(A)$, 有

$$\operatorname{Re} B[\varphi, \varphi] \geqslant \frac{1}{2} C_0|\hat{\varphi}|_m^2. \tag{3.17}$$

现在考虑一般情形. 以有限个区域 A_j 来覆盖 D, 各个 A_j 的直径充分小,使得对 $A = A_j$ 有(3.17). 设$\{\alpha_j\}$是相应于覆盖$\{A_j\}$的单位分解,并令 $\beta_j = \sqrt{\alpha_j}$. 写成

$$B[\varphi, \varphi] = \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \int_D D^\rho\varphi \cdot \overline{a^{\rho\sigma}} D^\sigma\tilde{\varphi}dx + \sum_{\substack{|\rho|,|\sigma|\leqslant m\\|\rho|+|\sigma|<2m}} \int_D D^\rho\varphi \cdot \overline{a^{\rho\sigma}} D^\sigma\tilde{\varphi}dx = H + K. \tag{3.18}$$

显然,

$$|K| \leqslant \text{const.} |\varphi|_m|\varphi|_{m-1}. \tag{3.19}$$

其次,

$$\begin{aligned} H &= \sum_j \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \int_D [\beta_j D^\rho\varphi][\beta_j \overline{a^{\rho\sigma}} D^\sigma\tilde{\varphi}]dx \\ &= \sum_j \sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \int_D D^\rho(\beta_j\varphi) \cdot \overline{a^{\rho\sigma}} D^\sigma(\beta_j\tilde{\varphi})dx \\ &\quad - \sum_j \sum \int_D C_{\rho_1\rho_2\sigma_1\sigma_2} D^{\rho_1}\beta_j \cdot D^{\rho_2}\varphi \cdot \overline{a^{\rho\sigma}} D^{\sigma_1}\beta_j\, D^{\sigma_2}\tilde{\varphi}dx \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$= H_1 - H_2.$$

在 H_2 中 C 是有界函数，且 $\rho_1 + \sigma_1 > 0$，使得 $\rho_2 + \sigma_2 < 2m$. 因此，

(3.21) $$|H_2| \leqslant \text{const.} |\varphi|_m |\varphi|_{m-1},$$

其中常数仅依赖于 $a^{\rho\sigma}$ 的界.

H_1 是这样一些项的和:

$$\sum_{|\rho|=|\sigma|=m} \int_D D^\rho \phi_j \cdot \overline{a^{\rho\sigma}} D^\sigma \bar{\phi}_j dx \quad 其中\ \phi_j = \varphi \beta_j \in C_c^\infty(A_j).$$

据 $A = A_j$ 的(3.17)的结果，我们得到

$$\operatorname{Re} H_1 \geqslant \frac{1}{2} C_0 \sum_j |\hat{\varphi}_j|_m^2$$

$$= \frac{1}{2} C_0 \sum_j \sum_{|\rho|=m} \int_D D^\rho(\beta_j \varphi) \cdot D^\rho(\beta_j \bar{\varphi}) dx.$$

当 $a^{\rho\sigma} = \delta^{\rho\sigma}$ 时，右边的双重和与((3.20) 右边) H_1 的双重和相同，因此，

(3.22) $$\operatorname{Re} H_1 \geqslant \frac{1}{2} C_0 \left\{ \sum_j \sum_{|\rho|=m} \int_D [\beta_j D^\rho \varphi][\beta_j D^\rho \bar{\varphi}] dx + H_2' \right\}$$

其中当 $a^{\rho\sigma} = \delta^{\rho\sigma}$ 时，H_2' 与 H_2 相同，因此，据(3.21)

(3.23) $$|H_2'| \leqslant \text{const.} |\varphi|_m |\varphi|_{m-1}.$$

综合 (3.18)—(3.23)，我们得到

(3.24) $$\operatorname{Re} B[\varphi, \varphi] \geqslant \frac{1}{2} C_0 |\hat{\varphi}|_m^2 - C_1 |\varphi|_m |\varphi|_{m-1},$$

其中 C_1 是仅依赖于 c_0, c_1, c_2 的常数.

利用初等不等式

$$C_1 |\varphi|_m |\varphi|_{m-1} \leqslant \delta |\varphi|_m^2 + \frac{C_1}{4\delta} |\varphi|_{m-1}^2 \qquad (\delta > 0)$$

并应用第 7 节引理7，我们得到

(3.25) $$C_1 |\varphi|_m |\varphi|_{m-1} \leqslant \delta |\varphi|_m^2 + \frac{C_1}{4\delta} (\varepsilon |\varphi|_m^2 + C_2 |\varphi|_0^2)$$

$$(\varepsilon > 0)$$

其中 C_2 仅依赖于 ϵ. 由引理 7 我们还有

$$(3.26)\qquad \frac{1}{2}c_0|\hat{\varphi}|_m^2 \geqslant \frac{1}{3}c_0|\varphi|_m^2 - \text{const.}|\varphi|_0^2.$$

取 $\delta = c_0/9$, 然后取 $\epsilon = (4\delta/C_1)(c_0/9)$, 并把(3.25), (3.26)代入(3.24), 就得出 ($c = c_0/6$ 的) 不等式 (3.13).

我们需要下面 Hilbert 空间的泛函表示定理.

定理 5 设 $B[x, y]$ 为 Hilbert 空间 H 的双线性型(即关于 x 是线性的, 而关于 y 是反线性的), 范数为 $|\ \ |$, 纯量积为 $(,)$. 假定 $B[x, y]$ 是有界的, 即对所有 H 中的 x, y, 有

$$(3.27)\qquad |B[x, y]| \leqslant \text{const.}|x||y|.$$

此外, 假定对所有的 $x \in H$ 和某个正的常数 c, 有

$$(3.28)\qquad |B[x, x]| \geqslant c|x|^2$$

成立, 则 H 中每一个有界线性泛函 $F(x)$ 可表为如下形式

$$(3.29)\qquad F(x) = B[x, v] = \overline{B[w, x]},$$

其中 v, w 是 H 中的某两个元素, 由 F 唯一确定.

证明 对于固定的 v, $B[x, v]$ 为关于 x 的有界线性泛函. 因此, 存在唯一的 y, 使得

$$B[x, v] = (x, y).$$

令 $y = Av$. 于是 A 是 H 上的线性算子. 因为

$$c|v|^2 \leqslant |B[v, v]| \leqslant |(v, y)| \leqslant |v||y|,$$

即 $|v| \leqslant |y|/c$, 所以 A 有有界逆. 由此得出, A 的值域 $R(A)$ 为 H 的闭的线性子空间. 我们应有: $R(A) = H$. 实际上, 如果 $R(A) \neq H$, 则存在和 $R(A)$ 正交的元素 $z \neq 0$, 即对所有 $v \in H$, $(z, Av) = 0$. 这就意味着 $B[z, v] = (z, Av) = 0$. 取 $v = z$, 我们得到 $B[z, z] = 0$; 因此由 (3.8), $z = 0$, 这和 z 的选取相矛盾.

现在考虑泛函 $F(x)$. 我们可以对于某个 $a \in H$, 把 $F(x)$ 表为 (x, a) 的形式. 因为 $R(A) = H$, 所以存在元素 v, 使得 $Av = a$, 也就是

$$B[x, v] = (x, a) = F(x).$$

v 是唯一确定的．因为如果对某个 $v' \in H$ 和所有的 x 还有 $B[x, v'] = F(x)$，则 $B[x, v - v'] = 0$．取 $x = v - v'$，并利用 (3.28) 就得到 $v = v'$．

把前面的结果应用于双线性型 $\overline{B[y, x]}$，就得出表示式

$$F(x) = \overline{B[w, x]}.$$

如果在 (3.13) 中 $k_0 = 0$，我们立即就能建立一条关于广义 Dirichlet 问题解的存在定理．

定理 6 假定 L 满足 (A_1)—(A_3)，并假定对某个常数 $c > 0$ 和所有的 $\varphi \in C_c^\infty(D)$，(3.9) 中所定义的双线性型 $B[\varphi, u]$ 满足

$$\mathrm{Re} B[\varphi, \varphi] \geqslant C|\varphi|_m^2. \tag{3.30}$$

则广义 Dirichlet 问题(第二种提法)存在唯一解．

证明　通过完备化，对所有的 $\varphi \in \mathring{H}^m(D)$，(3.30)成立．再考虑到(3.11)，我们可知，$B[u, v]$ 满足关于 $H = \mathring{H}^m$ 时定理 5 的假定．现考虑对于 $\phi \in \mathring{H}^m$ 所定义的泛函

$$F(\phi) = (\phi, f) - B[\phi, u_0].$$

因为它显然是 $\mathring{H}^m$ 上的有界线性泛函，所以我们可以应用定理 5，于是断定：存在唯一的 $v \in \mathring{H}^m$，使得 $F(\phi) = B[\phi, v]$．因此函数 $u = u_0 + v$ 为广义 Dirichlet 问题(第二种提法)的唯一解．

从定理 4 和 6 我们得到：

定理 7 设 L 满足 (A_1)—(A_3)．则存在(仅依赖于 C_0，C_1，C_2，D 的）常数 k_0，使得对于任何 $k \geqslant k_0$，关于 $L + k$ 的广义 Divichlet 问题（第二种提法）有唯一解．

在陈述这一节的主要存在定理之前，我们引进某些概念，并叙述 Hilbeit 空间中的 Fredholm 互斥性．

我们说把 Hilbert 空间 H 映射成自身的算子 T 是**全连续的**，如果它把每个有界序列 $\{x_n\}$ 映射成有收敛子序列的序列．在 H 上定义的(其值在 H 中的)连续线性算子 T 的**伴随算子** T^* 由 $(T^*x, y) = (x, T_y)$ 定义，其中 (x, z) 为 H 中 x，z 的纯量积．如果 T 全连续，则 T^* 也全连续．

考虑方程

$$x - \lambda T_x = f, \tag{3.31}$$

$$x - \lambda T_x = 0, \tag{3.32}$$

和伴随方程

$$y - \bar{\lambda} T^* y = g, \tag{3.33}$$

$$y - \bar{\lambda} T^* y = 0, \tag{3.34}$$

其中 λ 为复参数;元素 f, g 是给定的. 我们说,λ 是 (3.32) 的(或者 T 的)特征值,如果存在 $x^0 \neq 0$,使得 $x^0 - \lambda T x^0 = 0$. x^0 称为相应于 λ 的特征矢量. 以 $X(\lambda)$ 记由相应于 λ 的特征矢量所生成的线性空间,并令 $N(\lambda)$ 记 $X(\lambda)$ 的维数. 关于 (3.34) 可类似地定义 $X^*(\bar{\lambda})$, $N^*(\bar{\lambda})$.

Fredholm 互斥性 设 T 为定义在 H 上的(其值在 H 中的)连续线性算子,并假定 T 也是全连续的,则

(α) 当且仅当 $\bar{\lambda}$ 是(3.34)的特征值时,λ 是(3.32)的特征值. 于是,$X(\lambda)$, $X^*(\bar{\lambda})$ 都是有限维空间,并且

$$N(\lambda) = N^*(\bar{\lambda}).$$

(β) 如果 λ 不是 (3.32) 的特征值,则对于 H 中任意的 f、g,(3.31)、(3.33) 分别存在唯一解 x, y.

(γ) 如果 λ 是 (3.32) 的特征值,则当且仅当 f 和 $X^*(\bar{\lambda})$ 正交时,(3.31) 的解存在.

如果取 $H = L^2(G)$,我们就可以把对积分方程的 Fredholm 互斥性(在第五章第 5 节所陈述的断言 (a), (b))看作是现在这种 Fredholm 互斥性的特殊情形.

我们来叙述本节中主要的存在定理.

定理 8 假定 L 满足 (A_1)—(A_3),且 $u_0 = 0$. 则 Fredholm 互斥性对于广义 Dirichlet 问题(第二种提法)是成立的. 更明确地说:或者对于每一 $f \in H^0(D)$ 和所有的 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 和 $u \in \mathring{H}^m(D)$,

$$B[\varphi, u] = (\varphi, f) \tag{3.35}$$

存在唯一解,或者对所有的 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 和 $v \in \mathring{H}^m(D)$, $B[v, \varphi] = 0$ 存在有限个线性无关的解 $v_j (j = 1, \cdots, h)$,于是,当

且仅当 $(f, v_j) = 0\ (j = 1, \cdots, h)$ 时，(3.35) 的解存在．在第二种情况下，如果解存在，那么解不是唯一的．

证明　　取固定的 $k \geqslant k_0$, $k \neq 0$，其中 k_0 为定理 4 和 7 中出现的常数，并令 $L_k = L + k$. 双线性型 $B_k[u, v] = B[u, v] + k(u, v)$ 以 $B[u, v]$ 与 L 相伴的同样方式而与 L_k 相伴．据定理 7，对任意的 $g \in \mathring{H}(D)$,

$$B_k[\varphi, w] = (\varphi, g)$$

存在唯一的解 w，其中 $\varphi \in C_c^\infty(D)$, $w \in \mathring{H}^m(D)$. 令 $w = L_k^{-1}g$. 因为对于一切 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 和 $u \in \mathring{H}^m(D)$,

$$B_k[\varphi, u] = (\varphi, ku + f)$$

与 (3.35) 等价．所以，当且仅当 $u = L_k^{-1}(ku + f)$，即当且仅当

$$u - Tu = f_1 \qquad (T = kL_k^{-1},\ f_1 = L_k^{-1}f) \tag{3.36}$$

时，u 满足 (3.35).

我们断定 T 在 H^0 中是连续和全连续的．只要对 L_k^{-1} 证明就够了．现在，如果 g 在 H^0 中变化，则 $w = L_k^{-1}g$ 在 $\mathring{H}^m$ 中变化，且对所有的 $\varphi \in C_c^\infty(D)$ 满足

$$B_k[\varphi, w] = (\varphi, g).$$

通过完备化，这一关系对于所有 $\varphi \in \mathring{H}^m$ 也成立．因而，特别地对于 $\varphi = w$ 成立．于是

$$\begin{aligned} c|w|_m^2 \leqslant |B_k[w, w]| \leqslant |(w, g)| &\leqslant |w|_0|g|_0 \\ &\leqslant |w|_m|g|_0, \end{aligned}$$

即 $c|w|_m \leqslant |g|_0$. 由此可见，如果 g 在 H^0 的有界集中变化，则 $w = L_k^{-1}g$ 在 $\mathring{H}^m$ 的有界集中变化．所以 L_k^{-1} 是 H^0 中的连续变换．而且，据 Rellich 引理（第 2 节定理 3），因为 $\mathring{H}^m(m \geqslant 1)$ 中的有界序列有子序列，这个子序列是 H^0 中的 Canchy 序列，所以 L_k^{-1} 也是全连续的．

于是可应用 Fredholm 互斥性．由此得出：

(*a*) 对于每一 f_1, (3.36) 存在唯一解，或者

(*b*) $u - Tu = 0$ 有非平凡解，而且对于 $v - T^*v = 0$ 的所有的解 v_j，当且仅当 $(f_1, v_j) = 0$ 时，方程 (3.36) 有解．

在(a)成立时，对于每一个 f，广义 Dirichlet 问题的解存在，并且是唯一的（因为 $f=0$ 意味着 $f_1=0$，从而 $u=0$）.

为了考虑情形 (b)，首先注意到，对于可能有不同常数 k_0 的 L^*，定理 4，7 仍为真. 此外，如仍取 k 大于这个常数 k_0，则可断定

$$T^*=k(L^*+k)^{-1}. \tag{3.37}$$

事实上，由 T^* 的定义，对所有 H^0 的 v，g，有

$$(T^*v,g)=(v,T_g). \tag{3.38}$$

令 $T_g=h$，$T^*v=w$. 那么对所有 $\varphi\in C_c^\infty(D)$ 有

$$B_k[\varphi,h]=k(\varphi,g).$$

通过完备化，对于 $\varphi=w\in\mathring{H}^m(D)$ 此等式也成立. 于是

$$B_k[w,h]=k(w,g). \tag{3.39}$$

令 $S=k(L^*+k)^{-1}$，$Sv=w_1$. 那么对于所有 $\psi\in C_c^\infty(D)$，$w_1\in\mathring{H}^m(D)$，w_1 满足

$$B_k[w_1,\psi]=k(v,\psi),$$

通过完备化可以断定，上式对 $\psi=h$ 也成立. 因此

$$\begin{aligned}B_k[w_1,h]=k(v,h)=k(v,T_g)&=k(T^*v,g)\\&=k(w,g).\end{aligned} \tag{3.40}$$

综合 (3.39)，(3.40) 我们得到

$$B_k[w-w_1,h]=0.$$

因为 h 可以是 $\mathring{H}^m(D)$ 的任意元素，所以 $B_k[w-w_1,w-w_1]=0$，即 $w=w_1$. 于是 $Sv=T^*v$，从而推出 (3.37).

由 (3.37) 可以断定，对所有的 $\varphi\in C_c^\infty(D)$，$v\in\mathring{H}^m(D)$，当且仅当

$$B[v,\varphi]=0 \tag{3.41}$$

时，$T^*v-v=0$.

于是，为了完成本定理的证明，还要证明：条件 $(f_1,v_j)=0$ 和条件 $(f,v_j)=0$ 等价. 从下面的等式即可推出这一论断：

$$(f_1,v_j)=(L_k^{-1}f,v_j)=(f,(L_k^{-1})^*v_j)=\frac{1}{k}(f,T^*v_j)$$

$$-\frac{1}{k}(f, v_j).$$

4. 弱解在内部的可微性

在这一节里我们将证明,如果 f 和 L 的系数充分光滑,则在 D 内强椭圆型方程 $L_u = f$ 的弱解在 D(的内部) 内光滑到任何给定的阶. 不言而喻,在本节中将采用在第 3 节所作的假定 (A_1)—(A_3). 我们首先证明几条引理.

引理 14 假定 $a^{\rho\sigma} \in C^1(D)$,并设 u 在 D 内有 m 阶强导数. 如果对于所有的 $\varphi \in C_c^\infty(D)$,

$$(4.1) \qquad |B[\varphi, u]| \leqslant \text{const.} |\varphi|_{m-1},$$

则 u 在 D 内有 $(m+1)$ 阶强导数.

证明 设 A, B, C 为 D 的子区域,使得 $\bar{A} \subset B$, $\bar{B} \subset C$, $\bar{C} \subset D$. 并设 $\zeta(x)$ 为属于 $C_c^\infty(B)$ 的一个函数,且满足如下条件:当 $x \in A$ 时,$\zeta(x) = 1$;在 B 内,$0 \leqslant \zeta \leqslant 1$. 令 $v = \zeta u$,如果 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$,则令 $x^h = (x_1 + h, x_2, \cdots, x_n)$,

$$g^h(x) = \frac{g(x^h) - g(x)}{h}.$$

那么

$$D^\rho v^h = [D^\rho(\zeta u)]^h = (\zeta D^\rho u)^h + \sum_{|\lambda| < |\rho|} (b_\lambda D^\lambda u)^h,$$

其中系数 b_λ 在 B 外为零. 据第 2 节引理 11,当 $|h|$ 充分小时,有

$$(4.2) \qquad |D^\rho v^h - (\zeta D^\rho u)^h|_0^D \leqslant K_1 \sum_{|\lambda| < m} |D^\lambda u|_1^c \leqslant K_2 |u|_m^c \leqslant K_3,$$

其中 K_i 记不依赖于 h 和下面的 φ 的常数.

利用 (4.2) 我们得到

$$(4.3) \qquad B[\varphi, v^h] = \left| \sum_{|\rho|, |\sigma| \leqslant m} (D^\rho \varphi, a^{\rho\sigma} D^\sigma v^h) \right|$$

$$\leqslant \left| \sum_{|\rho|, |\sigma| \leqslant m} (D^\rho \varphi, a^{\rho\sigma} (\zeta D^\sigma u)^h) \right| + K_4 |\varphi|_m.$$

利用等式

(4.4) $$f(x)g^h(x)=(f(x)g(x))^h-f^h(x)g(x^h),$$
我们从 (4.3) 得到

(4.5) $$|B[\varphi, v^h]|\leqslant\left|\sum_{|\rho|,|\sigma|\leqslant m}(D^\rho\varphi, (a^{\rho\sigma}\zeta D^\sigma u)^h)\right|$$
$$+\sum_{|\rho|,|\sigma|\leqslant m}|(D^\rho\varphi(x), (a^{\rho\sigma}(x))^h\zeta(x^h)D^\rho u(x^h))|$$
$$+K_4|\varphi|_m.$$
因为对于 $x\in C$ 和充分小的 $|h|$，$(a^{\rho\sigma}(x))^h$ 一致有界，又因为对于任何两个有界区域 B_1, $B_2(\bar{B}_1\subset B_2)$，只要 $|h|$ 充分小，就有

(4.6) $$\int_{B_1}|g(x^h)|^2dx\leqslant\int_{B_2}|g(x)|^2dx,$$
所以从 (4.5) 我们得到

(4.7) $$|B[\varphi, v^h]|\leqslant\left|\sum_{|\rho|,|\sigma|\leqslant m}(\zeta D^\rho\varphi^{-h}, a^{\rho\sigma}D^\sigma u)\right|+K_5|\varphi|_m,$$
这里我们使用了恒等式

(4.8) $$(f, g^h)=(f^{-h}, g).$$

写成
$$\zeta D^\rho\varphi^{-h}=D^\rho(\zeta\varphi^{-h})+\sum_{|\lambda|<|\rho|}d_\lambda D^\lambda\varphi^{-h}$$
并利用由第 2 节引理 11 得出的不等式 $|D^\lambda\varphi^{-h}|_0^D\leqslant|D^\lambda\varphi|_1^D$，从 (4.7) 我们得到

(4.9) $$|B[\varphi, v^h]|\leqslant|B[\zeta\varphi^{-h}, u]|+K_6|\varphi|_m.$$
如果我们运用以 $\zeta\varphi^{-h}$ 代替 φ 的 (4.1)，并利用由 Leibniz 规则和引理 11′ 推出的下列不等式
$$|\zeta\varphi^{-h}|_{m-1}\leqslant K_7|\varphi|_m,$$
则我们从 (4.9) 得到

(4.10) $$|B[\varphi, v^h]|\leqslant K_8|\varphi|_m.$$
对于任何 $\varphi\in C_c^\infty(D)$ 我们证明了(4.10)，通过完备化，它对于任何 $\varphi\in\mathring{H}^m(D)$ 也成立. （由(1.8)所定义的）平滑算子 $J_{1/j}(\zeta u)$ 当 j 充分大时，在 C 外为零，并且容易验证，按 $H^m(C)$ 的范数有 $J_{1/j}(\zeta u)\to\zeta u$(利用第 1 节引理3和对强导数也成立的规则(1.10)，

以及 $\zeta u \in H^m(C)$ 这一事实). 因此, $\zeta u \in \mathring{H}^m(C)$. 但是另一方面, 当 $|h|$ 充分小时 $(\zeta u)^h$ 属于 $\mathring{H}^m(D)$, 实际上. 按 $\mathring{H}^m(D)$ 的范数,它是函数 $[J_{1/j}(\zeta u)]^h$ 的极限.

因此,在 (4.10) 中我们可以取 $\varphi = v^h$, 于是利用 Gårding 不等式,我们得到

$$c|v^h|_m^2 \leqslant |B[v^h, v^h]| + k_0|v^h|_0^2 \leqslant K_8|v^h|_m + k_0|v^h|^2.$$

因为 $m \geqslant 1$, 所以据引理 11′, $k_0|v^h|_0^2 \leqslant k_0|v|_1^2 \leqslant K_9$, 于是我们得到

$$|v^h|_m \leqslant k_{10}. \tag{4.11}$$

由引理 11′, 在 $L^2(D)$ 中 $v^h \to \partial v/\partial x_1$, 鉴于 (4.11), 第 1 节引理 2,我们可以断定 $\partial v/\partial x_1$ 属于 $H^m(D)$. 类似地,可以证明, $\partial v/\partial x_i$ 属于 $H^m(D)$ $(i = 2, \cdots, n)$. 引用第 1 节引理 4 就可推出 $v \in H^{m+1}(D)$. 因为在 A 上 $u = v$, 于是 u 属于 $H^{m+1}(A)$. 最后, 因为 A 可以是 D 的任何子区域, 所以在 D 内 u 有 $m+1$ 阶强导数.

引理 15 假定对于某个 $1 \leqslant j \leqslant m$,有

$$a^{\rho\sigma} \in C^{\max(1, |\rho|-m+j)}.$$

如果 u 在 D 内有 m 阶强导数,且对于所有的 $\varphi \in C_c^\infty(D)$, 有

$$|B[\varphi, u]| \leqslant \text{const.}|\varphi|_{m-j}, \tag{4.12}$$

则 u 在 D 内有 $(m+j)$ 阶强导数.

证明 $j = 1$ 的情形与引理 14 相同. 据归纳法我们继而假定, 本引理对于 $j-1(2 \leqslant j \leqslant m)$ 和任何有界区域 D 成立, 我们将证明它对于 j 和任何有界区域 D 成立. 因为 (4.12) 意味着

$$|B[\varphi, u]| \leqslant \text{const.}|\varphi|_{m-j+1},$$

由归纳法假定得出 u 有 $(m+j-1)$ 阶强导数.

在 (4.12) 中以 $D\varphi$ 代替 φ, 我们得到

$$|B[D\varphi, u]| \leqslant \text{const.}|D\varphi|_{m-j} \leqslant \text{const.}|\varphi|_{m-j+1}. \tag{4.13}$$

其次

$$B[D\varphi, u] = -\sum_{|\rho|,|\sigma| \leqslant m} (D^\rho\varphi, D[a^{\rho\sigma}D^\sigma u]) \tag{4.14}$$

$$= - B[\varphi, Du] + I,$$

其中

$$I = \sum_{|\rho|,|\sigma| \leqslant m} \int_D D^\rho \varphi \cdot D_a^{\overline{\rho\sigma}} \cdot D^\sigma \bar{u} dx.$$

分部积分 $\max(0, |\rho| - m + j - 1)$ 次，并利用对于D的任何紧子区域A有 $|u|_{m+j-1}^A < \infty$ 这一事实，我们就得到

$$\left| \int_D D^\rho \varphi \cdot [D_a^{\overline{\rho\sigma}} \cdot D^\sigma \bar{u}] dx \right| < \text{const.} |\varphi|_{m-j+1},$$

常数与φ无关，倘若 $\varphi \in C_c^\infty(B)$，其中$B$为$D$的任何固定的子区域且 $\bar{B} \subset D$. 对I我们得到同样的界. 在(4.14)中利用这个界并把结果和(4.13)结合起来，对于任何 $\varphi \in C_c^\infty(B)$ 我们得到不等式

$$|B[\varphi, Du]| \leqslant \text{const.} |\varphi|_{m-j+1}.$$

因为Du有直到 $m + j - 2(\geqslant m)$ 阶的强导数，于是，在B中可以把归纳法假定应用于Du. 由此得出，Du在B内有$(m + j - 1)$阶强导数. 利用第1节引理4，我们断定，u在B内有$(m + j)$阶强导数. 又因为B是D的任意子区域且 $\bar{B} \subset D$，所以u在D内有$(m + j)$阶强导数.

引理 16 假定 $a^{\rho\sigma} \in C^{\max(1, |\rho| + p)}$，其中$p$为非负整数，并且$f$在$D$内有$p$阶强导数. 如果$u$在$D$内有$m$阶强导数，并且是(3.9)的解，则$u$在$D$内有$(2m + p)$阶强导数.

证明 因为对于所有的 $\varphi \in C_c^\infty(D)$，有

$$B[\varphi, u] = (\varphi, f), \tag{4 15}$$

所以关于 $j = m$ 我们可以应用引理15，于是断定u有$2m$阶强导数.

其次，在关系式(4.15)中以$D\varphi$代φ并进行分部积分，我们得到

$$B[\varphi, Du] + (\varphi, L'u) = (\varphi, Df),$$

其中

$$L'u = \sum_{|\rho|,|\sigma| \leqslant m} (-1)^{|\rho|} D^\rho [(Da^{\rho\sigma}) D^\sigma u].$$

因此，对所有的 $\varphi \in C_c^\infty(A)$，有

$$|B[\varphi, Du]| \leqslant \text{const.}|\varphi|_0,$$
其中常数与φ无关,而A为D的任何固定的子区域,且$\bar{A}\subset D$. 关于$j=m$应用引理15,我们得到,在A中Du有$2m$阶强导数. 因此据第1节引理4,在A中u有$(2m+1)$阶强导数. 因为A是D的任意子区域且$\bar{A}\subset D$,所以在D内u有$(2m+1)$阶强导数.

下一步我们利用以$D^2\varphi$代φ的(4.15). 分部积分给出
$$B[\varphi, D^2u] + (\varphi, L''u) = (\varphi, D^2f)$$
其中L''是具有有界系数的阶数不超过$(2m+1)$的线性算子. 如同前面的论证,我们推出,D^2u在A内是m次强可微的,因此由第1节引理4,u有$m+2$阶强导数. 类似地,逐步进行下去就可完成引理的证明.

从引理16我们直接得到下面的定理:

定理 9　设L满足假定$(A_1)-(A_3)$,并设对某个整数$p\geqslant 0$,有$a^{\rho\sigma}\in C^{\max(1,|\rho|+p)}$. 如果在$D$内$f$有$p$阶强导数且$f\in H^0(D)$,则广义 Dirichlet 问题(第二种提法)的所有的解,特别是定理7,8所建立的那些解,在D内有$(2m+p)$阶强导数. 如果$p\geqslant[n/2]+1$,则解为D中$Lu=f$的古典解,并且它们属于$C^{2m+p-[n/2]-1}(D)$.

本定理的最后部分可从第2节定理2′的推论2得出.

我们将对于$Lu=f$的任何弱解建立其内可微性.

定理 10　设L满足$(A_1)-(A_3)$,并设$a^{\rho\sigma}\in C^{m+1}$. 如果对于$D$的任何紧子区域$A$,$u\in H^0(A)$,且对于所有的$\varphi\in C_c^\infty(A)$有

(4.16)　$|(L^*\varphi, u)| \leqslant \text{const.}|\varphi|_{2m-j}$　　$(0\leqslant j\leqslant 2m)$,

则在D内u有j阶强导数.

定理 11　设L满足$(A_1)-(A_3)$,并设对某个整数$p\geqslant 0$,$a^{\rho\sigma}\in C^{\max(m+1,|\rho|+p)}$. 如果$f$在$D$内有$p$阶强导数,且$u$为$Lu=f$在$D$内的弱解,则$u$在$D$内有$(2m+p)$阶强导数. 如果$p\geqslant[n/2]+1$,则$u$为$Lu=f$在$D$内的古典解,并且它属于
$$C^{2m+p-[n/2]-1}(D).$$

对于 $p=0$,从定理 10 可推出定理 11. 把 $p=0$ 的结果和引理 16 以及定理 $2'$ 的推论 2 结合起来,就可推出 $p>0$ 的定理 11. 于是剩下定理 10 的证明.

定理 10 的证明　用对 j 的归纳法进行证明. 当 $j=0$ 时,论断自明. 现在我们假定对于 $j-1\,(0\leqslant j-1<2m)$ 论断成立,而证明它对 j 成立. 因为(4.16)意味着对于一切的 $\varphi\in C_c^\infty(A)$ 有

$$|(L^*\varphi,u)|\leqslant \text{const.}\,|\varphi|_{2m-j+1},$$

据归纳法假定得出,u 在 D 内有 $(j-1)$ 阶强导数. 于是,如果 $j-1\geqslant m$, 应用引理 15, 其中以 $j-m$ 代替 j, 就可得出对于 j 的论断. 于是剩下 $j-1<m$ 的情形需要考虑.

设 Δ 为 Laplace 算子,考虑算子

$$L_q=(-1)^q\Delta^q+1. \tag{4.17}$$

据第 3 节定理 4 的证明的第一部分以及不等式

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}|\xi^\alpha|^2\leqslant \text{const.}\left\{\sum_{|\beta|=m}|\xi^\beta|^2+1\right\}$$

对所有的 $\varphi\in C_c^\infty(R^n)$, 我们得到不等式

$$(\varphi,L_q\varphi)\geqslant C'|\varphi|_q^2, \tag{4.18}$$

其中 C' 为正的常数. 因此可以应用第 3 节定理 6. 从而对于 D 的任何子区域 $B(\bar{B}\subset D)$, 下面的广义 Dirichlet 问题(两种提法相同)

$$L_qh=u\qquad(\text{在 } B \text{ 中},\ h\in \mathring{H}^q(B))$$

的解 h 存在.

我们取 $q=m-j+1$. 因为 u 在 D 内有 $(j-1)$ 阶强导数,所以由定理 9 即知 h 在 B 内有 $2q+j-1=m+q$ 阶强导数. 把 $u=L_qh$ 代入(4.16), 有

$$|(L^*\varphi,L_qh)|\leqslant \text{const.}\,|\varphi|_{2m-j}\qquad(\varphi\in C_c^\infty(\beta)). \tag{4.19}$$

现在,LL_q 是 $(2m+2q)$ 阶的椭圆算子. 把它写成如下形式:

$$LL_qv=\sum_{|\rho|,|\sigma|\leqslant m}\sum_{|r|=q}(-1)^{|\rho|+q}D^\rho[a^{\rho\sigma}D^\sigma(D^rD^rv)]+Lv.$$

据分部积分,对于任何 $\varphi\in C_c^\infty(B)$, $\phi\in C^{2m+2q}(B)$, 我们得到

$$(4.20)\quad (L^*\varphi, L_q\psi) = (\varphi, LL_q\psi) - \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m+q} (D^\alpha\varphi, b^{\alpha\beta}D^\beta\psi) + B[\varphi, \psi] = \hat{B}[\varphi, \psi].$$

$\hat{B}[\varphi, \psi]$ 是与椭圆算子 LL_q 相应的双线性型，而 $b^{\alpha\beta}$ 是形如 $\pm D^k a^{\rho\sigma}$ 的项之和，其中 $|\alpha| = |\rho| + q - |k|$，$\beta = |\sigma| + q$，而 $0 \leqslant |k| \leqslant q$. 由此得出 $b^{\alpha\beta} \in C^1$.

如果在 $(L^*\varphi, L_q\psi)$ 中，以稍微不同于 (4.20) 中的方式进行分部积分（不把 $L^*\varphi$ 中的导数 D^ρ 转移到纯量积的右边），则我们得到

$$(L^*\varphi, L_q\psi) = \hat{B}[\varphi, \psi] \qquad (\psi \in C^{m+q}(B)).$$

因为 h 在 B 中有 $(m+q)$ 阶强导数，所以通过完备化，对于任何 $\varphi \in C_c^\infty(B)$ 我们得到

$$(L^*\varphi, L_q h) = \hat{B}[\varphi, h].$$

考虑到 (4.19)，对于所有的 $\varphi \in C_c^\infty(B)$，我们得出

$$|\hat{B}[\varphi, h]| \leqslant \text{const.}|\varphi|_{2m-j} = \text{const.}|\varphi|_{m+q-1}.$$

应用引理 14（其中以 $m+q$ 代 m），我们断定 h 在 B 内有 $(m+q+1)$ 阶强导数. 因此，$u = L_q h$ 在 B 内有 $(m+q+1) - 2q = m+1-q = j$ 阶强导数. 因为 B 是 D 的任意子区域且 $\bar{B} \subset D$，所以 u 在 D 内有 j 阶强导数.

从定理 11 容易得到：

推论 设 L 是 D 内形如 $L = \Sigma a_\alpha D^\alpha$ 的 $2m$ 阶强椭圆算子，并设 $a_\alpha \in C^q(D)$，其中对某个整数 $p \geqslant 0$，$q = \max(2m+1, m+p)$. 如果 $f \in C^p(D)$，则 D 内 $Lu = f$ 的任何弱解都属于 $C^{2m+p-[n/2]-1}(D)$. 如果 $a_\alpha \in C^\infty(D)$，$f \in C^\infty(D)$，则 $u \in C^\infty(D)$.

椭圆型方程（不只是强椭圆型方程）古典解的可微性问题，已在第九章第 7 节结束时简要地叙述过.

5. 在边界近旁的可微性

在这一节里我们将证明，如果 ∂D，f 以及 L 的系数是充分光滑的，则对于广义 Dirichlet 问题（任何一种提法）

$$(5.1)\qquad Lu = f \quad (\text{在} D \text{内}), \qquad u \in \mathring{H}^m(D)$$

在 $\overline{D}$ 上的解也是如此．说得更确切些，我们将证明下面的定理．

定理 12 设 L 满足 $(A_1)-(A_3)$，并假定对某个整数 $p\geqslant 1$，有

$$a^{\rho\sigma}\in C^{\max(1,|\rho|+m+p-2)}(\overline{D}),\quad \partial D\in C^{3m+p-2},\quad f\in H^{p-1}(D),$$

则广义 Dirichlet 问题 (5.1) 的任何解 u 必属于 $H^{m+p}(D)$．

利用第 2 节定理 2′ 的推论 2，我们得到：

推论 1 如果关于 $p\geqslant[n/2]$ 定理 12 的假定成立，则 $u\in C^{m-1}(\overline{D})$，因此（据第 2 节引理 12）在通常意义下 u 在 ∂D 上满足边界条件

$$\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}=0,\qquad (j=0,1,\cdots,m-1).$$

如果 $p\geqslant[n/2]+2$，则（据定理 9）u 也是 D 内 $Lu=f$ 的古典解，并且 $u\in C^{m+p-[n/2]-1}(\overline{D})\cap C^{2m+p-[n/2]-2}(D)$．

于是，如果关于 $p\geqslant[n/2]+2$，定理 12 的假定成立，则广义 Dirichlet 问题的解也是古典 Dirichlet 问题的解．

推论 2 设 L 是系数为 $C^\infty(\overline{D})$ 的强椭圆算子，并假定 $f\in C^\infty(\overline{D})$，$\partial D\in C^\infty$，以及 $\varphi_0,\cdots,\varphi_{m-1}$ 为 ∂D 上的 C^∞ 函数，则古典 Dirichlet 问题 (3.5)，(3.8) 的任何解属于 $C^\infty(\overline{D})$．

如果 $\varphi_0=\cdots=\varphi_{m-1}=0$，则从第 2 节定理 2′ 的推论 2 和定理 12 可得出这一推论．因此，如果我们能构造出满足条件 (3.8) 的函数 $\Phi(x)\in C^\infty(\overline{D})$，那么把前面的特殊情形应用于 $u-\Phi$，就可完成证明．为了构造 Φ，我们以 $\sigma(x)$ 记任意的点 $x\in D$ 到 ∂D 的距离．如果 $\sigma(x)$ 充分小，则 x 位于某点 x^* 处 ∂D 的单位内向法线上，且 $\sigma(x)=|x-x^*|$（比较第三章第 8 节）．如果 (3.8) 中的 ν 指明内向法线，那么我们取

$$\Phi(x)=\zeta(x)\sum_{\lambda=0}^{m-1}\frac{(\sigma(x))^\lambda}{\lambda!}\varphi_\lambda(x^*),$$

其中 ζ 是 C^∞ 函数，它在 ∂D 的某个充分小的开邻域 N 之外为零，在 ∂D 的某个邻域 $N_0(\overline{N}_0\subset N)$ 内等于1．

定理 12 的证明 据定理 9 我们已得知，对于 D 的任何紧子

区域 A，$u\in H^{2m+p-1}(A)$．如果我们能证明，对于任何 $x^0\in\partial D$，存在邻域 N^*，使得 $u\in H^{m+p}(N^*\cap D)$，那么利用第 1 节引理 5 就可以完成本定理的证明．由于 u 在 D 内有 $(m+p)$ 阶强导数，并考虑到第 1 节定理 1，因此只剩下证明所有这些导数都属于 $H^0(N^*\cap D)$．

只要考虑特殊情形就可以了：x^0 有邻域 N，使得 $N\cap\partial D$ 在超平面 $x_n=0$ 上，且 $N\cap D$ 在半空间 $x_n>0$ 中．事实上，象证明第 1 节定理 1 那样作一个局部的变换，就可以把一般情形化为这种特殊情形．

设 $\partial N_2=\overline{N\cap D}\cap\{x_n=0\}$，$\partial N_1$ 为 $N\cap D$ 的边界的其余部分．设 A 是 $N\cap D$ 的子区域，它的边界由含于 ∂N_2 内部的闭子区域 ∂A_2，和含于 $N\cap D$ 中的 ∂A_1（∂A_1 到 ∂N_1 的距离为有界的集合）组成．我们在证明中将使用以下的记号：

$$x=(x_1,\cdots,x_{n-1}),\quad y=x_n,\quad D_x^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}.$$

对所有的 $|\alpha|\leqslant m+p-1$，我们应当有

$$|D_x^\alpha u|_m^A<\infty \tag{5.2}$$

即，对于所有的 $|\alpha|\leqslant m+p-1$，$|\beta|\leqslant m$，有

$$D_x^\alpha D^\beta u\in H^0(A). \tag{5.3}$$

对于 $|\alpha|=1$，为了验证 (5.2)，可仿照证明第 4 节引理 14 进行． 在 ∂N_1 的邻域中取 ζ 为零，而在 A 上 ζ 等于 1． 对于任何 $x_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 我们作差商．因为 u 按范数 $|\ |_m^{N\cap D}$ 是在边界 ∂N_2 附近为零的无穷可微函数的极限，所以对于 ζu 和 $(\zeta u)^h$ 而言，也是如此．因此，在导出形如 (4.10) 的不等式之后，我们就可以代入 $\varphi=v^h$． 利用第 2 节引理 11′，12，我们得到 D_xu 属于 $H^m(A)$．而且，D_xu 按范数 $|\ |_m^A$ 是某个序列 $\{v^{hj}\}$ 的算术平均序列的极限，因此也是在边界 ∂N_2 附近为零的无穷可微函数序列的极限．

若考虑 $B[D_x\varphi,u]$ 并在分部积分后把前面的结果用于 D_xu，我们可以类似于引理 15 进行下去．步步仿照引理 15，16 的证明

进行，即可完成 (5.2) (或者(5.3))的证明.

为了证明定理 12，我们必须证明对所有 $|r| \leqslant m+p$，

(5.4) $$D^r u \in H^0(A).$$

鉴于(5.3)，剩下只须考虑在(5.3)中不出现的那些导数 $D^r u$. 为清晰起见，首先考虑 $m=1$ 的情形，即

(5.5) $$Lu = \sum_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha D_x^\alpha + \sum_{|\alpha|\leqslant 1} a_{1\alpha} D_y D_x^\alpha + a_2 D_y^2 u = f$$

(几乎处处).

假定 $p=1$. $D_y^2 u$ 是在 (5.4) 而不在 (5.3) 中出现的唯一的导数. 因为 $a_2 \neq 0$，所以可以由(5.5)估计 $D_y^2 u$，于是(5.4)得证.

如果 $p=2$，把 D_x 作用于 (5.5) 两边，那么

(5.6) $$L(D_x u) = -L'u + D_x f,$$

其中 L' 为阶数不超过 $2m=2$ 阶的线性算子. $D_y^2 D_x u$ 是 (5.6) 中尚不知其属于 $H^0(A)$ 的唯一的导数. 因为它的系数 $a_2 \neq 0$，所以它也属于 $H^0(A)$. 下面应用 D_y 于 (5.5) 的两边，我们得到 $D_y^3 u \in H^0(A)$. 于是对于 $p=2$，(5.4) 证明完毕.

对于任意的 p，我们首先把 D_x^{p-1} 作用于 (5.4) 的两边，于是可以断定 $D_x^{p-1} D_y^2 u \in H^0(A)$，然后应用 $D_x^{p-2} D_y$，等等.

现在设 $m>1$，首先考虑 $p=1$ 的情形. 出现在(5.4)但不出现在 (5.3) 的唯一的导数是 $D_y^{m+1} u$，和 $m=1$ 的情形大不相同，我们不可能直接由方程 $Lu=f$ 估计它. 所有出现在 Lu 但不出现在(5.3)中的导数都有 $D_y^{m+1} D^\beta u$ 的形式，其中 $0 \leqslant |\beta| \leqslant m-1$. 因此，它们的和可写成如下形式

(5.7) $$D_y^m g,$$

其中

$$g = \sum_{|\beta|\leqslant m} b_\beta D^\beta u,$$

并且 g 中 $D_y^m u$ 的系数 δ 在 A 中不为零. 把方程 $Lu=f$ 写成如下形式

(5.8) $$L_0 u + D_y^m g = f,$$

我们就可断定 $D_y^m g \in H^0(A)$. g 也属于 $H^0(A)$. 假定 A 是一个矩形(因为我们可以这样假定),并对函数 g(作为变量 y 的函数)在含于 A 的闭矩形 A^* 中利用第 2 节引理 8,然后对 x 积分并让 $A^* \to A$,我们就得到 $D_y^i g \in H^0(A)$ $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$. 除 $\delta D_y^{m+1} u$ 外,$D_y g$ 中所有的项都已知道属于 $H^0(A)$(据 (5.3)). 因此,$D_y^{m+1} u \in H^0(A)$.

其次,考虑 $p = 2$ 的情形. 把 D_x 作用于(5.8)的两边,我们得到

$$D_x L_0 u + D_y^m D_x g = D_x f. \tag{5.9}$$

$D_x L_0 u$ 中 u 的所有导数已出现在 (5.3) 中,因此

$$D_y^m(D_x g) \in H^0(A).$$

又因为 $D_x g \in H^0(A)$,(象 $p = 1$ 的情形应用第 2 节引理 8)从而 $D_y D_x g \in H^0(A)$. 除 $\delta D_y^{m+1} D_x u$ 之外,$D_y D_x g$ 中所有的项都已知道属于 $H^0(A)$(据 (5.3)). 因此 $D_y^{m+1} D_x u \in H^0(A)$.

第三,我们利用 $D_y^2 g \in H^0(A)$ 这一事实. 考虑到 (5.3) 以及 $D_y^{m+1} D_x u \in H^0(A)$,我们得到 $D_y^{m+2} u \in H^0(A)$. 于是 $p = 2$ 的情形证毕.

对于一般的 $p \leqslant m$,我们首先把 D_x^{p-1} 作用于 (5.8)的两边,并利用 $D_y D_x^{p-1} g \in H^0(A)$ 这个事实,即可断定 $D_x^{p-1} D_y^{m+1} u \in H^0(A)$. 其次,把 D_x^{p-2} 作用于 (5.8) 的两边,并利用 $D_y^2 D_x^{p-2} g \in H^0(A)$,即可断定 $D_x^{p-2} D_y^{m+2} u \in H^0(A)$,等等. 最后,利用 $D_y^p g \in H^0(A)$,就得出 $D_y^{m+p} u \in H^0(A)$.

剩下考虑 $p > m$ 的情形. 如果 $p = m + 1$,把 D_x 作用于 $Lu = f$ 的两边,我们得到

$$L(D_x u) = L' u + D_x f = \tilde{f},$$

其中 L' 是不超过 $2m$ 阶的线性算子,因此 $\tilde{f} \in H^0(A)$. 应用 $p = m$ 的结果我们可以推断出,对所有的 $|\alpha| \leqslant 2m$,$D_x D^\alpha u \in H^0(A)$. 把 D_y 作用于 $Lu = f$ 的两边,我们得知,除 $\delta D_y^{2m+1} u$ 之外的所有的项都已知道属于 $H^0(A)$. 因此,$D_y^{2m+1} u \in H^0(A)$.

如果 $p = m + 2$,首先我们把 D_x^2 作用于 $Lu = f$,得到对所有

$|\alpha| \leqslant 2m$，$D_x^2 D^\alpha u \in H^0(A)$．其次，我们应用 $D_x D_y$，得到对所有 $|\alpha| \leqslant 2m, D_x D_y D^\alpha u \in H^0(A)$.最后，应用 D_y^2 得出 $D_y^{m+2} u \in H^0(A)$，于是证明完毕.

一般说来，如果 $p = m + k$，首先我们把 D_x^k 作用于 $Lu = f$，然后应用 $D_x^{k-1} D_y$，等等.

以下，我们给出今后讨论抛物型方程时需要的某些椭圆型方程的补充结果．我们需要下面的定义：

定义 我们说 $2m$ 阶椭圆算子 $L(x, D_x)$ 在区域 B 内满足根条件（root condition），如果对于每一个 $x \in B$ 和每一对线性无关的实矢量 ξ、η，λ 的多项式 $L_0(x, \xi + \lambda\eta)$ 恰好有 m 个虚部为正的根．这里 L_0 为 L 的主部.

如果 $n \geqslant 3$，或者 L_0 的系数是实的，根条件是满足的

现在我们叙述先验估计的重要结果.

定理 13 设 $L = \sum a_\alpha D^\alpha$ 为有界区域 D 内椭圆性模 $\geqslant \delta$ 的椭圆算子，假定 $a_\alpha \in C^p(\overline{D})$ 及其首 p 阶导数的模都由常数 H 所限定，其中 p 为非负整数，又假定主系数有连续模 ω，且 L 在 $\overline{D}$ 上满足根条件．设 $f \in H^p(D)$，并假定 ∂D 可用有限个邻域 N_j 来覆盖，使得每个 $N_j \cap \partial D$ 都可用首 $2m + p$ 阶导数连续且由常数 K 所限定的函数来表示.

如果 $u \in C^{2m}(D) \cap C^{m-1}(\overline{D})$，且在 D 内 $Lu = f$，在 ∂D 上 $\partial^j u / \partial \nu^j = 0 (j = 0, 1, \cdots, m-1)$，又 $|u|_{2m} < \infty$，那么，

$$|u|_{2m+p} \leqslant M|f|_p + M'|u|_0, \tag{5.10}$$

其中 M 和 M' 都是仅依赖于 H，ω，δ，K 和 p 的常数．而且，若 Dirichlet 问题至多有一个解，则 $M' = 0$，即

$$|u|_{2m+p} \leqslant M|f|_p. \tag{5.11}$$

至于仔细的证明，读者可查阅[1; 704—706].

借助于定理 13 和定理 12 的推论 1，我们建立下面的：

定理 14 设 p 为不小于 1 的整数，且 L 为在 $\overline{D}$ 上满足根条件的强椭圆算子．假定 ∂D 充分光滑，L 的系数在 $\overline{D}$ 上充分光滑，并且 Dirichlet 问题至多有一个解，则对任何 $f \in H^p(D)$，广义

Dirichlet 问题(5.1)存在唯一解，且(5.11)成立.

注意，定理 13 中解 u 属于 $C^{2m}(D)\cap C^{m-1}(\bar{D})$ 的假定，对于本定理并不是必须的.

证明　对于D的任何紧子区域 A，可以用平滑算子 $J_\epsilon f$ 按 $H^p(A)$ 的范数逼近 f. 在边界的小邻域中，我们可以作变换把 ∂D 映射成超平面上的一部分，然后用证明第 1 节引理 6 时所引进的形如 $J'_\epsilon f$ 的平滑算子来逼近 f. 象在证明第 1 节引理 5 那样利用单位分解，只要 $\partial D\in C^\nu$，我们就可以构造属于 $C^\nu(\bar{D})$ 的函数 f_j 的序列，使得当 $j\to\infty$ 时有 $|f_j-f|_p^D\to 0$.

考虑 Dirichlet 问题

$$Lu_j=f_j \qquad (\text{在}D\text{内}),$$

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial\nu^k}=0 \qquad (\text{在 }\partial D\text{ 上}) \qquad (k=0,1,\cdots,m-1).$$

利用第 3 节定理 8 和定理 12 的推论 1，由唯一性假定，得出存在 u_j，并且它在 $\bar{D}$ 上充分光滑. 因此可以应用定理 13. 我们得到

$$|u_i-u_j|_{2m+p}\leqslant M|f_i-f_j|_p.$$

于是，u_j 构成 $H^{p+2m}(D)$ 中的 Cauchy 序列. 因为它的极限是广义 Dirichlet 问题 (5.1) 的唯一解，又因为对于每一对 u_j、f_j，(5.11) 成立，所以 (5.11) 对于 u 也成立.

附注　通过以充分光滑的边界和算子分别逼近 ∂D 和 L，我们可以在 ∂D 和 L的可微性假定方面改进定理 14. 不过，往后我们并不需要它.

最后，我们考虑 L 的系数依赖于在有界区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上变化的实参数 t 的情形. 于是

$$L(t)u=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_\alpha(x,t)D^\alpha u. \tag{5.12}$$

我们假定，对于每个 t，Dirichlet 问题 (5.1) 至多有一个解，以 $L^{-1}(t)f$ 记这个解.

定理 15　设 k, p 为任意非负整数，并设 $L(t)$ 对所有的

$t(a \leqslant t \leqslant b)$ 是强椭圆的并满足根条件. 假设 ∂D 充分光滑，且对 $x \in \bar{D}$, $a \leqslant t \leqslant b$, 系数 $a_\alpha(x, t)$ 也是充分光滑的，则从区间 (a, b) 到 $H^{2m+p}(D)$ 中的映射 $t \to L^{-1}(t)f$ 是 k 次连续可微的.

证明　　考虑函数

$$u^h(x, t) = \frac{u(x, t+h) - u(x, t)}{h},$$

其中 $u(x, t) = (L^{-1}(t)f)(x)$. 利用规则 (4, 4)，在 D 内我们得到

$$Lu^h = F_h, \qquad (u^h \in \mathring{H}^m(D)),$$

其中 $F_h(x, t) = -\Sigma a_\alpha^h(x, t) D^\alpha u(x, t+h)$. 只要 $t+h$ 仍在 (a, b) 的闭子集上，则利用定理 14 得出，$|u^h|_{2m+p}$ 与 h 无关地有界. 因此

(5.13)　　$|u(\cdot, t+h) - u(\cdot, t)|_{2m+p} \leqslant \text{const.}|h|,$

其中 $u(\cdot, t)$ 是这样的函数，它在每点 x 处的值为 $u(x, t)$. (5.13) 表明，映射 $t \to L^{-1}(t)f$ 是从 (a, b) 到 $H^{2m+p}(D)$ 的连续映射. 于是 $k=0$ 的情形证毕.

为了对于 $k=1$ 证明本定理，我们在方程 $L(t)u=f$ 两边对 t 微分，如果 $v = \partial u/\partial t$ 存在，则在 D 中它必须满足

(5.14)　　$L(t)v = \hat{F}, \qquad (v \in \mathring{H}^m(D)),$

其中 $\hat{F}(x, t) = -\Sigma[\partial a_\alpha(x,t)/\partial t] D^\alpha u(x,t)$. 注意到 $\hat{F} \in H^p(D)$，就得出 (5.14) 存在唯一解. 而且利用 (5.13) 容易验证，当 $h \to 0$ 时 $|F_h - \hat{F}|_p \to 0$，所以应用定理 14 我们得到，当 $h \to 0$ 时，

$$|u^h(\cdot, t) - v(\cdot, t)|_{2m+p} \to 0.$$

于是，从 (a, b) 到 $H^{2m+p}(D)$ 的映射 $t \to L^{-1}(t)f$ 对 t 是可微的. 其次，利用定理 14 和(5.13)通过估计 $v^h(\cdot, t)$ 就可以证明：$v(\cdot, t)$ 作为一个在 $H^{2m+p}(D)$ 中取值的函数，是关于 t 连续变化的. 从而对于 $k=1$ 本定理证毕.

类似地逐步进行下去，就可对任何 k 得出本定理的证明.

从前面的证明我们得到：

推论　　对 $a < t < b$，不等式

$$|D_t^j L^{-1}(t)f|_{2m+p} \leqslant \text{const.}|f|_p \qquad (j = 0, 1, \cdots, k)$$

成立.

6. 抽象存在定理

本节的主要结果是定理 17.

设 H, V 是两个 Hilbeit 空间. 以 $|f|$ 记 $f \in H$ 的范数，而以 $\|u\|$ 记 $u \in V$ 的范数. H 的元素 f, g 的纯量积记作 (f, g),而 V 中元素 u, v 的纯量积记作 $((u, v))$. 假定 V 是 H 的线性子空间，且对任何 $u \in V$,

$$\|u\| \geqslant k|u| \qquad (k \text{ 为常数}).$$

最后,假定 V 在 H 中稠密.

例: $H = L^2(D)$, $V = \mathring{H}^m(D)$.

设 $a(u, v)$ 为 V 上的连续双线性型,即从 $V \times V$ 到复数域的映射 $(u, v) \to a(u, v)$ 是连续的,且关于 u 是线性的,而关于 v 是反线性的. 众所周知,当且仅当双线性型 $a(u, v)$ 为有界时,即当且仅当

$$(6.1) \qquad |a(u, v)| \leqslant C_1\|u\|\|v\| \qquad (C_1 \text{ 为常数})$$

时,双线性型 $a(u, v)$ 是连续的.

对于固定的 v, $a(u, v)$是 $u \in V$ 的连续线性泛函. 因此,V 中有唯一的元素存在,设为 A_0v, 使得对于所有的 $u \in V$ 有

$$(6.2) \qquad a(u, v) = ((u, A_0v)).$$

A_0 是 V 上（到 V 中）的线性算子，由(6.1)得出，A_0 也是连续的.

类似地

$$(6.3) \qquad a(u, v) = ((A_1u, v)),$$

其中 A_1 是 V 上的连续性算子.

以 N 记这样的元素 $u \in V$ 的集合,当 V 定义了 H 的拓扑（即范数)时,对于这些元素 u, 反线性映射

$$(6.4) \qquad v \to a(u, v)$$

在 V 上连续. 因为 V 在 H 中稠密，于是可把(6.4)扩张成为 H 上的连续反线性泛函,因此,在 H 中存在唯一的元素,设为 Au, 使得

$$(6.5) \qquad a(u, v) = (Au, v).$$

A 是定义域为 $d(A)=N$ 的线性算子,一般说来是无界的.

引理 17 如果对于所有的 $v\in V$,

(6.6) $$|a(v,v)|\geqslant\alpha\|v\|^2 \quad (\alpha\text{ 为正的常数}),$$

则对于每一个 $f\in H$, 存在唯一的元素 $u\in d(A)$,使得 $Au=f$.

证明 $F(v)=(\overline{f,v})$ 是 H 上的连续线性泛函. 因此也是 V 上的连续线性泛函. 然后应用第 3 节定理 5 即可.

今后我们需要引理 17 的各种不同的更为精巧的(表达形式),现在就来推导它.

设 F 是一 Hilbert 空间. 以 $(u,v)_F$ 记 F 的元素 u、v 的纯量积,而以 $\|u\|_F$ 记 $u\in F$ 的范数. 设 Φ 是 F 的线性子空间.以 $(((\varphi,\phi)))$ 记 Φ 的元素 φ, ϕ 的纯量积,而以 $|||\varphi|||$ 记 $\varphi\in\Phi$ 的范数,即 $|||\varphi|||=\{(((\varphi,\varphi)))\}^{1/2}$. 我们假定,对于所有的 $\varphi\in\Phi$,

(6.7) $$\|\varphi\|_F\leqslant C_1|||\varphi||| \quad (C_1\text{ 为常数}),$$

但我们并不假定 Φ 是完备空间(即 Hilbert 空间),或者 Φ 在 F 中稠密.

设 $E(u,\varphi)$ 是 $F\times\Phi$ 上的双线性型,并假定:

(6.8) 对每个 $\varphi\in\Phi$, 映射 $u\to E(u,\varphi)$ 在 F 上连续,

(6.9) 对所有的 $\varphi\in\Phi$, $|E(\varphi,\varphi)|\geqslant\alpha|||\varphi|||^2$ (α 为正的常数).

定理 16 设 (6.8),(6.9) 成立. 如果 $\varphi\to L(\varphi)$ 是 Φ 上的连续反线性泛函,则存在 F 中的元素 u, 使得对所有 $\varphi\in\Phi$, 有

(6.10) $$L(\varphi)=E(u,\varphi).$$

证明 由 (6.8), 对每一个 $\varphi\in\Phi$,

(6.11) $$E(u,\varphi)=(u,K\varphi)_F,$$

K 是从 Φ 到 F 中的线性算子. 因为 $K\varphi=0$ 意味着

$$0=|(\varphi,K\varphi)_F|=|E(\varphi,\varphi)|\geqslant\alpha|||\varphi|||^2,$$

即 $\varphi=0$, 所以 K 是一对一的映射. 令 $\mathfrak{A}=K\Phi$. 于是 K 的逆 R_0 定义在 $\mathfrak{A}$ 上,且它的值域是 Φ. 令 $K\varphi=a$, $\varphi=R_0a$, 我们有

$$\alpha|||R_0a|||^2\leqslant|E(\varphi,\varphi)|=|(\varphi,K\varphi)_F|\leqslant\|\varphi\|_F\|K\varphi\|_F$$
$$\leqslant C_1|||\varphi|||\|K\varphi\|_F,$$

即 $|||R_0a|||\leqslant(C_1/\alpha)\|a\|_F$. 于是 R_0 是从 $\mathfrak{A}$ 到 Φ 上的连续线性算

子. 因此我们可以把 R_0 扩张成为从(关于 F 的拓扑取的)闭包 $\mathfrak{A}$ 到 $\hat{\Phi}$ 中的连续线性算子 $\bar{R}_0$, $\hat{\Phi}$ 为 Φ(关于范数 $|||\varphi|||$ 的)完备化空间.

给定的泛函 $L(\varphi)$ 也可以扩张成为 $\hat{\Phi}$ 上的连续反线性泛函, 因此, 对某个 $\xi_L \in \hat{\Phi}$, $L(\varphi) = (((\xi_L, \varphi)))$. 鉴于 (6.11), 对于所有的 $\varphi \in \Phi$, (6.10) 等价于 $(((\xi_L, \varphi))) = (u, K\varphi)_F$,即对所有的 $a \in \mathfrak{A}$,

(6.12) $$(u, a)_F = (((\xi_L, R_0 a))).$$

剩下找出满足 (6.12) 的 u.

设 P 是相应于 $\mathfrak{A}$ 的投影算子(作为 F 的一个闭子空间). 于是 $R = \bar{R}_0 P$ 是从 F 到 $\hat{\Phi}$ 的连续线性算子. (对于所有的 $\hat{\varphi} \in \hat{\Phi}, f \in F$, 由 $(((\hat{\varphi}, Rf))) = (R^*\hat{\varphi}, f)_F$ 所定义的) R 的伴随算子 R^* 是从 $\hat{\Phi}$ 到 F 中的连续线性算子,并且对于所有的 $a \in \mathfrak{A}$, (6.12) 变成

(6.13) $$(u, a)_F = (((\xi_L, Ra))) = (R^*\xi_L, a)_F.$$

于是 $u = R^*\xi_L$ 满足 (6.13),因此它也满足 (6.10).

现在我们导出某些微分不等式, 它们在证明这一节的主要结果定理 17 时要用到.

设 X 是一 Hilbert 空间, $|v|_X$ 是 $v \in X$ 的范数. 我们说从区间 $a < t < b$ 到 X 中的函数 $f(t)$ 属于 $L^2(a, b; X)$, 如果

$$\int_a^b |f(x)|_X^2 \, dt < \infty.$$

我们令 $L^2(X) = L^2(-\infty, \infty; X)$,

(6.14) $$\|f\|_{L^2(X)} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|_X^2 dt\right\}^{1/2}.$$

对任意非负整数 k,以 $D^k(X)$ 记导数 $f'(t), \cdots, f^{(k)}(t)$ 连续且属于 $L^2(X)$ 的一切函数 $f(t)$ 所组成的集合. $L^2(X)$ 是范数为(6.14)的 Hilbert 空间,而 $D^k(X)$ 是范数为

(6.15) $$\|f\|_{D^k(X)} = \left\{\sum_{p=0}^{k} \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(p)}(t)|_X^2 dt\right\}^{1/2}$$

的纯量积空间. 注意,导数 $f'(t)$ 被定义为 $[f(t+h) - f(t)]/h$ 当 $h \to 0$ 时在 X 中的极限, 而 $L^2(X)$ 的完备性可以通过用 X 的固定正交基底表示函数 $f(t)$, 然后利用 (复值函数) 空间 $L^2(-\infty, \infty)$

的完备性来证明.

以 $D_+^k(X)$ 记 $D^k(X)$ 中对所有 $-\infty < t < 0$ 满足 $f(t) = 0$ 的一切函数 $f(t)$ 的集合. $D(X)$ 记从 $-\infty < t < \infty$ 到 X 中的且在有界区间之外为零的一切无穷可微函数 $f(t)$ 的集合. 最后,我们令 $Df(t) = f'(t)$.

引理 18 设 $\varphi \in D(X)$. 对任意 $\gamma > 0$ 有

(6.16) $$\|e^{-\gamma t}\varphi(t)\|_{L^2(X)} \leqslant \frac{1}{\gamma}\|e^{-\gamma t}D\varphi(t)\|_{L^2(X)}.$$

证明 由分部积分有

$$2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\gamma t}(D\varphi(t),\ \varphi(t))_X dt$$
$$= 2\gamma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\gamma t}|\varphi(t)|_X^2 dt.$$

(例如,借助于 X 固定的正交基把函数展开即可得到证明.)
因此,

$$\gamma\|e^{-\gamma t}\varphi\|_{L^2(X)}^2 \leqslant \|e^{-\gamma t}D\varphi\|_{L^2(X)}\|e^{-\gamma t}\varphi\|_{L^2(X)},$$

于是推出 (6.16).

推论 如果 $\varphi \in D(X)$, 则对任意整数 $k > 0$ 有

(6.17) $$\|e^{-\gamma t}\varphi(t)\|_{L^2(X)} \leqslant \frac{1}{\gamma^k}\|e^{-\gamma t}D^k\varphi(t)\|_{L^2(X)}.$$

引理 19 设 $A(t)\,(-\infty < t < \infty)$ 为从 X 到自身的连续线性算子族, 并假定对于 X 中每一对 f、g, $t \to (A(t)f,\ g)_X$ 是 k 次连续可微函数,且对所有的 $-\infty < t < \infty$,

(6.18) $$|D^i(A(t)f,\ g)_X| \leqslant \mathrm{const.}\,|f|_X|g|_X \quad (0 \leqslant i \leqslant k).$$

最后,假定对所有的 $-\infty < t < \infty$, $f \in X$, 有

(6.19) $$\mathrm{Re}(A(t)f,\ f) \geqslant \alpha|f|_X^2 \qquad (\alpha\text{ 为正的常数}),$$

则存在常数 $\gamma_0 > 0$, 使对一切 $\gamma \geqslant \gamma_0$ 和所有的 $\varphi \in D(X)$,

(6.20) $$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\gamma t}D^k(A(t)\varphi(t)),\ e^{-\gamma t}D^k\varphi(t))_X dt$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{2}\|e^{-\gamma t}D^k\varphi\|_{L^2(X)}.$$

应该讲清楚，(6.20) 中所用的记号是

(6.21) $(D^k(A(t)\varphi(t)), g)_X = D^k(A(t)\varphi(t), g)_X \qquad (g\in X)$,

并且当 $\varphi(t)$ 为 k 次连续可微时，事实上 (6.21) 的右边存在，而且 Leibniz 规则成立．于是

(6.22) $$(D^k(A(t)\varphi(t)), g)_X = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(A^{(j)}(t)\varphi^{(k-j)}(t), g)_X,$$

其中 (依照 (6.21))

(6.23) $(A^{(j)}(t)f, g)_X = (D^jA(t)f, g)_X = D^j(A(t)f, g)_X$.

证明　使用规则 (6.22) 我们可知，(6.20) 左边等于

(6.24) $$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-2\gamma t}A(t)D^k\varphi(t), D^k\varphi(t))_X dt + S(\varphi),$$

其中

$$S(\varphi) = \sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-2\gamma t}A^{(j)}(t)D^{k-j}\varphi(t), D^k\varphi(t))_X dt.$$

考虑到 (6.19)，(6.24) 中第一项不小于

$$\alpha\|e^{-\gamma t}D^k\varphi\|^2_{L^2(X)}.$$

因此，只要证明下式就够了：

(6.25) $$|S(\varphi)| \leqslant \frac{\alpha}{2}\|e^{-\gamma t}D^k\varphi\|^2_{L^2(X)}.$$

现在从 (6.18)，(6.23) 推出，$A^{(j)}(t)$ $(0\leqslant j\leqslant k)$ 是关于 t 一致有界的算子．因此对某个常数 b_1 有

$$|S(\varphi)| \leqslant b_1\sum_{j=1}^{k}\|e^{-\gamma t}D^{k-j}\varphi\|_{L^2(X)}\|e^{-\gamma t}D^k\varphi\|_{L^2(X)}.$$

利用 (6.17) 我们得到

$$|S(\varphi)| \leqslant b_1\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{\gamma^j}\right)\|e^{-\gamma t}D^k\varphi\|^2_{L^2(X)}.$$

取 γ_0 使 $(b_1k/\gamma_0)\leqslant\alpha/2$，则当 $\gamma\geqslant\gamma_0$ 时就得出 (6.25)．

附注 1　设 $D_+(X)$ 是由所有在 $0\leqslant t<\infty$ 有定义的函数 $\varphi(t)$ 所组成的空间，其中每个 $\varphi(t)$ 无穷可微且对所有充分大的

t 为零. 设 $\varphi \in D_+(X)$. 为方便计，扩充 φ 到 $-\infty < t < 0$，使 $\varphi = 0\,(-\infty < t < 0)$. 若 $\varphi(0) = 0$，则 (6.16) 成立（证明是一样的）. 同样地，若 $\varphi \in D_+(X)$ 且

$$\varphi(0) = D\varphi(0) = \cdots = D^{k-1}\varphi(0) = 0, \tag{6.26}$$

则(6.17)成立，因此(6.20)仍有效（证明是一样的）.

附注 2 如果 φ 对于 $0 \leqslant t < \infty$ 无穷可微，满足 (6.26)，当 $t < 0$ 时为零，但没有紧支集，且

$$\sum_{m=0}^{k} \int_0^\infty |e^{-\gamma t} D^m \varphi(t)|_X^2 dt < \infty,$$

则把 (6.20) 应用于 $\zeta_T\varphi$，然后让 $T \to \infty$，就推出不等式 (6.20)，其中 ζ_T 为满足如下条件的无穷可微函数:

$$\zeta_T = 1\,(t \leqslant T);\ \zeta_T = 0\,(t \geqslant T+1),$$

$$|D^m \zeta_T(t)| \leqslant \text{const.}\ (T \leqslant t \leqslant T+1,\ 0 \leqslant m \leqslant k).$$

在证明引理 19 及其后面的两条附注时，我们利用了 φ 为 k 次连续可微的事实，而根本没有用到 φ 有更高阶的可微性. 因此:

引理 20 如果 $A(t)$ 如引理 19 所述，则对于使 $e^{-\gamma t}\varphi \in D_+^k(X)$ 的任何 φ，不等式 (6.20) 成立.

现在我们引进弱导数的概念.

定义 设 $g \in L^2(a, b; X)$，对于所有满足 $\psi(a) = \psi(b) = 0$ 的连续可微函数 ψ（如果 $b = \infty$，我们就要求对所有充分大的 t，ψ 为零；在 $a = \infty$ 的情况下有类似的要求），我们考虑反线性映射

$$\psi(t) \to -\int_a^b (g(t), \psi'(t))_X dt.$$

如果映射是连续的，则存在唯一的函数 $v(t) \in L^2(a, b; X)$，使得

$$-\int_a^b (g(t), \psi'(t))_X dt = \int_a^b (v(t), \psi(t))_X dt.$$

此时我们说 $v(t)$ 是 $g(t)$ 的**弱导数**，并写成 $g'(t) = v(t)$ (w.d.). 类似地，如果对于所有其首 $k-1$ 阶导数在 $x = a$, $x = b$ 为零的 k 次连续可微函数 $\psi(t)$，有

$$(-1)^k \int_a^b (g(t), \psi^{(k)}(t))_X dt = \int_a^b (w(t), g(t))_X dt,$$

就说 $w(t)$ 是 $g(t)$ 的 k 阶弱导数，并记作 $g^{(k)}(t) = D^k g(t) = w(t)$ (w.d.). 注意，当 $g = 0$ 时，$D^k g = 0$(w.d.).

在前面我们已定义了空间 $D^k(X)$，它们都不是完备的空间. 它们的完备化空间记作 $H^k(-\infty, \infty; X)$. 更一般地，我们引进范数

$$\|f\|_{H^k(a,b;X)} = \left\{ \sum_{p=0}^{k} \int_a^b |f^{(p)}(t)|_X^2 dt \right\}^{1/2} \tag{6.27}$$

并以 $H^k(a, b; X)$ 记范数为有限的 k 次连续可微函数的(关于这一范数的)完备化空间. 这些空间是类似于第 1 节中所引进的空间 $H^k(D)$. 可以认为，$H^k(a, b; X)$ 就是 $L^2(a, b; X)$ 的子空间. 如果对于任何 $a < \alpha < \beta < b$，有 $f \in H^k(\alpha, \beta; X)$，我们就说 $f(t)$ 有 k 阶**强导数**. 如果 $\{u_m(t)\}$ 按 $H^k(\alpha, \beta; X)$ 的范数是收敛于 $L^2(\alpha, \beta; X)$ 中的 $f(t)$ 的 Cauchy 序列 ($u_m(t)$ 是 k 次连续可微的)，我们就称在 $L^2(\alpha, \beta; X)$ 中 $\{D^j u_m(t)\}$ 的极限为 $f(t)$ 的 **j 阶强导数**，写成 $D^j f(t)$ (s.d.)，或 $f^{(j)}(t)$ (s.d.). 强导数是弱导数. 读者可以验证(比较第 1 节定理 1)，如果 $f(t)$ 在有限区间 (a, b) 中有 k 阶强导数，而且所有这些导数都属于 $L^2(a, b; X)$，则 $f \in H^k(a, b; X)$.

对于 $\zeta(a) = \zeta(b) = 0$ 的任意连续可微实值函数 $\zeta(t)$，和任何连续可微的 $v(t)$，下面的关系式成立:

$$\begin{aligned} \int_a^b (u'(t), v(t))_X \zeta(t) dt &= -\int_a^b (u(t), v'(t))_X \zeta(t) dt \\ &\quad - \int_a^b (u(t), v(t))_X \zeta'(t) dt, \end{aligned} \tag{6.28}$$

其中 $u'(t)$ 是 u 的弱导数. 通过完备化，对于任何 $v \in H'(a, b; X)$ 它也成立.

特别地，如果 $u \in H^1(a, b; X)$，取 $v = u$，则我们得到

$$(u'(t), u(t))_X + (u(t), u'(t))_X = \frac{d}{dt}(u(t), u(t))_X \tag{6.29}$$

(几乎处处)，

其中右边的导数是(实值函数的)弱导数.

为了以后查阅,我们写出关系式

(6.30) $\quad \frac{d}{dt}(u(t), v)_X = (u'(t), v)_X$ 几乎处处 (w.d.).

它是 (6.28) 的一种特殊情形.

我们现在来叙述本节的主要结果. 如同在本节开始时那样,已知两个 Hilbert 空间 H 和 V. 在 V 上给定了连续双线性型的族 $a(t; u, v)$ $(-\infty < t \leqslant T$, 对某个 $0 < T < \infty)$. 我们假定:

(B_1) 对于 V 中每个 u, v, 函数 $t \to a(t; u, v)$ 关于 $t(-\infty < t \leqslant T)$ 是 $k(k \geqslant 1)$ 次连续可微的,并且

(6.31) $$|D_t^j a(t; u, v)| \leqslant M\|u\| \|v\|$$
$$(u \in V, \ v \in V, \ 0 \leqslant j \leqslant k).$$

(B_2) 存在常数 λ, 使得

(6.32) $$\operatorname{Re} a(t; u, v) + \lambda|v|^2 \geqslant \alpha\|v\|^2$$
$$(v \in V, \ \alpha \text{ 为正的常数}).$$

定理 17 设(B_1), (B_2)得到满足,而 $g(t)$ 为满足如下条件的函数:

(6.33) $$g, g', \cdots, g^{(k)}\text{(s.d.) 属于 } L^2(-\infty, T; V),$$
$$g(t) = 0 \qquad (t < 0),$$

则存在满足如下条件的唯一函数 $u(t)$:

(6.34) $$u, u', \cdots, u^{(k)}\text{(s.d.) 属于 } L^2(-\infty, T; V),$$
$$u(t) = 0 \qquad (t < 0),$$

且对任何 $v \in V$ 有

(6.35) $$a(t; u(t), v) + \frac{d}{dt}(u(t), v) = (g(t), v) \quad \text{(w.d.)}.$$

证明 我们可以假定 $\lambda = 0$, 因为在相反情况下我们首先作变换 $u = e^{\lambda t}w$, 把 (6.35) 变换为以 $a(t; u, v) + \lambda(u, v)$ 代替 $a(t; u, v)$ 的等价问题.

为了证明唯一性, 我们假定 $g = 0$ 而证明 $u = 0$. 利用 (6.30), 从 (6.35) 我们得到

$$a(t; u(t), v) + (u'(t), v) = 0.$$

选取 $v = u(t)$，然后取两边的实部，据 (6.29)，再注意到

$$2\,\mathrm{Re}(u'(t), u(t)) = \frac{d}{dt}(\|u(t)\|^2)$$

利用 $\lambda = 0$ 的 (6.32) 后，我们立即得到

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \leqslant 0 \qquad \text{(w.d.)}.$$

因为对于 $t < 0$ 有 $u(t) = 0$，所以可以验证，几乎处处有 $u(t) = 0$，即 $u = 0$（见问题 3）.

现在我们证明存在性．首先把 $a(t; u, v)$ 扩张到 $t \geqslant T$（见问题 4），以便对于 $-\infty < t < \infty$ 假定 (B_1)，(B_2) 仍然有效（可能有不同的常数 α, λ, M）．我们可以假定 $\lambda = 0$．对每个 t，据(6.3)我们有

$$a(t; u, v) = ((A(t)u, v)), \tag{6.36}$$

鉴于 ($\lambda = 0$的) (B_1)，(B_2)，于是 $A(t)$ 满足关于 $X = V$ 的引理 19，20 的假定.

以 $H_+^k(V)$ 记 $D_+^k(V)$ 的完备化空间．考虑到引理 20，当 $e^{-\gamma t}\varphi \in H_+^k(V)$ 时，(6.20) 也成立，即当 $e^{-\gamma t}\varphi \in H_+^k(V)$ 时有

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\int_0^\infty ((e^{-\gamma t}D^k(A(t)\varphi(t)), e^{-\gamma t}D^k\varphi(t)))dt \\ &\geqslant \frac{\alpha}{2}\int_0^\infty \|e^{-\gamma t}D^k\varphi(t)\|^2 dt. \end{aligned} \tag{6.37}$$

设 F 为使 $e^{-\gamma t}u \in H_+^k(V)$ 的函数 u 的空间，γ 是固定的，并且 $\geqslant \gamma_0$．我们给 F 赋予范数

$$\|u\|_F = \left\{\int_0^\infty \|e^{-\gamma t}D^k u(t)\|^2 dt\right\}^{1/2},$$

其中 $D^k u$ 是强导数．我们以 Φ 记一切具有

$$e^{-\gamma t}D^{k+1}\varphi \in L^2(0, \infty; H)$$

的 $\varphi \in F$ 所组成的空间，在 Φ 中引进范数

$$|||\varphi||| = \{\|\varphi\|_F^2 + |D^k\varphi(0)|^2\}^{1/2}.$$

（通过把 $D^k\varphi(t)$，$D^{k+1}\varphi(t)$ 按 H 的固定正交基底展开，并对于

$n=1$ 利用第 2 节定理 $2'$ 的推论 2，我们就得到：$D^k\varphi(t)$ 是 t 的连续函数，因而 $D^k\varphi(0)$ 由 φ 唯一确定.)

对于 $u\in F$，$\varphi\in\Phi$，考虑双线性型

$$E(u,\varphi)=\int_0^\infty((e^{-\gamma t}D^k(A(t)u(t)),\ e^{-\gamma t}D^k\varphi(t)))dt$$
$$-\int_0^\infty(D^ku(t),\ D[e^{-2\gamma t}D^k\varphi(t)])dt$$

和反线性泛函

$$L(\varphi)=\int_0^\infty((e^{-\gamma t}D^kg(t),\ e^{-\gamma t}D^k\varphi(t)))dt,$$

其中 $g(t)$ 以这样的方式扩张到 $t\geqslant T$，使其首 k 阶强导数存在，且有 $e^{-\gamma t}D^kg\in L^2(0,\infty;V)$.

$u\to E(u,\varphi)$ 是 F 上的连续线性泛函. 鉴于 (6.37)，容易得到

$$\operatorname{Re}E(\varphi,\varphi)\geqslant\alpha_1|||\varphi|||^2\qquad(\alpha_1>0).$$

因此可以应用定理 16. 由此得出，存在 $u\in F$，使得对于所有的 $\varphi\in\Phi$ 有

$$E(u,\varphi)=L(\varphi).\tag{6.38}$$

设 $Z(t)$ 是有紧支集的 C^∞ 复值函数，并设 $z(t)$ 是局限于 $0\leqslant t<\infty$ 的 $Z(t)$. 我们定义

$$Y_k(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ t^{k-1}/(k-1)! & (t\geqslant 0),\end{cases}$$

并令 $\psi=Y_k*z$，其中"$*$"表示卷积. 于是

$$e^{-\gamma t}D^j\psi\in L^2(0,\infty)\qquad(0\leqslant j\leqslant k)$$
$$\psi(0)=\cdots=\psi^{(k-1)}(0)=0,\qquad D^k\psi=z.$$

在(6.38)中取 $\varphi(t)=\psi(t)v$，$v\in V$，我们得到

$$\int_0^\infty e^{-2\gamma t}((D^k(A(t)u(t)),v))\overline{z(t)}dt$$
$$-\int_0^\infty(D^ku(t),v)D[e^{-2\gamma t}\overline{z(t)}]dt$$
$$=\int_0^\infty((D^kg(t),v))e^{-2\gamma t}\overline{z(t)}\,dt.\tag{6.39}$$

设当 $t \geqslant 0$ 时 $\tilde{u}(t)=u(t)$，当 $t<0$ 时 $\tilde{u}(t)=0$. 类似地定义 $\tilde{g}$. 于是 $D^k\tilde{u}=(D^k u)^{\sim}$(s.d.).

使用记号

$$\langle f, g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt,$$

我们可以把(6.39)写成如下形式

$$\langle D^k((A(t)\tilde{u}, v)),\ e^{-2\gamma t}\bar{Z}\rangle-\langle D^k(\tilde{u}, v),\ D(e^{-2\gamma t}\bar{Z})\rangle$$
$$=\langle D^k((\tilde{g}, v)), e^{-2\gamma t}\bar{Z}\rangle.$$

因此，

$$D^k[((A(t)\tilde{u}, v))+D(\tilde{u}, v)-((\tilde{g}, v))]=0.$$

因此得出(见问题 5)，对于所有的 $v\in V$ 和几乎所有的 t，有

$$(6.40)\qquad ((A(t)\tilde{u}, v))+D(\tilde{u}, v)=((\tilde{g}, v)).$$

把(6.40)限于 $0\leqslant t\leqslant T$，并利用(6.36)我们可知 u 满足(6.35). 从 u 的定义，显然它满足(6.34).

附注 当 $k=0$ 时，定理 17 的唯一性论断仍为真. 但其证明更为复杂. 将来也不会用到它.

7. 抛物型方程的第一初值边值问题

在这一节里，我们将对于

$$(7.1)\qquad V=\mathring{H}^m(D),\ H=L^2(D)$$

应用定理 17，其中 D 为 R^n 中的有界区域. 设 $a(t; u, v)$ 对于有界区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上的每一个 t 值是关于 $u, v\in V$ 的双线性型，并假定:

(E_1) $t\to a(t; u, v)$ 关于 $t(0\leqslant t\leqslant T)$ 是 k 次连续可微的，且对于所有 V 中的 u, v 有

$$(7.2)\qquad |D_t^j a(t; u, v)|\leqslant M\|u\|\|v\|\quad (0\leqslant j\leqslant k).$$

(E_2) 对于所有的 $v\in V$，有

$$\mathrm{Re}\, a(t; u, v)\geqslant \alpha\|v\|^2\quad (\alpha \text{ 为正的常数}).$$

据第 6 节引理 17，对于任何 $f\in H$，V 中存在唯一的元素 u，使得对所有 $v\in V$ 满足

$$a(t; u, v)=(f, v),$$

并且

$$A(t)u = f,$$

其中 $A(t)$ 由以 $a(t;u,v)$ 代替 $a(u,v)$ 的 (6.5) 定义．令

$$u = A^{-1}(t)f,$$

并假定

(E_3) 对任何 $f\in H^p(D)$ $(p=0,1,2,\cdots r)$，$A^{-1}(t)f$ 属于 $H^{2m+p}(D)$，且函数 $t\to A^{-1}(t)f$ 是从 $[0,T]$ 到 $H^{2m+p}(D)$ 的 k 次连续可微的，并且对所有的 $0\leqslant t\leqslant T$，有

$$|D^jA^{-1}(t)f|_{2m+p}\leqslant \text{const.}|f|_p \qquad (j=0,1,\cdots,k).$$

在第 6 节里已引进记号 $H^k(a,b;X)$． 现在作为 $H^k(-\infty,T;X)$ 的子空间我们引进 $H_0^k(0,T;X)$，它由一切

$$v(t)=0\ (-\infty<t<0)$$

的函数 $v(t)$ 组成．据假定(E_3)推出，$f(t)\to A^{-1}(t)f(t)$是从$H^k(0,T;H^p(D))$ 到 $H^k(0,T;H^{2m+p}(D))$ 和从 $H_0^k(0,T;H^p(D))$ 到 $H_0^k(0,T;H^{2m+p}(D))$ $(p=0,1,\cdots,r)$ 的连续线性映射．

定理 18 设 (E_1)—(E_3) 及(7.1)成立，并设对某个 $k\geqslant 1$，$r\geqslant 0$ 有 $f\in H_0^k(0,T;H^r(D))$，则存在唯一的函数 u 满足：

$$u\in H_0^k(0,T;V),$$

$$u(t)\in d(A(t))\ \text{几乎处处，且}\ A(t)u(t)\in L^2(0,T;H),$$

$$A(t)u(t)+u'(t)=f(t)\qquad \text{几乎处处 (w.d.)}.$$

这个解有如下性质：

(i) 当 $0\leqslant r\leqslant m$ 时，$u\in H^{k-1}(0,T;H^{2m+r}(D))$；

(ii) 当 $m<r\leqslant 3m$ 时，$u\in H^{k-1}(0,T;H^{3m}(D))$，若 $k\geqslant 2$ 则还有 $u\in H^{k-2}(0,T;H^{2m+r}(D))$，对于在区间 $(2m,4m)$，$(3m,5m)$ 等中的 r 有类似的性质．

证明　存在性和唯一性从定理 17 得出．我们写成

$$u(t)=A^{-1}(t)(f(t)-u'(t)). \tag{7.3}$$

因为 $f\in H_0^k(0,T;H^r(D))$，$u'\in H_0^{k-1}(0,T;H^m(D))$，所以当 $0\leqslant r\leqslant m$ 时，$f-u'$ 属于 $H^{k-1}(0,T;H^r(D))$，利用 (7.3) 和定理 18 前面的附注，就得出 (i)．

其次,如果 $m \leqslant r \leqslant 3m$,则 $f - u'$ 属于 $H^{k-1}(0, T; H^m(D))$,因此 $u \in H^{k-1}(0, T; H^{2m}(D))$. 此外,如果 $k \geqslant 2$,则 $u' \in H^{k-2}(0, T; H^{3m}(D))$,于是 $f - u'$ 属于 $H^{k-2}(0, T; H^r(D))$. 因此 $u \in H^{k-2}(0, T; H^{2m+r}(D))$, (ii) 证毕. 于是对于区间 $(2m, 4m)$, $(3m, 5m)$ 等等中的 r 应如何逐步地进行已是清楚的了.

可以证明(见问题 7),如果 $u \in H^j(0, T; H^j(D))$, 则 $u \in H^j(\Omega)$,其中 $\Omega = D \times [0, T]$. 利用第 2 节定理 $2'$ 的推论 2,我们得出:

推论 对任意正整数 q, 存在正整数 k 和 r, 使得在假定 (E_1)—(E_3) 关于这些 k, r 成立时,则定理 18 的解 u 属于 $C^q(\bar{\Omega})$, 其中 $\Omega = D \times (0, T)$.

现在考虑 $D \times (0, T]$ 中的复系数抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, D_x)u + f. \tag{7.4}$$

(在 Petrowski 意义下)一致抛物性的条件是和 $-P$ 为强椭圆算子的条件相同的.

和 (7.4) 一起,我们考虑初始条件

$$u(x, 0) = 0 \qquad (x \in D), \tag{7.5}$$

和边界条件

$$\frac{\partial^j u(x, t)}{\partial \nu^j} = 0 \tag{7.6}$$

$$(x \in \partial D, 0 < t \leqslant T, j = 0, 1, \cdots, m-1),$$

其中 $2m$ 是 P 的阶,而 ν 为 ∂D 的法线. 求解 (7.4)—(7.6) 的问题称为(初始和边界数据为零的)**第一初值边值问题**.

如果 u 对 x 的所有首 $2m$ 阶导数和 u 对 t 的一阶导数在 $D \times (0, T]$ 中都是连续可微的,且(7.4)得到满足,我们就说 u 是 (7.4) 的**古典解**. 此外, 如果 u 对 x 的所有首 $m-1$ 阶导数对于任何 $\epsilon > 0$ 在 $D \times [\epsilon, T]$ 内一致连续, u 在 $\bar{D} \times [0, T]$ 上连续, 且 (7.5), (7.6) 成立 ((7.6) 中的导数由连续性定义), 我们就说 u 是**第一初值边值问题** (7.4)—(7.6) 的**古典解**. 可以类似于椭圆的情

形给出弱解的概念.

我们用在第 3 节中使 $B[\varphi, u]$和 L 联系起来的方法(见(3.9))使双线性型 $a(t; u, v)$ 和 P 发生联系. 考虑到 Gårding 不等式, (6.32) 满足. 在求解第一初值边值问题时, 我们可以假定 $\lambda = 0$, 因为在相反的情形我们可以先作变换 $u = e^{\lambda t} w$. 于是我们可以假定(E_2)成立.

对于任何正整数 k, r, 如果 P 的系数在 $\bar{D} \times [0, T]$ 上充分光滑, 并且 ∂D 充分光滑, 则 (E_1) 得到满足. 据第 5 节定理 15 及其推论, (E_3) 也成立. 应用定理 18 及其推论, 我们看到, 那里所建立起来的唯一解 $u(x, t)$ 是方程(7.4)的"弱"解. 对每个 t 它属于 $\mathring{H}^m(D)$, 它属于 $H_0^k(0, T; \mathring{H}^m(D))$, 且它在 $\bar{D} \times [0, T]$ 上具有直到 N 阶微商, 这里当 $k \to \infty$, $r \to \infty$ 时, $N \to \infty$. 因此 u 是 (7.4) 的古典解. 考虑到第 2 节引理 12, u 在通常意义下满足 (7.6). 最后, 从 $H_0^k(0, T; V)$ 的定义和 $u(x, t)$ 关于 t 的连续性可知, (7.5) 也得到满足.

注意, 如果 f 在 $\bar{D} \times [0, T]$ 上充分光滑, 且对某个充分大的 N_0, 有

$$(7.7) \qquad \frac{\partial^j f(x, 0)}{\partial t^j} = 0 \qquad (x \in D, j = 0, 1, \cdots, N_0),$$

则假定 $f \in H_0^k(0, T; H^r(D))$ 得到满足.

我们把这些结果总结如下:

定理 19 设在 $\bar{D} \times [0, T]$ 上(7.4)为一致抛物型方程, 假定 P 的系数在 $\bar{D} \times [0, T]$ 上充分光滑, 根条件得以满足, 且 ∂D 充分光滑, 则对于满足 (7.7) 的在 $\bar{D} \times [0, T]$ 上充分光滑的任何函数 f 第一初值边值问题(7.4)—(7.6)存在(唯一古典解 $u(x, t)$).

只要 ∂D, f 和 P 的系数都充分光滑 (依赖于 p), 且关于充分大的 N_0 (依赖于 p) (7.7) 成立, 则对于任何给定的整数 $p > 0$, u 属于 $C^p(\bar{D} \times [0, T])$.

现在我们改进条件(7.7). 设 u 为 (7.4)—(7.6) (在 $\bar{D} \times [0, T]$ 上) 的光滑解. 则在集合 $B = \{(x, 0); x \in \partial D\}$ 的点上 (7.4)

也得到满足，利用 (7.5)，(7.6) 我们得到，对于 $x \in \partial D$，$f(x, 0) = 0$．于是，按照上面所用的方法，f 被看作是 Hilbert 空间的元素 $f(t)$．因此，把必要条件 $f = 0$ 强加于 B 上的合理方法似乎是要求 $f(0) = 0$．可是这意味着对所有的 $x \in D$，$f(x, 0) = 0$．于是由 (7.4) 得出，对 $x \in D$，$\partial u(x, 0)/\partial t = 0$．其次，(7.4)对 t 微分一次，并象以前那样进行下去我们就得到，在 D 上 $\partial f(x, 0)/\partial t = 0$．现在可以清楚地看到，作为前述方法得以成立的必要条件的 (7.7) 是怎样得出的．

如果我们希望 (7.4)—(7.6) 的解在 $\bar{D} \times [0, T]$ 上光滑，那么我们必须要求（对于适当的 N_0）对于 $x \in \partial D$，$D_t^i D_x^j f(x, 0) = 0$ $(i, j = 0, 1, \cdots, N_0)$．引进略强一些的条件：对于在 ∂D 的某个邻域中的 x

$$\frac{\partial^j f(x, 0)}{\partial t^j} = 0 \qquad (0 \leqslant j \leqslant N_0). \tag{7.8}$$

我们将证明如果以 (7.8) 代替 (7.7)，定理 19 仍为真．把 f 分成和 $f_1 + f_2$，其中 f_1 满足 (7.7)，而在 $\partial D \times [0, T]$的近傍f_2为零．设 $K(x, t; \zeta, \tau)$ 为 (7.4) 的基本解，则

$$u_1(x, t) = -\int_0^t \int_D K(x, t; \xi, \tau) f_2(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

满足

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = P(x, t, D_x) u_1 + f_2, \qquad u_1(x, 0) = 0,$$

并且当 $t \to 0$，而 x 限于 ∂D 近傍时，$u_1(x, t)$ 和它的某些导数一起趋于零．设 w 为(在 $\partial D \times [0, T]$上)具有和 u_1 同样的 Dirichlet 数据，使得 $[\partial w/\partial t - Pw]$满足 (7.7)（有不同的 N_0）的函数．据定理 19，方程

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = P(x, t, D_x) u_2 + \left[\frac{\partial w}{\partial t} - P(x, t, D_x) w\right] + f_1$$

存在满足(7.5)，(7.6)的解 u_2．很清楚，$u = u_1 - w + u_2$ 是 (7.4)—(7.6)的解．因为它的各个分量在 $\bar{D} \times [0, T]$ 上是光滑的，所以

它是 $\overline{D} \times [0, T]$ 上的光滑函数．于是我们证明了：

定理 19 的推论　如果用较弱的假定 (7.8) 来替代假定 (7.7)，则定理 19 仍为真．

附注　如果用非齐次条件来代替条件 (7.5)，(7.6)，则通过引进满足这些条件的函数 Φ，并考虑 $u - \Phi$，我们就可以把定理 19 推广到非齐次的情形．

8. 高阶方程的进一步结果

解的渐近性态．设 u 满足抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, D_x)u + f(x, t) \tag{8.1}$$

$$(\text{在 } \Omega = D \times (0, \infty) \text{ 中})$$

和在 $\partial D \times (0, \infty)$ 上的边界条件

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \varphi_j(x, t) \qquad (j = 0, 1, \cdots, m-1), \tag{8.2}$$

其中 $2m$ 为 P 的阶．为简单计，假定 P 有实系数．可以证明和第六章相类似的结果：如果当 $t \to \infty$ 时，按某种适当的意义

$$\varphi_j(x, t) \to \varphi_j(x), \ f(x, t) \to f(x), \ P(x, t, \xi) \to P(x, \xi), \tag{8.3}$$

则当 $t \to \infty$ 时也有

$$\int_D |u(x, t) - v(x)|^2 dx \to 0,$$

其中 $v(x)$ 是如下的 Dirichlet 问题的解：

$$P(x, D_x)u = f(x) \qquad \text{在 } D \text{ 中}, \tag{8.4}$$

$$\frac{\partial^j v}{\partial \nu^j} = \varphi_j(x) \qquad \text{在 } \partial D \text{ 上} \ (j = 0, 1, \cdots, m-1). \tag{8.5}$$

除各种各样的可微性假定外，还假定 L 是正的，即存在某个正的常数 γ，使得对于任何在 ∂D 上连同其首 $m-1$ 阶法向导数都为零的实值函数 $\varphi \in C^{2m}(\overline{D})$，

$$(8.6) \qquad -\int_D \varphi(x) P(x, t, D_x) \varphi(x) dx$$

$$\geq \gamma \int_D (\varphi(x))^2 dx$$

是成立的。

在关于(8.3)中收敛性质的进一步假定下，可以证明当 $t \to \infty$ 时，在 Ω 中一致地有

$$u(x, t) \to v(x).$$

可以象第六章那样把这些结果推广到非柱形区域. 至于详细的陈述和证明，见 [43].

后向抛物型方程的唯一性. 类似于第六章第 7 节的如下结果成立：

如果 u 是抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(x, t, D_x)u \qquad (\text{在 } D \times [0, T] \text{ 内})$$

满足在 $\partial D \times [0, T]$ 上的边界条件

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0 \qquad (j = 0, 1, \cdots, m-1)$$

的解，其中 $2m$ 为 P 的阶. 如果对于 $x \in D$，有 $u(x, T) = 0$，则在 $D \times [0, T]$ 中有 $u(x, t) = 0$. 这里假定 P 是一个阶数不超过 m 的算子和一个自伴算子的和. 其细节，见 [78], [1]. 关于把第六章第 8 节的结果推广到高阶抛物型方程，见 [1].

解的解析性. 如果 $f(x, t)$ 和 $P(x, t, D_x)$ 的系数是某个区域 Ω 中 (x, t) 的解析函数，则抛物型方程 (8.1) 的解 (我们已经知道它是 Ω 中的无穷可微函数) 是 x 的解析函数.

可以陈述更确切的结果，我们首先引进某些记号.

设 $\{M_q\}$ 为单调递增的正数序列，我们说区域 Ω 中的一个无穷可微函数属于 $C\{M_q; 2m; \Omega\}$ 类，如果对于 Ω 的任何紧子区域 A，存在常数 B_0, B_1, B_2，使得对所有的 $(x, t) \in A$ 有

$$|D_t^p D_x^q f(x, t)| \leqslant B_0 B_1^p B_2^{|q|} M_{|q|+2mp} \quad (0 \leqslant p, |q| < \infty).$$

类似地，我们说 $f(x) \in C\{M_q; D\}$，如果

$$|D_x^q f(x)| \leqslant B_0 B^{|q|} M_{|q|} \qquad (0 \leqslant |q| < \infty)$$

对于每个 D 的紧子区域都成立. 读者可以验证，当且仅当 $f(x)$ 是 D 中的解析函数时，$f(x) \in C(q!; D)$.

现在我们假定对于所有的 $0 \leqslant i \leqslant p$, $0 \leqslant p < \infty$,

(8.7) $$\binom{p}{i} M_i M_{p-i} \leqslant \text{const.} M_p.$$

于是我们有如下结果:

如果 f 和 P 的系数属于 $C\{M_q; 2m; \Omega\}$,则对于(8.1)的任何解也是如此.

特殊情形 $M_q = q!$ 给出对于解析情形(上述)定理的改进.

[27]在主系数与 x 无关的情况下给出了标有着重号的论断的证明. 可是,如果在[27, § 3]中所用的关于欧几里德范数$(|x|^2 + |t|^2)^{1/2}$的立方体由关于范数 $(|x|^2 + |t|^{1/m})^{1/2}$ 的立方体来代替,则关于一般情况的证明是完全类似的.

标有着重号的论断对于抛物组也成立(证明是一样的). 它对于椭圆型方程(以 $C\{M_q; D\}$ 代替 $C\{M_q; 2m; \Omega\}$) 的类似论断也有效. 特别地,如果 $f(x)$ 和椭圆算子 $P(x, D_x)$ 的系数是解析的,则 $P(x, D_x)u = f(x)$ 的解也是解析的. 倘若边界和 Dirichlet 数据都是解析的,则这个结果直到边界也成立,见 [88].

问　　题

1. 证明: 如果 $\{u_m\}$ 在 Hilbert 空间 H 中弱收敛于 u, 则存在一个子序列 $\{v_m\}$, 其算术平均序列按 H 的范数收敛于 u.

[提示: 假定 $u = 0$. 令 $m_1 = 1$. 设 $m_2 (> m_1)$ 使得当 $m \geqslant m_2$ 时,

$$|(u_{m_2}, u_m)| < \frac{1}{2}.$$

设 $m_3 (> m_2)$ 使得当 $m \geqslant m_3$ 时,

$$|(u_{m_1}, u_m)| < \frac{1}{3}, \quad |(u_{m_2}, u_m)| < \frac{1}{3},$$

等等. 取 $v_n = u_{m_n}$.]

2. 对任何正数 $p \geqslant 1$, 引进范数

$$|u|_{j,p} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant j} \int_D |D^\alpha u(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

通过证明

$$|u|_{j-1,p}^2 \leqslant \epsilon |u|_{j,p}^2 + c|u|_{0,p}^2 \qquad (\epsilon > 0,\ p \geqslant 1)$$

去推广第2节引理8，其中 c 仅依赖于 ϵ, j, p, D.

[提示：修改引理8的证明.]

3．设 $g(t)\in L^2(a,b)$，$g'(t)\in L^2(a,b)$ (w.d.)，并假定在 (a,b) 中几乎处处有 $g(t)\geqslant 0$，$g'(t)\leqslant 0$，而在某个区间 (a,c) $(a<c<b)$ 中 $g(t)\equiv 0$．试证明在 (a,b) 中几乎处处有 $g(t)=0$.

[提示：$h(t)=\int_a^t g'(\tau)d\tau$ 满足 $g'=h'$(w.d.)．推出几乎处处有

$$g(t)=h(t)+\text{const.},$$

并注意到常数为零.]

4．证明：满足（第6节的）(B_1)，(B_2) 的双线性型 $a(t;u,v)$ 可以扩张到 $T<t<\infty$，使得扩张后的双线性型在 $-\infty<t<\infty$ 中满足 (B_1)，(B_2)（可能有不同的常数 α, λ, M）.

[提示：对于适当的 $\zeta(t)$，通过

$$a(T;u,v)+\zeta(t)\sum_{j=1}^{k}\frac{(t-T)^j}{j!}D_t^j a(T;u,v)$$

扩张 $a(t;u,v)$.]

5．证明：如果 $f\in L^2(D)$，并且在 D 中 f 直到 p 阶的一切弱导数存在，如果所有的 p 阶弱导数都为零，则 f 是次数不超过 p 的多项式.

[提示：平滑算子 $J_\epsilon f$ 是次数不超过 p 的多项式.]

6．设 P 为实系数的抛物算子，(8.6) 成立．设 u 是 (8.1) 和 (8.2) $(\varphi_j\equiv 0)$ 在 $C^{2m}(\bar{\Omega})$ 中的解，当 $t\to\infty$ 时有

$$\int_D (f(x,t))^2 dx \to 0,$$

u 和 f 是实的．试证明当 $t\to\infty$ 时

$$\int_D (u(x,t))^2 dx \to 0.$$

[提示：令 $\phi(t)=\int (u(x,t))^2 dx$，$\epsilon(t)=\int (f(x,t))^2 dx$．利用 (8.6) 导出：

$$\phi'(t)+2\gamma\phi(t)\leqslant 2\int f(x,t)u(x,t)dx;$$

于是，$\psi'(t)+\gamma\psi(t)\leqslant\frac{1}{\gamma}\theta^2(t)$. 证明$\psi(t)\to 0$.]

7. 试证明：如果 $u\in H^j(a,b;H^j(D))$，则 $u\in H^j(\Omega)$，其中 $\Omega=D\times(a,b)$；更确切些就是，在 $H^j(\Omega)$ 中存在函数 $U(x,t)$，使对每一个 t，作为 $H^j(D)$ 的一个元素，它等于 $u(t)$.

[提示：在 $H^j(D)$ 中把 $u=u(t)=u(x,t)$ 写成 $u(t)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(t)e_m$ 的形式，其中$\{e_m\}$是 $H^j(D)$ 的正交基底. $u_m(t)=(u(t),e_m)_j^D$ 在 $L^2(a,b)$ 中有 j 阶强导数，且在 $H^j(D)$ 中

$$D_t^i u(t)=\sum_{m=1}^{\infty}[D_t^i u_m(t)]e_m \qquad (i\leqslant j).$$

令 $W=H^j(a,b,H^j(D))$，并以$|\ |_W$ 记这一空间的范数. 则

$$\infty>|u|_W^2=\sum_{i=0}^{j}\int_a^b[|D_t^i u(t)|_0^D]^2dt$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}\int_a^b|D_t^i u_m(t)|^2dt.$$

对任何 $M<N$，$U_{MN}(x,t)=\sum_{m=M}^{N}u_m(t)e_m(x)$ 属于 $H^j(\Omega)$，且当$M\to\infty$ 时

$$|U_{MN}(x,t)|_j^\Omega\leqslant|U_{MN}(x,t)|_W\to 0.$$

因此，在 $H^j(\Omega)$中存在函数 $U(x,t)$，使当$N\to\infty$时$|U_{1N}(x,t)-U(x,t)|_0^\Omega\to 0$. 据 Fatou 引理，对于几乎所有的 t

$$\liminf_{N\to\infty}\int_D|U_{1N}(x,t)-U(x,t)|^2dx=0.$$

注意到对于每一个 t，当 $N\to\infty$ 时

$$\int_D|U_{1N}(x,t)-U(x,t)|^2dx\to 0$$

就推出对几乎所有的 t，几乎处处有 $U(x,t)=u(x,t)$.]

附　　录

非线性方程

方括号中的数字指附录的文献.

这里我们将给出关于任意多个变数的二阶非线性椭圆型和抛物型方程理论最近发展情况的简要说明. 在这个发展中，解的 Hölder 指数和 Hölder 系数的某些先验估计起着十分重要的作用，我们首先叙述这些估计. 在 R^n 的有界区域 Ω 中,考虑形如

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \tag{1}$$

的椭圆型方程,并设 a_{ij} 为 Ω 内的可测函数,且对于所有的 $x \in \Omega$ 和实的 ξ，有

$$\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \tag{2}$$

其中 $\lambda > 1$ 为某个常数. 所谓(1)的解 u 是指对任何 $\varphi \in C_C^\infty(\Omega)$ 满足

$$\sum\int a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = 0$$

的强可微函数 $u(x)$.

定理 1 (de Giorgi)　设 $u(x)$ 是 (1) 的解使得

$$\int_\Omega u^2(x)dx \leqslant M^2,$$

则存在仅依赖于 λ 和 n 的正的常数 A 和 $\alpha(0 < \alpha < 1)$，使得

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \frac{AM}{\delta^{\alpha+n/2}}|x-y|^\alpha$$

对于任何 $0 < \delta < 1$ 成立,其中 δ 为使得以 x 和 y 为中心，δ 为半

径的球位于Ω内的正数.

定理 1 应属于 Giorgi[3] 的，其重要特点是A, α仅依赖于λ, n.

在带形区域 $0 < t \leqslant T$ 内,考虑如下形式的抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \tag{3}$$

并假定对于所有的 $x \in R^n$, $0 \leqslant t \leqslant T$ 和实的ξ, 有

$$\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{4}$$

其中 $\lambda > 1$ 为常数. 此外，假定 a_{ij} 在整个带形区域 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上,比方说,有三阶连续的有界导数.

定理 2 (Nash) 设$u(x, t)$为(3)在$0 \leqslant t \leqslant T$上的(古典)解,且 $|u| \leqslant M$, 则存在正的常数A和$\alpha(0 < \alpha < 1)$, 使得对所有的 $0 < \tau < t \leqslant T$, $x \in R^n$, $y \in R^n$ 有

$$|u(x, t), - u(y, \tau)|$$

$$\leqslant AM\left\{\left(\frac{|x-y|}{\sqrt{\tau}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{t-\tau}{\tau}\right)^{\alpha/(2\alpha+2)}\right\}.$$

定理 2′ (Nash) 设$u(x)$为有界区域Ω内(1)的(古典)解,并假定系数 a_{ij} 充分光滑(比如说 $a_{ij} \in C^3(\bar{\Omega})$), 且(2)成立. 存在仅依赖于$\lambda$, n 的正的常数 A 和 $\alpha(0 < \alpha < 1)$, 使得当在Ω内$|u| \leqslant M$ 时,则对于Ω内所有的x和y, 有

$$|u(x) - u(y)| \leqslant AM\left(\frac{|x-y|}{d}\right)^{\alpha},$$

其中 $d = \min(d_x, d_y)$, 而 d_x 为从x到Ω边界的距离.

定理 2 和定理 2′ 应属于 Nash[14]. de Giorgi 和 Nash 所用的方法彼此完全不同. Nash 用基本解获得定理 2, 然后利用定理2推导出定理 2′. Giorgi 的方法较为简单，它基于选择适当的试验函数从u的微分方程直接得到的不等式. Moser [10] 得到了 de Giorgi 定理的较简单证明.

Stampacchia [18], [19] 和 Morrey [9] 通过进一步推广 de Giorgi 的方法，把定理 1 推广到下面的一般二阶椭圆型方程

$$(5)\quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x),$$

其中系数 b_i，c 属于某个 L^p 类．Morrey 获得了相应的边界估计，然后在关于系数很弱的假定下解决了 Dirichlet 问题．Stampacchia [19] 考虑了 Neumann 问题．

Ladyzhenskaja 和 Uraltseva [6]，[7] 把 de Giorgi 的结果推广到有界柱体 $\{(x, t);\ x\in\Omega,\ 0<t<T\}$ 内的抛物型方程

$$(6)\quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t)u-\frac{\partial u}{\partial t}=f(x, t),$$

和某些抛物型方程组．Kruzhkov [4a]（也见 Moser [1]）把 Moser 的方法推广到形如 (5) 的椭圆型方程和形如 (6) 的抛物型方程（在有界柱体内）．Oleinik 和kruzhkov [15] 把定理 2 和定理 2′ 分别推广到一般形式(5)和(6)的抛物型方程(在有界柱内)和椭圆型方程．

所谓古典的 Havnack 不等式是：给定一个区域 $\Omega\subset R^n$，对于任何紧子区域 Ω_0，对应着仅依赖于 Ω_0 的正的常数 B，使得不等式

$$(7)\quad u(x)\leqslant Bu(y)$$

对于 Ω_0 内所有 x，y 和所有在 Ω 为正的调和函数 u 成立．(7)等价于

$$(7')\quad \max_{\Omega_0} u\leqslant B\min_{\Omega_0} u.$$

Moser [12] 把 Harnack 不等式推广到(1)的正解，其中常数 B 仅依赖于 Ω_0 和 λ．在[13]中，对于抛物型方程 (3)，他亦得到类似的结果．从 Harnack 不等式很容易推出 de Gioryi 定理．

de Giorgi 和 Nash 的估计和它们对于一般二阶方程的推广，以及 Moser 的 Harnack 不等式对于线性和非线性方程都有重要

的应用. 我们首先叙述它们对于线性方程的某些应用.

Morrey [9], Stampacchia [18], [19], Ladyzhenskaja 和 Uraltseva [6], [7], 以及 Littman, Stampacchia 和 Weinberger [8] 建立了有间断系数的线性方程的解的存在性定理和解的性质. 在证明定理 1 的过程中(见[3], [10])得到了一个不等式, 从这个不等式可直接推出下面的 Liouville 型定理.

定理 3 设 $u(x)$ 为(1)在 R^n 内的解, 且对于所有的 $x \in R^n$, (2)成立, 如果 u 有界, 则 $u \equiv \text{const.}$.

借助于 Harnack 不等式可推出下面的定理 (见 [12]).

定理 4 设 $u(x)$ 为区域 $|x| > 1$ 中(1)的有界解, 且对于所有 $|x| > 1$ 的 x, (2) 成立, 则 $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x)$ 存在.

在 [13] 中所证明的 Harnack 不等式可陈述为:

定理 5 (Moser) 设 D 为 R^n 内的区域, D_0 为 D 的凸的子区域, 它到 D 的边界距离不小于 $d(d > 0)$. 当 $x \in D$, $0 < t \leqslant T$ 时 u 是 (3) 的正解, 且(4)成立, 则对于 $0 < d^2 \leqslant t' < t'' \leqslant T$, $x' \in D_0$, $x'' \in D_0$, 有

$$\log \frac{u(x', t')}{u(x'', t'')} \leqslant A\left(\frac{|x'' - x'|^2}{t'' - t'} + \frac{t'' - t'}{d^2} + 1\right), \tag{8}$$

其中 A 为仅依赖于 λ, n 的正的常数.

在定理 5 中仅假定系数 a_{ij} 为可测函数, 且解 u 在这样的意义下理解: 对所有在 $D \times (0, T)$ 内有紧子集的 $\varphi \in c^\infty$, 有

$$\int \left[\sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t} \varphi\right] dxdt = 0.$$

我们给出定理 5 的推广和它对于 Cauchy 问题正解的应用. 考虑抛物型方程

$$L_0 u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

且假定 a_{ij}, b_i 对于 $x \in D$, $0 \leqslant t \leqslant T$ 为可测函数, (4) 成立,

b_i 为有界，即

$$|b_i(x,t)| \leqslant B.$$

如果在 $x \in D$, $0 < t \leqslant T$ 内 $u(x, t)$ 满足 (9)，则它在柱 $G_d = \{(x, y, t); x \in D, 0 \leqslant y \leqslant d, 0 < t \leqslant T\}$(对任何 $d > 0$) 内也满足方程

$$(10) \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y}\left(b_i(x,t)y\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_i(x,t)y\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

(在[15]中提出了这一结论). 方程 (10) 有形式 (3)，且当 d 充分小，即当

$$(11) \qquad d \leqslant \frac{1}{2B}\min\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{n}\right)$$

时，它在 G_d 内满足一致抛物性条件 (即类似于(4)的条件). 应用定理 5 于 (10) 的解，我们得到:

定理 5′ 设 D 是 R^n 内的区域，D_0 为 D 的凸子区域，它到 D 的边界的距离不小于 d，d 为满足(11)的任何正数. 如果 u 为 (9) 在 $x \in D$, $0 < t \leqslant T$ 的正解，则对于任何 $0 < d^2 < t' < t'' \leqslant T$, $x' \in D_0$, $x'' \in D_0$，不等式 (8) 成立，A 为仅依赖于 λ, B, n 的常数.

推论 1 如果第一章第 6 和 8 节的假定 $(A_1)'$, $(A_3)'$ 关于 $D = R^n$, $T_0 = 0$, $T_1 = T$ 得到满足，则不等式 (2.4.14) 成立.

因此，即使省略假定(2.4.7)，第二章第 4 节的定理 13 及其推论 2 仍为真(见第二章第 4 节最后一段).

证明　只要对 $L_0 + c_0$ 证明 (2.4.14) 就够了，其中 L_0 由(9)定义，而 $c_0 = \Sigma \partial b_i / \partial x_i$. 事实上，对于一般的 c，对于 $L_0 + c$ 的证明可由第二章第 4 节定理 12 前的断言推出.

现在，据第一章第 8 节定理 15，作为 (ξ, τ) 的函数，

$$v(\xi, \tau) = \Gamma(0, t; \xi, \tau)$$

满足

$$(L_0 + c_0)u = 0$$

的伴随方程:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(a_{ij}(\xi, \tau)\frac{\partial v}{\partial \xi_j}\right) - \sum_{i=1}^{n} b_i(\xi, \tau)\frac{\partial v}{\partial \xi_i} + \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0.$$

用$-\tau$代τ,我们看到,关于$D = R^n$,任意的D_0和充分小的d(依赖于 l.u.b.$|b_i|$)可以应用定理 5′. 取 $x' = 0$, $x'' = \xi$,我们得到

$$v(\xi, \tau) \geqslant v(0, t - d^2)\exp\left\{-A\left[\frac{|\xi|^2}{t - d^2 - \tau} + \frac{t - d^2 - \tau}{d^2} + 1\right]\right\} \qquad (0 \leqslant \tau < t - d^2).$$

因此,当 $0 \leqslant \tau \leqslant t - 2d^2$, $2d^2 < t < T$, $\xi \in R^n$ 时,

$$v(\xi, \tau) \geqslant A' \exp\left[-A\frac{|\xi|^2}{d^2}\right],$$

其中A'为正的常数. (2.4.14) 证毕.

推论 2 设(由(2.1.1)给出的) L 在 $\Omega = R^n \times [0, T]$内是一致抛物的, a_{ij}, $\partial a_{ij}/\partial x_k$, b_i 为Ω内一致有界的连续函数, 在Ω内 $c = 0$. 如果在 $\Omega_0 = R^n \times (0, T]$ 内 $Lu = 0$, 在 R^n 上 $u(x, 0) = 0$, 且u满足 (2.4.2), 则在Ω内$u(x, t) = 0$.

证明 Aronson [0] 证明,即使把u视为某种更弱意义下的解, 定理 5 仍为真. 于是, 特别当 $u(x, 0) = 0$, 且当u扩张到 $t < 0$ 使 $u = 0(t < 0)$ 时, 对于$-\infty < t < t'' \leqslant T$, 定理 8 成立. 可以同样地推广定理 5′. 现在据第二章第 4 节定理 9, 在Ω内$u(x, t) \geqslant 0$. 把($c = 0$ 的)(2.1.1)写成(9)的形式, 并利用推广后的定理 5′就得出, 在任何区域 $R^n \times (0, T_0]$ $(T_0 < T)$ 内, $u(x, t) \leqslant B_0\exp[\beta_0|x|^2]$, 其中 B_0, β_0 都是依赖于 T_0 的常数. 据第二章第 4 节定理 10, 在Ω内$u = 0$.

Aronson[0] 已证明, 如果u是 (3) 的弱非负解, 且在R^n上$u(x, 0) = 0$, 则在Ω内$u = 0$. 他仅假定 a_{ij} 为可测且满足 (4).

现在我们来叙述前面的先验估计对于非线性方程的主要应用(和得到它们的方法). Ladyzhenskaja 和 Uraltseva [5] 对如下形式

的拟线性椭圆型方程建立了存在性定理:

$$(12)\qquad \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,u,u_x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x,u,u_x),$$

其中 $u_x=(\partial u/\partial x_1,\cdots,\partial u/\partial x_n)$. 在 [6], [7] 中他们对于形如

$$(13)\qquad \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t,u,u_x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t,u,u_x)$$

或者是形如

$$(14)\qquad \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t,u,u_x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t,u,u_x)$$

的拟线性抛物型方程和某些抛物型方程组建立了类似的结果. Oleinik 和 Kruzkov [15] 对抛物型方程

$$(15)\qquad \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-a(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t,u,u_x)$$

得到了类似的存在定理.

在[7]中的关键步骤是导出 u_x 的先验界,其中 u 是(14)的解。用推广 de Giorgi 的方法, Ladyzhenskaja 和 Uraltseva 借助于在侧边界上的 l. u. b. $|u_x|$ 得到了这样的界. 但是侧边界上的量可以用包含极大值原理的 *S. Bernstein* 方法估计. [6] 中对 (13) 和[15]中对(15)的考虑虽然和[7]的考虑在技巧上完全不同,但性质是类似的.

[7] 的结果表明,特别是如果 L, S, ψ 充分光滑,如果条件(7.4.17) 由如下条件来代替

$$\begin{aligned}|f(x,t,u,w)|&+\sum\left|\frac{\partial}{\partial x_i}f(x,t,u,w)\right|(1+|w|)\\&+\sum\left|\frac{\partial}{\partial w_j}f(x,t,u,w)\right|(1+|w|)\\&\leqslant A(|u|)(1+|w|)^2,\end{aligned}\qquad(16)$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial u}f(x,t,u,w)\right|\leqslant A(|u|)(1+|w|)^{2-\epsilon}.$$

(对某个 $\varepsilon>0$),

则第七章第4节的定理9对于柱形区域仍为真．在(7.4.17)代之以

(17) $|f(x, t, u, w)| \leqslant A(|u|)(1 + |w|^{2-\epsilon})$ (对某个 $\epsilon > 0$)

的情况下，该定理(对于柱形区域和充分光滑的 L, S, ψ) 仍为真．事实上，这是由 Friedman [2] 对任意阶半线性抛物型方程所证明的存在定理的特殊情形．

Serrin [16], [17] 在研究拟线性椭圆型方程解的局部性态时，得到了先验估计的另一种应用． 他还得到了拟线性方程的 Harnack 不等式．

对于所有的 $t < \infty$，拟线性抛物型方程的解可能不存在，例如见第二章问题8，也可见[2]．Filippov [1] 和 Kruzhkov [4] 在 $n = 1$ 的情况下，对于某一类拟线性抛物型方程，对于所有的 $t < \infty$，证明了解的存在．由 [1] 得出，如果(7.4.17)代之以 $|f(x,t,u,w)| \leqslant A(|u|)(1 + |w|)^{2+\epsilon}$ (对某个 $\epsilon > 0$)，则第三章第4节定理9不复为真．

附录的文献

[0] D. G. Aronson, "Uniqueness of positive solutions of second order parabolic equations", *Ann. Polon. Math.*, **16** (1965).

[1] A F.. Filippov, " On conditions for existence of solutions of quasi-linear parabolic equations", *Doklady Akad. Nauk SSSR* (N. S.), **141** (1961), 568—570.

[2] A. Friedman, "Remarks on nonlinear parabolic equations", Nonlinear *Partial Differential Equations and Applications, Proc.* Sympos. Amer. Math. Soc., 1965.

[3] E. de Giorgi, "Sulla differenziabilita e l'analicita delle estremali degli integrali multipli regolari", *Mem. Acad. Sci. Torino. Cl. Sci. Mat. Nat.*, Ser. 3, **3** (1957), 25—43.

[4] S. N. Kruzhkov, "On the Cauchy problem in the large for some nonlinear differential equations of the second order", *Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.)*, **132** (1960), 36—39.

[4a] ————, "A priori estimates for generalized solutions of second

order elliptic and parabolic equations," *Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.),* **150** (1963), 748—751.

[5] O. A. Ladyzhenskaja and N. N. Uraltseva, "Quasi-linear elliptic equations and variational problems with many independent variables", *Uspehi Math. Nauk SSSR,* **16** no. **1** (1961), 19—60.

[6] ————, "Boundary problems for linear and quasi-linear parabolic equations, I, II", *Izvest. Akad. Nauk SSSR,* **26** (1962), 5—52, 753—780.

[7] ————, "Boundary problems for linear and quasi-linear equations and systems of parabolic type, III", *Izvest. Akad. Nauk SSSR,* **27** (1963), 161—240.

[8] W. Littman, G. Stampacchia, and H. Weinberger, "Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* **17** (1963), 47—79.

[9] C. B. Morrey, "Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity", *Math. Zeit.,* **72** (1959), 146—164.

[10] J. Moser, "A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.,* **13** (1960), 457—468.

[11] ————, "On the regularity problem for elliptic and parabolic defferential equations", *Symp. Partial Differential Equations and Continuum Mechanics, Univ.* Wisconsin Press, 1961, 159—169.

[12] ————,"On Harnack's theorem for elliptic equations", *Comm. Pure Appl. Math.,* **14** (1961), 577—591.

[13] ————, "A Harnack's inequality for parabolic differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.,* **17** (1964), 101—134.

[14] J. Nash, "Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations", *Amer. J. Math.,* **80** (1958), 931—953.

[15] O. A. Oleinik and S. N. Kruzhkov, "Quasi-linear parabolic equations of the second order with many independent variables", *Uspehi Math. Nauk SSSR,* **16,** no. 5 (1961), 115—155.

[16] J. Serrin, "A Harnack inequality for nonlinear equations", *Bull. Amer. Math. Soc.,* **69** (1963), 481—486.

[17] ————, "Local behavior of solutions of quasi-linear equations", to appear.

[18] G. Stampacchia, "Contributi alla regolarizzazione dell soluzioni dei pro-

blemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellitiche", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* **12** (1958), 223—245.

[19] ————, "Problemi al contorno ellitichi con dati discontinui dotati di soluzioni Holderiane", *Annali Mat. Pure Appl.,* **51** (1960), 1—38.

文献的附注

第一、九章 拟基本解方法应归功于 Levi[75]。Gevrey [48] 对于 $a_{ij}=\delta_{ij}$, Rothe [106] 对于与 t 无关的系数，Dressel [20], [21]对充分光滑的系数，Pogorzelski [96]和 Aronson [3]对 Hölder 连续系数构造了二阶抛物型方程的基本解．第一章中的构造基本上基于[96]．任意阶抛物型方程组的基本解由 Petrowski [95], Ladyzhenskaja [70], Eidelman [23]—[26], Slobodetski [112], Aronson[4], [5] 和 Pogorzelski [102], [103] 等人构造．在[95], [70], [23] 中系数仅依赖于 t,在 [24] 中系数是充分光滑的,而在 [25], [26], [112], [4], [5], [102], [103] 中系数都仅为 Hölder 连续(基本上象第九章那样).

Mizohata [83] 用半群的方法给出了 Cbuchy 问题的存在性．Tychonov [116] 对热传导方程首先建立了 Cauchy 问题解的唯一性．Petrowski [95] 对一个系数仅依赖于 t 的任意阶方程的有界解证明了唯一性．Ladyzhenskaja [70] 把这一结果推广到以 $O[\exp h|x|^q]$, $q=2p/(2p-1)$ 为界的解．在 [23]—[26], [112], [4], [5] 和 Friedman 在[34]中在类似于[70]的各种不同的逐点的积分增长条件下证明了一般抛物组的唯一性定理.

Eidelman [24] (利用基本解), Mizohata [84]和 Friedman [29] (利用先验估计)证明了抛物组解的可微性.

一般椭圆型方程组的基本解由 Lopatinski 和 John 所构造,见[58],[60]和已给出的参考书目．第九章问题 7 基于[24],[29].

第二章 椭圆型方程的强极值原理应归功于 Hopf [51], 对于抛物型方程的强极值原理 (1,2 节) 应归功于 Nirenberg [89]. 定理 9,10 归功于 Krzyzanski[65], [66]. 定理 13 归功于 Friedman [34]。定理 14 由 Viborni[117] 和 Friedman [31] 所证明．定理 16 应归功于 Westphal [120]。定理 21 由 Hopf [53] 和 Oleinik [92]

所证明. 问题 2—4 基于 [54], 而问题 5, 6 基于 [67].

第三、四章 二阶椭圆型方程的 Schauder 估计由 Schauder 在 [108], [109] 中得到. Miranda [82] 简化了他的证明. Douglis 和 Nirenberg [19] 利用 Hopf [52] 的方法进一步简化了这一证明, 并把内估计推广到很一般的椭圆型方程组. Agmon, Douglis 和 Nirenberg [2] 得到了满足一般边界条件的椭圆型方程组的边界估计; 也可参见 Browder [11], [12].

对于二阶抛物型方程, Ciliberto [13] 在一个空间维数的情况下得到了 Schauder 型估计. 在一般情况下 Barrar[6], [7] 得到了这些估计, 而 Friedman [29], [30]用更简单的方法得到它们. 在[29]中推导了一般抛物型方程组的内估计.

在第 3,4 节中所介绍的连续性方法基于 Friedman [30], 它和应归功于 Nirenberg [91] 对椭圆型方程的方法是类似的; 也可参见 Courant 和 Hilbert [17]. 第三章第 5 节的结果是基于 Friedman [29]; 所用的方法应归功于 Hopf [52] 以及 Douglis 和 Nirenberg [19]对于椭圆型方程组所使用的方法.

至于 Green 函数的参考书目, 见 [33].

第四章的材料基于 Friedman [29], [30]. 问题 1—13 来自 Friedman [33].

至于用类似于问题 1—13 的方法去处理 Laplace 方程见 Kellogg [63] (这个方法就是 Poincaré 的扫除法 (method of balayaye)). 修正法应归于 Perron, 见 Courant 和 Hilbert [17]. Kellogg 在[63]中给出了解 Laplace 方程的 Dirichlet 问题和 Neumann 问题的积分方程方法. 而 Miranda [82] 是对一般二阶椭圆型方程的. 至于闸函数的细节, 见 [63].

第五章 第 2—4 节的结果和问题 2—4 都基于 Pogorzelski [98]—[101]. 对于椭圆型方程的类似于第 2—4 节的结果, 见 Miranda [82] 和 Pogorzelski [97], [104]. Itô 在[55]—[57] 中用拟基本解方法构造了 Green 函数和 Neumann 函数.

Girand [49] 解决了椭圆型方程的第三边值问题. 这个问题

导致的积分方程不是 Fredholm 型的. Pagni [94] 解决了热传导方程的第三边值问题. Lipko [79] 概略地描述了一般二阶抛物型方程的类似结果. Lions [77] 处理了更一般的问题,但通常理解为在某种广义意义下的解.

第六章 第 1—6 节的结果应归功于 Friedman [35], [36], [43]. 第 7 节的结果应归于 Lees 和 Protter [73]. 第 8 节的结果应归功于 Protter [105]; 部分巧合的结果由 Cohen 和 Lees [14] 建立,特别是,问题 7 基于[14]. Agmon 和 Nirenberg [1] 研究了常微分方程和 Banach 空间中不等式的解, 作为一种应用,他们得到了各种不同类型方程解的渐近性态方面的结果. Mizohata [85] 证明了后向抛物型方程 Cauchy 问题解的唯一性定理.

第七章 [107]证明了 Schauder 的不动点定理. [74] 中证明了 Leray 和 Schauder 的不动点定理. 第 2—4 节的结果基于 Friedman [32], [42],而第 5 节的结果基于 Friedman [37]. Kaplan [61] 得到了拟线性微分不等式解的渐近界. Cordes [15], [16] 得到了椭圆型方程解的($1+\delta$)估计,它比抛物型方程的类似估计强些. 他的结果可用于解某些拟线性椭圆型方程.

第八章 第 1—3, 5 节的发展应归功于 Friedman [38]—[41]. 在第 4 节中所给出的方法属于 Douglas [18]. Kyner [68], [69] 进一步发展了 Douglas 的方法, 并证明了非线性方程的存在定理. 至于其他方法,见 Kolodner [64], Sestini [110], [111] 和 Oleinik [93]. Oleinik 考虑非线性方程的多相问题,但其解仅在某种广义意义下满足边界条件.

第十章 弱解, 强解和平滑算子的概念由 Sobolev [113] 和 Friedrichs [45] 引进. Ehrling [22] 证明了引理 8. 现在的证明应归功于 Nirenberg [90]. Sobolev 在 [113] 中证明了定理 2. 用 Hilbert 空间处理 Dirichlet 问题由 Weyl [121] 所首创. Vishik [118], [119]和 Gårding [49] 发展了它. [47]中证明了定理 4,定理 5 由 Lax 和 Milgram [72] 引进. Friedman [46], John [59], Browder [8], Lax [71] 和 Nirenberg [90] 以不同的方法证明了(椭

圆型方程组)弱解在区域内部的可微性. 边界近旁的可微性由 Nirenberg [90] 和 Browder [9] 所证明. 在这之前, Morrey[86] 证明了二阶椭圆型方程组直到边界的可微性.

在 [2],[12] 中不仅对 L^2 范数,而且对任何 L^p 范数建立了定理 13. 在[2]中还在一般边界条件下给予证明. 部分巧合的结果由其他作者得到,至于详细的参考书目见[12].

第 1—5 节基于 Nirenberg [90], 而第 6—7 节基于 Lions [77]. 在 [76] 中 Lions 还在非柱形区域中解了第一初值边值问题. 引理 19 应归功于 Tréves [115; 102—104]. Browder [10] 还研究了(抛物型方程)弱解的存在性和可微性. Lax 和 Milgram [72]用半群方法对于系数仅依赖于 x 的方程解决了第一初值边值问题. Sobolevski [114] 处理了一般变系数的情形,它还处理了拟线性方程.

Morrey [87] 和 Friedman [28] 建立了解析的非线性椭圆型方程的解直到边界的解析性.

参 考 文 献

[1] S. Agmon and L. Nirenberg, "Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces", *Comm. Pure Appl. Math.,* **16** (1963), 121—239.

[2] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg, "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I", *Comm. Pure Appl. Math.,* **12** (1959), 623—727.

[3] D. G. Aronson, "The fundamental solution of a linear parabolic equation containing a small parameter", *Ill. J. Math.,* **3** (1959), 580—619.

[4] ——————, "On the initial value problem for parabolic systems of differential equations", *Bull. Amer. Math., Soc.,* **65** (1959), 310—318.

[5] ——————, "Uniqueness of solutions of the initial value problem for parabolic systems of differential equations", *J. Math. and Mech.,* **11** (1962), 403—420.

[6] R. B. Barrar, *Some estimates for solutions of linear parabolic equations,* University of Michigan Thesis, 1952.

[7] ——————, "Some estimates for solutions of parabolic equations", *J. Math. Analys. and Appl.,* **3** (1961), 373—397.

[8] F. E. Browder, "Strongly elliptic systems of differential equations", Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, *Ann. Math. Studies,* no. **33** (Princeton University Press, 1954), 15—51.

[9] ——————, "On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.,* **9** (1956), 351—361.

[10] ——————, "Parabolic systems of differential equations with time-dependent coefficients", *Proc. Nat. Acad. Sci.,* **42** (1956), 914—917.

[11] ——————, "A priori estimates for solutions of elliptic boundary value problems I, II", *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.,* **22** (1960), 145—159, 160—167.

[12] ——————, "On the spectral theory of elliptic differential operators I", *Math. Ann.,* **142** (1961), 20—130.

[13] C. Ciliberto, 'Formule de maggiorazione e teoremi di essistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili", *Ricerche di*

Mat., **3** (1954), 40—75.

[14] P. J. Cohen and M. Lees, "Asymptotic decay of solutions of differential inequalities", *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 1235—1249.

[15] O. H. Cordes, "Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen", *Math. Ann.*, **131** (1956), 278—312.

[16] ——————, "Vereinfachter Beweis der Existenz einer Apriori-Hölderkonstanten", *Math. Ann.*, **138** (1959), 155—178.

[17] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Methematical Physics*, Vol. 2: *Partial Differential Equations* (Interscience Publishers, 1962).

[18] J. Douglas, "A uniqueness theorem for the solution of a Stefan problem", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 402—408.

[19] A. Douglis and L. Nirenberg, "Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 503—538.

[20] F. G. Dressel, "The fundamental solution of the parabolic equation", *Duke Math. J.*, **7** (1940), 186—203.

[21] ——————, "The fundamental solution of the parabolic equation I". *Duke Math. J.*, **13** (1946), 61—70.

[22] G. Ehrling, "On a type of eigen-value problems for certain elliptic differential operators", *Math. Scand.*, 2(1954), 267—285.

[23] S. D. Eidelman, "Bounds for solutions of parabolic systems and some applications", *Math. Sbornik*, **33** (1953), 359—382.

[24] ——————, "On the funclamental solution of parabolic systems", *Math. Sbornik*, **38** (1956), 51—92.

[25] ——————, "The fundamental matrix of general parabolic systems", *Doklady Akad. Nauk SSSR* (N. S.), **120** (1958), 980—983.

[26] ——————, "On the fundamental solution of parabolic systems", *Math. Sbornik*, **95** (1961), 73—136.

[27] A. Friedman, "Classes of solutions of linear systems of partial differential equations of parabolic type", *Duke Math. J.*, **24** (1957), 433—442.

[28] ——————, "On the regularity of solutions of nonlinear elliptic and parabolic systems of partial differential equations", *J. Math. and Mech.*, **7** (1958), 43—60.

[29] ——————, "Interior estimates for parabolic systems of partial differential equations", *J. Math. and Mech.*, 7(1958), 393—418.

[30] ——————, "Boundary estimates for second order parabolic equations

and their applications", *J. Math. and Mech.*, **7** (1958), 771—792.
[31] ——————, "Remarks on the maximum principle for parabolic equations and its applications", *Pacific J. Math.*, 8 (1958), 201—211.
[32] ——————, "On quasi-linear parabolic equations of the second order". *J. Math. and Mech.*, 7 (1958), 793—810.
[33] ——————, "Parabolic equations of the second order", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959), 509—530.
[34] ——————, "On the uniqueness of Cauchy problem for parabolic equations", *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 503—511.
[35] ——————, "Convergence of solutions of parabolic equations to a steady state", *J. Math. and Mech.*, **8** (1959), 57—76.
[36] ——————, "Asymptotic behavior of solutions of parabolic equations", *J. Math. and Mech.*, **8** (1959), 372—392.
[37] ——————, "Generalized heat transfer between solids and gases under nonlinear boundary conditions", *J. Math. and Mech.*, **8** (1959), 161—184.
[38] ——————, "Free boundary problems for parabolic equations I. Melting of solids", *J. Math. and Mech.*, **8** (1959), 499—518.
[39] ——————, "Free boundary problems for parabolic equations II. Evaporation or condensation of a liquid drop", *J. Math. and Mech.*, **9** (1960), 19—66.
[40] ——————, "Free boundary problems for parabolic equations III. Dissolution of a gas bubble in liquid", *J. Math. and Mech.*, **9** (1960), 327—345.
[41] ——————, "Remarks on Stefan-type free boundary problems for parabolic equations", *J. Math. and Mech.*, **9** (1960), 885—904.
[42] ——————, "On quasi-linear parabolic equations of the second order II", *J. Math. and Mech.*, **9** (1960), 539—556.
[43] ——————, "Asymptotic behavior of solutions of parabolic equations of any order", *Acta. Math.*, **106** (1961), 1—43.
[44] ——————, *Generalized Functions and Partial Differential Equations* (Prentice-Hall, 1963).
[45] K. O. Friedrichs, "The identity of weak and strong extensions of differential operators", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), 132—154.
[46] ——————, "On the differentiability of solutions of linear elliptic differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 299—326.
[47] L. Gårding, "Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential

equations", *Math. Scand.*, **1** (1953), 55—72.

[48] M. Gevrey, "Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique," *J. de Math.*, (6) **10** (1913), 105—148.

[49] G. Giraud, "Équation à intergrales principales d'ordre quelconque", *Ann. Sci. l' École Norn. Super.*, **53** (1936), 1—40.

[50] L. M. Graves, *The Theory of Functions of Real Variables* (2nd ed.; McGraw-Hill, 1956).

[51] E. Hopf, "Elementare Bemerkungen Über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus", *Sitber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin,* **19** (1927), 147—152.

[52] ——————, "Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung", *Math. Zeit.*, **34** (1931), 194—233.

[53] ——————, "A remark on linear elliptic differential equations of the second order", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 791—793.

[54] A. M. Ilin, A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleinik, "Linear second order parabolic equations", *Uspehi Math. Nauk SSSR,* **17,** no. 3(1962), 3—146.

[55] S. Itô, "A boundary value problem of partial differential equations of parabolic type", *Duke Math. J.*, **24** (1957), 299—312.

[56] ——————, "Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems", *Japan J. Math.*, **27,** (1957), 55—102.

[57] ——————, "A remark on my paper 'A boundary value problem of partial differential equations of parabolic type' in Duke Mathematical Journal", *Proc. Japan Acad.*, **34** (1958), 463—465.

[58] F. John, "General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations", *Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems,* Stillwater, Oklahoma, 1951, 113—175.

[59] ——————, "Derivatives of continuous weak solutions of linear elliptic equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 327—335.

[60] ——————, *Plane Waves and Spherical Means* (Interscience Publishers, 1955).

[61] S. Kaplan, "On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1963), 305—330.

[62] O. D. Kellogg, "On the derivatives of harmonic functions on the

boundary", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 486—510.

[63] ————, *Foundation of Potential Theory* (Dover, New York, 1953).

[64] I. I. Kolodner, "Free boundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase", *Comm. Pure Appl. Math.*, **9** (1956), 1—31.

[65] M. Krzyzanski, "Sur les solutions de l'équation linéare du type parabolique déterminées par les conditions initiales", *Ann. Soc. Polon. Math.*, **18** (1945), 145—156.

[66] ————, "Certaines inégalites relatives aux solutions de l'équation parabolique linéare normale", *Bull. Acad. Polon. Sci. Math. astr. Phys.*, **7** (1959), 131—135.

[67] ————, "Une propriété de solution de l'éqution linéare du type parabolique à coefficients non bornés", *Ann. Polon. Math.*, **12** (1962), 209—212.

[68] W. T. Kyner, "An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem", *J. Math. and Mech.*, **8** (1959), 483—498.

[69] ————,"On free boundary value problem for the heat equation", *Quart. Appl. Math.*, **17** (1959), 305—310.

[70] O. A. Ladyzhenskaja, "On the uniqueness of solutions of the Cauchy problem for linear parabolic equations", *Math. Sbornik*, **27** (1950), 175—184.

[71] P. D. Lax, "On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations", *Comm. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 615—633.

[72] P. D. Lax and A. Milgram, "Parabolic equations", Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, *Ann. Math. Studies*, no. **33** (Princeton University Press, 1954), 167—190.

[73] M. Lees and M. H. Protter, "Unique continuation for parabolic differential equations and inequalities", *Duke Math. J.*, **28** (1961), 369—382.

[74] J. Leray and J. Schauder, "Topologie et équations fonctionelles", *Ann. Sci. l'Élcole Norm. Sup.*, **51** (1934), 45—78.

[75] E. E. Levi, "Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali", *Rend. del. Circ. Mat. Palermo*, **24** (1907), 275—317.

[76] J. L. Lions, "Sur les problème mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques", *Ann. l'Institute Fourier*,

7 (1957), 143—182.

[77] ——————, *Equations differentielles. Operationelles et Problémes aux Limites* (Springer-Verlag, 1961).

[78] J. L. Lions and B. Malgrange, "Sur l'unicité rétrograde dane les problèmes mixtes parabolique", *Math. Scand.*, **8** (1960), 277—286.

[79] B. Ya. Lipko, "A mixed problem with oblique derivatives for a parabolic equation of the second order", *Doklady Akad. Nauk SSSR* (N. S.),**132** (1960), 279—282.

[80] S. Mandelbrojt, *Séries de Fourier et Classes Quasi-Analytique de Fonctions* (Gauthier-Villars, Paris, 1935).

[81] E. J. McShane, "Extension of range of functions", *Bull. Amer. Math. Soc.,* **40** (1934), 837—842.

[82] C. Miranda, *Equazioni Alle Derivate Parziali di Tipo Ellittico* (Springer-Verlag, 1955).

[83] S. Mizohata, "Le problème de Cauchy pour les équations paraboliques", *J. Math. Soc. Japan,* **8** (1956), 269—299.

[84] ——————, "Hypoellipticité des équations parabolique", *Bull. Soc. Math. France,* **85** (1957), 15—49.

[85] ——————, "Le Problème de Cauchy le Passé pour Quelques Équations Paraboliques", *Proc. Japan Acad.,* **34** (1958), 693—696.

[86] C. B. Morrey, "Second order elliptic systems of differential equations", *Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Ann. Math. Studies,* no. **33** (Princeton University Press, 1954), 101—159.

[87] ——————, "On the analyticity of the solutions of analytic nonlinear elliptic systems of partial differential equations I, II", *Amer. J. Math.,* **80** (1958), 197—218, 219—238.

[88] C. B. Morrey and L. Nirenberg, "On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.,* **10** (1957), 271—290.

[89] L. Nirenberg, "A strong maximum principle for parabolic equations", *Comm. Pure Appl. Math.,* **6** (1953), 167—177.

[90] ——————, "Remarks on strongly elliptic partial differential equations", *Comm. Pure Appl. Math.,* **8** (1955), 648—674.

[91] ——————, *Existence Theorems in Partial Differential Equations,* New York University Notes.

[92] O. A. Oleinik, "On properties of some boundary problems for equations of elliptic type", *Math. Sbornik,* **30** (72), (1952), 695—702.

[93] ————, "On a method of solving general Stefan problems", *Doklady Akad. Nauk SSSR* (N. S.), **135** (1960), 1054—1057.

[94] M. Pagni, "Su un problema contorno tipico per l'equazione de calore", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* **11** (1957), 73—115.

[95] I. G. Petrowski, "Über das Cauchysche Problem für ein System linearen partialler Differentialgleichungen in Gebiet der nichtanalytischen Funktionen", *Bull. Univ. d'Etat Moscow,* **1A**, no. 7 (1936), 1—74.

[96] W. Pogorzelski, "Étude de la solution fondamental de l'équation parabolique", *Ricerche di Mat.,* **5** (1956), 25—57.

[97] ————, "Étude de la solution fondamental de l'équation elliptique et des problèmes aux limites", *Ann. Polon. Math.,* **3** (1957), 247—284.

[98] ————, "Propriétés des intégrales de l'équation parabolique normale", *Ann. Polon. Math.,* **4** (1957), 61—92.

[99] ————, "Problèmes aux limites pour l'équation parabolique normale", *Ann. Polon. Math.,* **4** (1957), 110—126.

[100] ————, "Propérités de dérivées tangentielles d'une intégrales de l'équation parabolique", *Ricerche di Mat.,* **6** (1957), 162—194.

[101] ————, "Étude d'un fonction de Green et du problème aux limites pour l'équation parabolique normale", *Ann. Polon. Math.,* **4** (1958), 288—307.

[102] ————, "Étude de la matrice des solution fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles", *Ricerche di Mat.,* **7** (1958), 153—185.

[103] ————, "Propriétés de solution du système parabolique d'équation aux dérivées partielles", *Math. Scand.,* **6** (1958), 237—262.

[104] ————, "Sur quelques propriétés de potentiels généralisés et un problème aux limites pour l'équation elliptique", *Ann. Polon. Math.,* **11** (1961), 177— 197.

[105] M. H. Protter, "Properties of solutions of parabolic equations and inequalities", *Canad. J. Math.,* **13** (1961), 331—345.

[106] E. Rothe, "Über die Grudlösung bei parabolischen Gleichungen", *Math Zeit.,* **33** (1931), 488—504.

[107] J. Schander, "Der Fixpunktsatz in Funktionalraümen", *Studia Math.,* **2** (1930), 171—180.

[108] ————, "Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter *Ordnung*", *Math. Zeit.,* **38** (1934), 257—282.

[109] ————, "Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Dif-

ferential , *Studia Math.*, **5** (1934), 34—42.

[110] G. Sestini, "Sul problema non lineare di Stefan in uno strato piano indefinito", *Annali Mat. Pura Appl.*, **51** (1960), 203—224.

[111] ————, "Sul problema non lineare di Stefan in strati cilindrici o sferici", *Annali Mat. Pura Appl.*, **56** (1961), 193—207.

[112] L. N. Slobodetski, "On the fundamental solution and the Cauchy problem for parabolic systems", *Math. Sbornik*, **46** (1958), 229—258.

[113] S. Sobolev, "On a theorem of functional analysis", *Math. Sbornik*, **4** (1938), 471—497.

[114] P. E. Sobolevski, "On equations of parabolic type in Banach space", *Trudy Moscow Math. Obsch.*, **10** (1961), 298—350.

[115] F. Trèves, "Relations de domination entre opèrateurs diffèrentiels", *Acta Math.*, **101** (1959), 1—139.

[116] A. N. Tychonov, "Uniqueness theorems for the heat equation", *Math. Sbornik*, **42** (1935), 199—216.

[117] R. Viborni, "On properties of solutions of some boundary value problems for equations of parabolic type", *Doklady Akad. Nauk SSSR* (N. S.), **117** (1957), 563—565.

[118] M. I. Vishik, "The method of orthogonal and direct decomposition in the theory of elliptic partial differential equations", *Math. Sbornik*, **25** (1949), 189—234.

[119] ————, "On strongly elliptic systems of differential equations", *Math. Sbornik*, **29** (1951), 617—676.

[120] H. Westphal, "Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen", *Math. Zeit.*, **51** (1949), 690—695.

[121] H. Weyl, "The method of orthogonal projection in potential theory", *Duke Math. J.* **7** (1940), 411—444.